



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

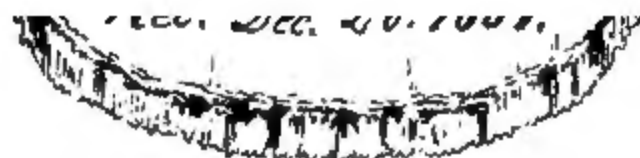
- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

## Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

32.43.41

Math 3008.36



SCIENCE CENTER LIBRARY



Gavin Foyl St. Jacob's 680

Leipziger Brief und angebracht

in H.







Handbuch  
der  
**Differential- und Integral-  
Rechnung**

und ihrer Anwendungen

auf

**Geometrie und Mechanik.**

Zunächst

zum Gebrauche in Vorlesungen

herausgegeben

(Ernst) <sup>von</sup> Ferdinand (Adolph)  
Dr. Ferd. Winding.

---

Erster Theil,

enthaltend Differential- und Integralrechnung, nebst Anwendung  
- auf die Geometrie.

Mit einer Figurentafel.

---

✓ Berlin 1836,  
bei G. Dümmler.

**Handbuch**  
der  
**Differential- und Integral-  
Rechnung**

und ihrer Anwendungen

auf

**G e o m e t r i e.**

Zunächst

zum Gebrauche in Vorlesungen

herausgegeben

von

**Dr. Ferd. Minding.**

---

Mit einer Figurentafel.

---

Berlin 1836,  
bei G. Dümmler.

Math 3008.36

2 vol in 1

Harvard Univ

Joseph. July 680



## Vorrede.

Ich würde mich nicht leicht zur Herausgabe eines Handbuches der Differential- und Integral-Rechnung entschlossen haben; wenn nicht das längst gefühlte und ausgesprochene Bedürfniß meiner Zuhörer an der hiesigen allgemeinen Bau- schule mich dazu veranlaßt, und die hohe vorgesetzte Behörde dieser Anstalt ein solches Unternehmen für zweckmäßig erachtet, daher auch zur Beförderung desselben Sich bewogen gefunden hätte. Nach einmal gefasstem Entschlusse wünschte ich jedoch nicht, ein gar zu dürftig ausgestattetes Compendium zu liefern, sondern hatte die Absicht, dem Buche einen gewissen Grad von Vollständigkeit zu geben, welcher dasselbe nicht allein für meine Vorträge brauchbar machen, sondern ihm vielleicht auch noch andere Leser gewinnen sollte. Zwar läßt sich nicht annehmen, daß Anfänger in der Differential-Rechnung dieses Buch, ohne Hülfe eines Lehrers, sofort mit einiger Leichtigkeit zu lesen im Stande sein würden, da dasselbe vielmehr bestimmt ist, durch Vorträge seine Erläuterung zu erhalten; vielleicht aber könnten einige Lehrer sich

desselben bei ihrem Unterrichte bedienen, oder es könnten auch Leser, die schon einige Uebung besitzen, daraus Nutzen ziehen.

Was den Inhalt betrifft, so habe ich, um die Differential-Rechnung nicht sofort, wie jetzt wieder häufiger geschieht, auf die Vorstellung des Unendlich-Kleinen zu gründen, den Differentialquotienten als den Werth eines gewissen Verhältnisses, dessen Glieder beide Null werden, — erklärt, nachher aber auch, in §. 3., die Bedeutung dieses Werthes durch eine bestimmte Definition; die sich etwa der Newton'schen Fluxionentheorie am meisten annähert, festzustellen gesucht. Es würde der Darstellung bei einigen Gelegenheiten förderlich gewesen sein, neben dem von Herrn. Crelle sehr passend gewählten Namen „Ableitung“ noch einen anderen, jener Definition mehr entsprechenden, zu besitzen; leider aber boten sich mir, bei Aufsuchung eines solchen, nur schmerzfühlige Zusammenstellungen dar. Da übrigens die aus der Vorstellung des Unendlich-Kleinen herstammende Bezeichnung und die gewöhnliche Rechnung mit Differentialen unter allen Umständen beibehalten und gerechtfertigt werden mußte, so ist, an verschiedenen Stellen, darauf aufmerksam gemacht worden, daß man immer nur mit Verhältnissen verschwindender Zunahmen, d. h. mit Ableitungen, rechnet. In der Integral-Rechnung führt dieser Gang allerdings für den Anfänger möglicherweise den Anschein herbei, als ob das Integral/zeichen Null setzen müßte; allein derselbe wird bei richtigem Nachdenken leicht bemerken, daß, wenn  $dx$  als Null

angesehen wird, das Integral  $\int f x dx$  ein Product von der Form  $\infty \cdot 0$ , also  $\frac{0}{0}$  ist, dessen Werth zu finden, eben die Aufgabe der Integral-Rechnung ist. In der Folge habe ich das Unendlich-Kleine, bei geometrischen Anwendungen, wo es sich, wie von selbst, als die einfachste und kürzeste Betrachtungsweise darbietet, sowohl in die Construction als in die Rechnung eingeführt. Es schien mir nicht erlaubt, meinen Lesern die Nachweisung eines so wichtigen Hilfsmittels vorzuenthalten, welches oft fast unmittelbar Resultate giebt, die man, nach anderen Methoden, nur mit Hilfe weitläufiger Zurüstungen hinterher zu beweisen vermag, ohne die Annahme des Unendlich-Kleinen aber vielleicht niemals gefunden haben würde.

Von Büchern, deren ich mich bediente, nenne ich besonders die Functionen-Lehre von Lagrange, von welcher ich die Uebersetzung mit Anmerkungen von Crelle benutzte; die leçons de calcul infinitésimal und den Calcul différentiel von Cauchy; die analyse infinitésimale von Fink (Paris 1834.), wovon ich aber den zweiten Theil, welcher die Integral-Rechnung enthalten soll, bis jetzt nicht gesehen habe; die disquisitiones circa superficies curvas von Gauß; verschiedene Abhandlungen in Crelles Journal; die Supplemente des Klügelschen Wörterbuches von Grunert; unter den Lehrbüchern besonders das von Lacroix, so wie die höhere Geometrie von Brandes. Man wird indessen auch verschiedene, diesem Buche eigenthümliche, Darstellungen bemerken können. Die Rücksicht auf die

Stetigkeit der Functionen ist mehr, als in den meisten Lehrbüchern geschieht, nach dem Vorgange von Cauchy, namentlich auch in der Integral-Rechnung bei der Bestimmung der Constanten, als unerläßlich hervorgehoben worden. In die Lehre von den ausgezeichneten Punkten ebener Curven habe ich etwas mehr Logik zu bringen gesucht, als ich in den mir bekannten Darstellungen derselben hatte wahrnehmen können; doch war für eine vollständige Untersuchung nicht Platz vorhanden. Da überhaupt bei ganz speciellen Gegenständen nicht lange verweilt werden durfte, so konnten z. B. die verschiedenen Transformationen, welche man zur Berechnung des Integral-Logarithmen aufgefunden hat, nicht mitgetheilt werden; doch sah ich mich im Stande, durch eine höchst einfache Messung des Fehlers, welcher bei der Berechnung der Constante aus der in §. 100. mit  $f_u$  bezeichneten Reihe begangen wird, der Darstellung eine gewisse Abrundung zu geben. Von bestimmten Integralen wollte ich nur wenige aufnehmen, weil dieser Gegenstand schon einigermaßen über die Grenzen meines Unternehmens hinaus zu liegen schien; indessen bewog mich die Einfachheit und Strenge einer Methode, welche mir Herr Professor Dirichlet vorschlug, dessen einsichtsvollem Rathe ich auch bei mehreren anderen Gelegenheiten gefolgt bin, zu dem Uebrigen noch die Haupteigenschaften der Function  $\Gamma$  hinzuzufügen. In der Lehre von der Integration der Differentialgleichungen, worüber Lacroix ausführlicher ist, habe ich mich auf einige der einfachsten Sätze und

auf Beispiele beschränkt, vor Allen aber nach Klarheit für den Anfänger gestrebt. Auch die Variations-Rechnung habe ich in aller Kürze möglichst klar darzustellen mich bemüht, und dabei ebenfalls auf eine gewisse Allgemeinheit verzichtet, welche für Anfänger nicht erspriesslich zu sein schien. Die Theorie der Curven des kürzesten Umringes, als Beispiel in die Variations-Rechnung aufgenommen, gab zugleich Gelegenheit, die Sätze von Lancelot über die Abwicklung krummer Linien von Flächen mitzutheilen, deren Herleitung hier auf denjenigen Grad der Einfachheit gebracht sein dürfte, dessen sie, mit Hülfe des Unendlich-Kleinen, fähig ist. Ich will jedoch bei Erwähnung dieser Einzelheiten, denen noch andere beizufügen wären, nicht länger verweilen, sondern überlasse Kennern, die etwa vorhandenen Eigenthümlichkeiten des Buches zu bemerken und zu beurtheilen.

Gern hätte ich auf die Verbesserung des in sehr kurzer Zeit ausgearbeiteten Buches, nicht allein in Betreff der Sachen, sondern auch der Darstellung und des Ausdruckes, noch längere Zeit gewendet; aber die Rücksicht auf das Bedürfniß meiner Vorträge veranlaßte mich zu baldiger Herausgabe.

Obgleich ich dem mühsamen Geschäfte der Correctur viele Sorgfalt gewidmet habe, so ist doch leider noch eine große Anzahl von Fehlern stehen geblieben. Durch ein genaues Verzeichniß, welches ich meine Leser nicht zu übersehen, vielmehr schon vor dem Lesen zur Berichtigung zu benutzen



dringend. bitte, habe ich diesem Uebelstande, so viel als möglich, abzubelfen gesucht. Die hinten angehängten Zusätze, die zur Erläuterung einiger Stellen dienen, in welchen ich, für meine Leser, nicht ausführlich genug gewesen zu sein glaubte, bitte ich gleichfalls nicht zu übersehen.

Der zweite die Mechanik betreffende Theil soll im Laufe des künftigen Jahres erscheinen.

Berlin im August 1836.

Der Verfasser.

---

## Berichtigungen.

- S. 5. Z. 13. v. u. statt  $f(x+x)$  lies  $f(x+\Delta x)$ .  
 S. 10. Z. 2. v. u. statt  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  lies  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ .  
 S. 14. Z. 1. v. o. st.  $(\Delta x)$  im Nenner l.  $(\Delta x)^2$ . — Z. 11. v. o. st.  $dfx$  l.  $ddfx$ . — Z. 6. v. u. st.  $x^{n-1}$  l.  $x^{n-2}$ , u. st.  $x^{n-2}$  l.  $x^{n-3}$ . — Z. 4. v. u. st.  $x^{n-m}$  l.  $x^{n-m-1}$ .  
 S. 15. Z. 1. v. u. st. also ist  $fx$  l. also ist  $fx_1$ .  
 S. 16. Z. 5. v. u. st. Ableitungen l. Ableitungen.  
 S. 17. Z. 7. v. u. st.  $n \frac{d^{n-1}Q}{dx^n}$  l.  $n \frac{d^{n-1}Q}{dx^{n-1}}$ .  
 S. 19. Z. 1. v. o. st. denselben l. denselben.  
 Z. 7. v. u. st. wenn die l. wenn  $fx$  und die.  
 S. 21. Z. 6. v. o. st. d. l. d. b. — Z. 14. v. o. st.  $\frac{x}{2}$  l.  $\frac{x^2}{2}$ .  
 Z. 5. v. u.; am Ende, l.  $n \cdot x^{n-1} = k = \frac{1}{2} R$ .  
 S. 28. Z. 10. v. o. st.  $a \log a \cdot dx$  l.  $a^x \log a \cdot dx$ .  
 Z. 1. u. 2. v. u. st. + l. — vor der 6ten, 10ten u. 7ten Potenz von  $x$ .  
 S. 29. Z. 4. v. o. st.  $\frac{x^4}{1!}$  l.  $\frac{x^4}{4!}$ . — Z. 8. v. o. st. seine l. seien.  
 Z. 5. v. u. st. daß l. daß.  
 S. 30. Z. 15. v. o. st.  $a_{0+3}$  l.  $a_{n+3}$ . — Z. 19. v. o. st. nähern l. nähert.  
 S. 31. Z. 4. v. u. st.  $\sin x \sin y$  l.  $\sin x \cos y$ .  
 S. 34. Z. 19. v. o. st.  $\cos(\pi+x) = -\sin x$  l.  $\cos(\pi+x) = -\cos x$ .  
 S. 49. Z. 2. v. u. st. zugleich l. zugleich.  
 S. 75. Z. 4. v. o. st. 49. l. 40. — Z. 6. v. u. st. seine l. seien.  
 S. 78. Z. 10. v. u. st.  $y' = v_1$  l.  $y' = v_1$ . — Z. 2. v. u. st.  $\psi'(y+\theta h)$  l.  $\psi'(y+\theta h)$ .  
 S. 80. Z. 5. v. o. l. verschwinden.  
 S. 88. Z. 7. v. o. st. diejenigen l. diejenige. — Z. 9. v. u. st.  $\frac{dy}{dy}$  l.  $\frac{dy}{dx}$ .  
 S. 90. Z. 2. v. u. st. 39. l. 40.  
 S. 92. Z. 8. v. o., zweimal, st.  $p-a$  l.  $a-p$ .  
 S. 101. Z. 5. v. o. st.  $f^{m-1}(c)$  und  $f^{m-1}(c)$  l.  $f^{m+1}(c)$  und  $f^{m-1}(c)$ .  
 S. 106. Z. 14. v. o. st. die l. sie.  
 S. 121. Z. 11. v. o. st. näheren l. nähern.  
 S. 136. Z. 9. v. u. st.  $\beta p$  l.  $\beta q$ .  
 S. 147. Z. 10. v. o. st. Fig. 18. l. Fig. 18<sup>r</sup>.

- E. 158. Z. 8. v. o. st.  $\frac{\psi x_n - \psi x_1}{x_n - x_1}$  l.  $\frac{\psi x_n - \psi x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$ .  
 E. 161. Z. 3. v. o. st.  $x_x$  l.  $x_1$ .  
 E. 166. Z. 3. v. u. st. wird l. werde.  
 E. 173. Z. 4. v. u. im Nenner st.  $n-1$  l.  $n+1$ .  
 E. 176. Z. 2. v. u. st. Functionen l. Function, u. st.  $f(x, y)$  l.  $f(x, u)$ .  
 E. 183. Z. 12. v. o. streiche die Worte: für ein positives  $h$ .  
 E. 186. Z. 5. v. u. st.  $-a$  l.  $=a$ .  
 E. 187. Z. 4. v. o. fehlt  $dx$  unter dem Integralzeichen.  
 E. 199. Z. 1. v. o. st. beliebigen l. beliebigen.  
 E. 224. Z. 4. v. u. st.  $r^2 \cos \varphi$  l.  $-r^2 \cos \varphi$ , wobei zu bemerken ist, daß das Zeichen  $-$  weggelassen werden kann.  
 E. 222. Z. 9. u. 10. v. o. st. Par-allelepipedum l. Par-allelepipedum.  
 E. 223. Z. 1. v. o. st. LMG l. LMN.  
 E. 228. Z. 9. v. o. st.  $x - \frac{n}{1}$  l.  $x - \frac{1}{n}$ .  
 E. 232. Z. 9. v. u. st. dem achten Bruche l. den achten Bruch.  
 E. 233. Z. 3. v. o. st.  $Bx^2 + B_1x + B_2$  l.  $Bx^2 + B_1x + B_2$ .  
 E. 236. Z. 10. v. u. st. eben l. eben.  
 E. 242. Z. 6. v. u. streiche 5.  
 E. 247. Z. 12. v. u. st.  $\frac{1}{x^2 - a}$  (zum zweiten Male) l.  $\frac{1}{x^2 - a}$ .  
 E. 259. Z. 10. v. u. streiche  $= 0$ .  
 E. 270. Z. 10. v. o. l. oder aus  $f(x, y, \varphi) = 0$ ,  $\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ ,  $\frac{df}{d\varphi} = 0$ .  
 E. 272. Z. 13. v. u. st. befinden l. finden.  
 E. 279. Z. 3. v. o. st. nach l. noch von. — Z. 9. v. u. st. Die l. die.  
 E. 283. Z. 7. v. u. st.  $AN$  l.  $\frac{AN}{1}$ .  
 E. 284. Z. 13. v. u. st. erhalten l. enthalten. — Z. 8. v. u. st. 149. l. 143.  
 E. 286. Z. 3. v. o. st. 141. l. 144.  
 E. 296. Z. 3. v. o. st. daß l. das.  
 E. 309. Z. 13. u. 14. v. u. l. wieder die Summe der Gl.  
 E. 310. Z. 2. v. o. st.  $\frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dc}$  l.  $\frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dc}$ .  
 E. 311. Z. 11. v. u. st.  $p dx + q dy$  l.  $p dx + q dy$ .

Aus zufälligen Gründen ist für „unendlich groß“ zuerst das Zeichen  $\infty$ , nachher  $\infty$  gebraucht worden.

## Nachtrag zum Verzeichnisse der Berichtigungen.

E. 4. Z. 1. v. o. statt  $fk$  l.  $fx$ .

E. 91. Z. 11. v. u. st. die vorigen Annahmen l. die vorige Annahme.

E. 159. Z. 11. v. o. l.  $(x_n - x_0)$ .

E. 200. Z. 8. v. u. neben  $\arcsin \frac{x}{a}$  streiche  $\frac{1}{2}$ .

E. 203. Z. 8. v. o. st. s l.  $da$ . — Z. 14. v. o. l.  $dx = \frac{-pz dz}{(z-1)^2}$  und  
nachher st.  $dz^2$  l.  $dz$ .

E. 227. Z. 4. u. Z. 10. v. o. st.  $n$ ten l.  $(n-1)$ ten.

E. 228. Z. 6. v. u. st.  $K_2 + A_2$  l.  $K_2 A_2$ .

E. 278. Z. 11. v. u. st. sämtlich l. nicht constant, also.

E. 284. Z. 3. v. u. vor „setzt“ fehlt: von  $x$ .

E. 288. Z. 8. v. u. l.  $qx - py = 0$  und nachher  $q = \frac{py}{x}$ .

E. 306. Z. 9. v. u. st.  $\frac{df}{dz} \delta y$  l.  $\frac{df}{dz} \delta z$ .

E. 309. Z. 11. v. o. st.  $y + \frac{dy'}{dc} \delta c$  l.  $y' + \frac{dy'}{dc} \delta c$ .

---





# I n h a l t.

## Differential-Rechnung.

§. 1—4.	Begriff der Function und der Ableitung .....	S. 1.
5—6.	Allgemeine Regeln, um Ableitungen zu finden .....	8.
7—8.	Ableitung von $x^n$ , nebst anderen Beispielen .....	11.
9.	Höhere Ableitungen .....	13.
10—12.	Taylor'sche Reihe .....	15.
13.	Binomische Reihe .....	21.
14—15.	Exponentielle Functionen .....	23.
16.	Logarithmen .....	25.
17—23.	Trigonometrische Functionen .....	28.
24—26.	Zusätze .....	41.
27—32.	Functionen von mehreren Veränderlichen. Partielle Ableitungen .....	48.
33—39.	Untersuchung ausgezeichneter, besonders größter oder kleinster, Werthe .....	60.
40—50.	Ebene Curven .....	75.
	Berührende Curven, Krümmungskreis .....	88.
51—66.	Ueber die Auflösung algebraischer Gleichungen, nach Fourier .....	96.
67—71.	Curven im Raume .....	127.
72—83.	Flächen .....	134.
	Krümmung derselben .....	135.
	Abwickelbare Flächen .....	143.

## Integral-Rechnung.

84—86.	Allgemeine Sätze über das Integral .....	155.
87.	Ueber die Bestimmung der Constanten der Integration .....	160.
88—94.	Integration rationaler Functionen, und einiger anderer, die sich darauf zurückführen lassen .....	164.
95—96.	Integrale einiger algebraischen Functionen .....	177.
97—99.	Theilweise Integration, nebst Anwendungen auf trigonometrische, exponentielle und logarithmische Functionen ..	184.
100.	Integral-Logarithmus .....	191.
101.	Einige Beispiele von Integration durch Reihen .....	193.

102.	Herleitung neuer Integrale aus bekannten durch Differentiation und Integration nach einer Constante .....	195.
103—104.	Quadratur ebener Curven .....	198.
105—106.	Rectification der Curven .....	202.
107—111.	Quadratur der Flächen .....	207.
112—114.	Cubatur der Körper .....	218.
115—119.	Mechanische Quadratur .....	226.
120—127.	Einige bestimmte Integrale .....	237.
128—129.	Bedingungen der Integrabilität von Differential-Ausdrücken erster Ordnung und ersten Grades .....	254.
130—134.	Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades zwischen zwei Veränderlichen .....	257.
135—137.	Beispiele von besonderen Auflösungen .....	265.
138—141.	Differentialgleichungen höherer Ordnung zwischen zwei Veränderlichen .....	273.
142—143.	Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades zwischen drei Veränderlichen .....	281.
144—147.	Bemerkungen über partielle Differentialgleichungen .....	286.
148.	Erklärung der Variations-Rechnung .....	291.
149—151.	Anwendung auf die Bedingungen der Integrabilität .....	294.
152—153.	Aufgaben vom Größten und Kleinsten .....	300.

# **Differential - Rechnung.**

---

1931. 10. 27. 1931. 10. 27.

## Differential - Rechnung.

1. Obgleich der Zweck der Differential-Rechnung am klarsten aus ihr selbst und ihren zahlreichen und wichtigen Anwendungen erkannt wird; so läßt sich darüber doch vorläufig im Allgemeinen sagen, daß dieselbe bei mathematischen Betrachtungen immer nur dann eintreten kann, wenn einige der vorkommenden Größen als des Wachsens oder Abnehmens fähig, überhaupt als veränderlich gedacht werden, und es darauf ankommt, zu untersuchen, welchen Einfluß die Veränderung gewisser Größen auf die Werthe anderer, von jenen abhängiger Größen ausübt. In so fern der Werth einer veränderlichen Größe durch den Werth einer anderen veränderlichen Größe bestimmt wird, oder von diesem abhängt, nennt man jene eine Function von dieser. So sind z. B.  $x^n$ ,  $\log x$ ,  $\sin x$  Functionen von  $x$ , d. h. sie ändern ihre Werthe, wenn  $x$  den seinigen ändert, und zwar jede nach einem ihr eigenthümlichen Gesetze. Diejenigen Größen aber, deren Werthe als unveränderlich angenommen werden, heißen beständige Größen oder Constanten.

Eine Function von  $x$  wird entweder durch einen anderen Buchstaben, z. B.  $y$ , oder auch durch  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  u. dgl. bezeichnet. Es ist einleuchtend, daß eine Größe auch von mehreren Veränderlichen z. B.  $x$ ,  $z$ ,  $t$  abhängen kann; eine solche wird durch  $f(x, z, t)$  bezeichnet. Von den hier als bekannt voraussetzenden Arten der Functionen entsteht ein beträchtlicher Theil dadurch, daß die veränderlichen und die beständigen Größen durch



die Operationen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division mit einander verbunden, und daß die veränderlichen Größen, entweder einzeln, oder in Verbindung mit beständigen, zu Potenzen von unveränderlichen Exponenten erhoben werden. Vorausgesetzt daß die Anzahl der nöthigen Operationen dieser Art eine endliche ist, oder doch darauf zurückgeführt werden kann, so heißen diese Functionen *algebraische*, und, wenn nur ganze Potenzen vorhanden, *rationale*, wenn aber gebrochene Exponenten vorhanden, also Wurzeln angezeigt sind, die nicht auf rationale Functionen zurückkommen, *irrationale* Functionen. So sind z. B.  $\frac{a+bx^2}{cx+bx^3}$ ,  $\sqrt{a+x^3}$  algebraische Functionen, die erste rational, die zweite irrational. Außer diesen werden noch die logarithmischen, exponentiellen und trigonometrischen Functionen als vorläufig bekannt angenommen; von denen  $\log x$ ,  $a^x$ ,  $\sin x$  und  $\cos x$  die einfachsten Formen sind.

Im Allgemeinen bedeutet also  $f(x)$ , oder auch, ohne Klammern,  $fx$  eine Größe, die durch eine gewisse Reihe von Operationen aus  $x$  und aus beständigen Größen gebildet wird. Wenn die Bezeichnung dieser Operationen irgend eine Unbestimmtheit übrig läßt, wie z. B.  $\sqrt{x}$  in Hinsicht des Zeichens  $\pm$  zweideutig ist; so ist auch, für denselben Werth von  $x$ , die Function  $fx$  mehrerer Werthe fähig, oder das Zeichen  $fx$  stellt mehrere Functionen zugleich dar, welche, um alle Unklarheit zu beseitigen, nach Umständen von einander zu sondern sind. —

### Functionen von einer veränderlichen Grösse.

2. Wenn die Größe  $x$ , von welcher eine Function  $fx$  untersucht werden soll, um  $k$  zunimmt, also in  $x+k$  übergeht, so verwandelt  $fx$  sich in  $f(x+k)$ , ändert sich also um

$$f(x+k) - fx.$$

Diese (positive oder negative) Zunahme von  $fx$  wird offen-

bar Null, wenn  $k=0$  wird, wie auch die Function  $fx$  übrigs beschaffen sei; so lange dieselbe aber stetig bleibt, hat sie die Eigenschaft, daß ihre Zunahme  $f(x+k)-fx$  kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden kann, indem  $k$  mehr und mehr der Null genähert wird, ohne jedoch mit dieser zusammenzufallen. Ist dies bei irgend einem Werthe von  $x$  nicht der Fall, d. h. geschieht irgend einmal die Zunahme der Function sprunghaft; so müssen, in der jetzt folgenden Untersuchung, solche besonderen Werthe als ausgeschlossen betrachtet werden. Z. B. die Function  $\frac{1}{x}$  springt plötzlich von  $-\infty$  in  $+\infty$  über, indem  $x$  durch Null geht. Hier findet also eine Unterbrechung der Stetigkeit Statt, indem die Zunahme  $\frac{1}{x+k}-\frac{1}{x}$  d. i.  $\frac{-k}{x(x+k)}$  sich nicht mit  $k$  zugleich der Null nähert, wenn  $x=0$  ist. Sie ist vielmehr, sobald  $x=0$ , allemal  $=-\frac{k}{x \cdot k}=-\frac{1}{0}$ , wie klein auch  $k$  sei.

Indem die Zunahmen  $k$  und  $f(x+k)-fx$  beide zugleich kleiner als jede gegebene Größe genommen werden, hören sie zwar, jede einzeln, auf, einer Zahlenbestimmung fähig zu sein; dessen ungeachtet aber kann ihr Verhältniß, d. h. der Quotient

$$\frac{f(x+k)-fx}{k}$$

fortwährend, wie klein auch Zähler und Nenner desselben werden mögen, eine bestimmte Größe haben.

Es sei z. B.  $fx=ax+b$ , so wird  $f(x+k)=a(x+k)+b$ , daher  $\frac{f(x+k)-fx}{k}=a$ ; d. h. die Zunahme von  $fx=ax+b$  verhält sich zu der von  $x$ , wie groß oder wie klein dieselbe auch genommen wird, immer wie  $a:1$ . Man kann daher sagen, daß, während  $x$  gleichmäßig wächst,  $ax+b$  ebenfalls gleichmäßig, und zwar immer  $a$  mal so stark wächst als  $x$ .

Es sei  $fx=x^2$ , so wird  $f(x+k)=x^2+2xk+k^2$ ,

$\frac{f(x+k)-fk}{k} = 2x+k$ . Also verhält sich die Zunahme von  $x^2$

zu der von  $x$ , d. i.  $f(x+k)-fx:k$  immer wie  $2x+k:1$ . Indem man sich wieder  $x$  als gleichmäßig wachsend vorstellt, so wächst  $x^2$  nicht mehr gleichmäßig, sondern das Verhältniß zwischen zwei zusammengehörigen Zunahmen von  $x^2$  und  $x$  ist veränderlich, und man sieht zugleich, daß es dem Verhältnisse  $2x:1$  beliebig nahe gebracht werden kann, weil man sich die Zunahme  $k$  so klein denken kann, als man will. Dieser Grenzwert, welchem sich das Verhältniß beider Zunahmen desto mehr nähert, je kleiner  $k$  wird, d. i. das Verhältniß  $2x:1$  zeigt an, daß  $x^2$  desto stärker wächst, je größer  $x$  schon geworden ist, wenigstens so lange  $x$  positiv bleibt. Betrachtet man aber die Function  $x^2$  in ihrem ganzen Umfange, indem man sich  $x$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  beständig gleichmäßig wachsend denkt, so wird das Verhältniß  $2x:1$  negativ, so lange  $x$  negativ ist; d. h. während  $x$  von  $-\infty$  bis  $0$  wächst, nimmt  $x^2$  ununterbrochen von  $+\infty$  bis  $0$  ab, aber desto schwächer, je näher  $x$  der Null kommt, bis bei  $x=0$  das Verhältniß  $2x:1$  sein Zeichen wechselt, und indem die Abnahme von  $x^2$  in Zunahme übergeht, während  $x$  von  $0$  bis  $+\infty$  gleichmäßig zu wachsen fortfährt,  $x^2$  ebenfalls zunimmt, und zwar mit wachsender Stärke, weil das Verhältniß  $2x:1$  positiv und in beständigem Zunehmen ist. —

3. Allgemein drückt der Quotient  $\frac{f(x+k)-fx}{k}$  das Verhältniß der einander entsprechenden Zunahmen von  $fx$  und  $x$  aus. Es soll sofort an mehreren Beispielen, und nachher in größerer Allgemeinheit nachgewiesen werden, daß das Verhältniß  $\frac{f(x+k)-fx}{k}$  sich einer bestimmten, von  $k$  unabhängigen

Grenze desto mehr nähert, je kleiner  $k$  genommen wird. (In dem obigen Beispiele war  $fx=x^2$ , und die Grenze, der das Verhältniß der beiden Zunahmen sich näherte,  $2x:1$ ).

Dieselbe giebt den Werth an, welchen der Quotient  $\frac{f(x+k)-f_x}{k}$  für  $k=0$  erhält, indem sein Zähler und Nenner zugleich verschwinden. Dieser Werth von  $\frac{f(x+k)-f_x}{k}$  für  $k=0$  drückt offenbar nicht mehr das Verhältniß zweier Zunahmen von  $f_x$  und  $x$  aus, sondern er kann nur angesehen werden als das Maasß der veränderlichen Stärke, mit welcher  $f_x$  wächst, während  $x$  gleichmäßig wächst. Er ist positiv, wenn  $f_x$  und  $x$  beide zugleich wachsen, negativ, wenn  $f_x$  abnimmt, indem  $x$  wächst. Man nennt ihn die Ableitung von  $f_x$ , und bezeichnet ihn mit  $f'(x)$ , oder auch ohne Klammern  $f'_x$ , so daß die Ableitung  $f'_x$  der Werth ist, welchen der Quotient  $\frac{f(x+k)-f_x}{k}$  für  $k=0$  erhält. —

Da  $k$  und  $f(x+k)-f_x$ , für ein beliebiges  $k$ , zwei einander entsprechende Zunahmen oder Differenzen von  $x$  und  $f_x$  sind, so werden sie oft durch Vorsezung des Buchstabens  $\Delta$  bezeichnet, so daß  $\Delta x = k$  die Zunahme oder Differenz von  $x$ ,  $\Delta f_x = f(x+k) - f_x = f(x+k) - f_x$  die Differenz von  $f_x$  andeutet. Nach dieser Bezeichnung muß das Verhältniß  $\frac{f(x+k)-f_x}{k}$  durch  $\frac{\Delta f_x}{\Delta x}$  ausgedrückt werden. Dies führt auf eine entsprechende Bezeichnung der Ableitung  $f'_x$ , welche in vielen Fällen vorzuziehen ist. Nämlich die Ableitung  $f'_x$  ist der Werth, welchen das Verhältniß  $\frac{\Delta f_x}{\Delta x}$  erhält, wenn die Differenz  $\Delta x$ , und mit ihr zugleich die Differenz  $\Delta f_x$  verschwindet. Eine im Verschwinden gedachte Differenz heißt ein Differential, und wird zur Unterscheidung von der Differenz  $\Delta$  mit  $d$  bezeichnet. Demnach ist  $dx$  das Differential von  $x$ ,  $df_x$  das Differential von  $f_x$ . Ein Differential ist mithin, für sich allein betrachtet, keine Größe mehr, oder es ist, in Hinsicht auf seine Quantität, Null; es hat nur noch Bedeutung in seinem Verhältnisse

zu einem anderen Differentiale. Das Verhältniß der beiden Differentiale  $dfx$  und  $dx$  oder der Differentialquotient  $\frac{dfx}{dx}$  drückt also, nur vollständiger zugleich seinen Ursprung aus  $fx$  andeutend, dasselbe aus, was unter der Ableitung  $f'x$  zu verstehen ist, oder man hat

$$\frac{dfx}{dx} = f'x.$$

Statt dessen schreibt man auch oft  $dfx = f'x \cdot dx$ , weil diese Formel offenbar ebenfalls nur das Verhältniß der Differentiale  $dfx$  und  $dx$  ausdrückt.

Wenn also  $fx = ax + b$  ist, so wird  $f'x = a$ , oder  $\frac{dfx}{dx} = \frac{d(ax+b)}{dx} = a$ , oder auch  $d(ax+b) = adx$ . — Oder

wenn  $fx = x^2$ , so wird  $f'x = 2x$ , oder  $\frac{dfx}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx} = 2x$ , oder auch  $dfx = d(x^2) = 2x dx$ . —

Es sei, um noch andere Beispiele anzuführen,  $fx = x^3$ , so wird  $f(x+k) - fx = 3x^2k + 3xk^2 + k^3$ , also

$$\frac{f(x+k) - fx}{k} = 3x^2 + 3xk + k^2; \text{ daher, für } k=0, f'x = 3x^2.$$

Also ist  $\frac{d(x^3)}{dx} = 3x^2$ , oder  $d(x^3) = 3x^2 dx$ .

Es sei  $fx = \frac{1}{x}$ , so wird  $\frac{f(x+k) - fx}{k} = \frac{1}{k} \left( \frac{1}{x+k} - \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x(x+k)}$ ; also für  $k=0$ ,  $\frac{f(x+k) - fx}{k} = -\frac{1}{x^2}$ ; demnach

$$\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} = -\frac{1}{x^2}, \text{ oder auch } d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2}.$$

Es sei  $fx = \sqrt{x}$ , so wird  $f(x+k) = \sqrt{x+k}$ . Man findet aber leicht, daß  $\sqrt{x+k} - \sqrt{x} = \frac{k}{\sqrt{x+k} + \sqrt{x}}$  ist, also

$$\frac{\sqrt{x+k} - \sqrt{x}}{k} = \frac{1}{\sqrt{x+k} + \sqrt{x}}, \quad \text{d. i. für } k=0, \quad = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\text{Daher ist } \frac{d(\sqrt{x})}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \text{oder } d(\sqrt{x}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

4. Anmerkung. Der Begriff und die angegebene Bezeichnung eines Differentials sind von Leibniz in die Mathematik eingeführt worden, der sich unter einem Differentiale, wie  $dx$ ,  $dsx$ , eine Größe dachte, die, in beständiger Annäherung gegen Null begriffen, kleiner als jede gegebene Größe, d. h. unendlich klein wird.

Da nun das Verhältniß der beiden Zunahmen von  $fx$  und  $x$  sich dem Werthe  $f'x$  desto mehr nähert, je kleiner beide genommen werden, so soll, wenn  $x$  die unendlich kleine Zunahme  $dx$  erhält, die entsprechende unendlich kleine Zunahme von  $fx$ , d. i.  $dsx$  durch  $f'x \cdot dx$  ausgedrückt werden. Vergleicht man aber den in §. 12. gegebenen allgemeinen Ausdruck der Zunahme  $f(x+k) - fx$ , so sieht man, daß  $f'x \cdot k$  nur das erste Glied dieses Ausdruckes ist, und daß mithin  $f'x \cdot k$ , wie klein auch  $k$  sei, niemals genau die Zunahme von  $fx$  angiebt. Oder, um ein schon hier verständliches Beispiel zu geben, die Zunahme von  $x^2$  ist nicht  $2xk$ , sondern  $2xk + k^2$ . Indem aber  $k$  als eine unendlich kleine Größe gedacht wird, so wird der Einfluß des zweiten Gliedes  $k^2$  gegen das erste immer unbedeutender; man läßt daher  $k^2$  als eine unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung, gegen das die erste Potenz von  $k$  enthaltende Glied  $2xk$ , ein unendlich Kleines der ersten Ordnung, hinweg, und drückt die Zunahme  $d(x^2)$  bloß durch  $2xdx$  aus. Wegen dieses Weglassens gewisser Glieder, eignet sich diese Ansicht weniger für eine strenge Darstellung der Differentialrechnung, weshalb dieselbe in diesem Lehrbuche nicht zu Grunde gelegt worden ist. Indessen ist zu bemerken, daß sie, gehörig verstanden, immer richtige Resultate liefert, und besonders die Anwendung der Rechnung auf Geometrie und Mechanik sehr erleichtert; daher sie auch aus diesem

Lehrbuche nicht gänzlich ausgeschlossen, sondern vielmehr, jedoch erst später, nach vollständiger Begründung der Differentialrechnung, gebraucht werden soll. Für jetzt also bleibe der Leser bei den Bestimmungen der vorigen §. stehen.

5. Die Ableitung einer beständigen Größe  $a$  ist offenbar Null, weil ihr gar keine Zunahme beigelegt werden kann; also  $\frac{da}{dx} = 0$ , wofür man auch schreibt  $da = 0$ . — Wenn ferner die Ableitung von  $fx$ , d. i.  $f'x$  gegeben ist, und  $a$  einen constanten Factor bedeutet, so sieht man leicht, daß  $af'x$  die Ableitung von  $afx$ , oder daß  $d(afx) = adfx = af'xdx$  ist.

Um aber nachzuweisen, daß der Quotient  $\frac{f(x+k) - fx}{k}$ , welcher zur Abkürzung, weil er eine Function von  $x$  und  $k$  ist, mit  $F(x,k)$  bezeichnet werden mag, für  $k = 0$  wirklich im Allgemeinen einen bestimmten Werth hat, oder daß es eine Ableitung von  $fx$  giebt, soll jetzt gezeigt werden, daß, wenn die beiden Functionen  $fx$  und  $\varphi x$  Ableitungen haben, auch ihre Summe, Differenz, ihr Product und Quotient Ableitungen haben.

Für ein beliebiges  $k$  sei  $\frac{f(x+k) - fx}{k} = F(x,k) = F$ , und  $\frac{\varphi(x+k) - \varphi x}{k} = \varphi(x,k) = \varphi$ , so sind  $F$  und  $\varphi$  zwei Functionen von  $x$  und  $k$ , von denen bekannt ist, daß sie, für  $k = 0$ , in die bestimmten und gegebenen Functionen  $f'x$  und  $\varphi'x$  übergehen.

a. Um die Ableitung der Summe oder Differenz  $fx \pm \varphi x$  zu finden, hat man zuerst

$$\frac{f(x+k) \pm \varphi(x+k) - (fx \pm \varphi x)}{k} = F \pm \varphi; \text{ also, für } k = 0,$$

$= f'x \pm \varphi'x$ , d. h. die Ableitung der Summe oder Differenz zweier Functionen ist die Summe oder Differenz

renz der Ableitungen dieser Functionen. Mithin ist  

$$\frac{d(fx \pm \varphi x)}{dx} = \frac{dfx}{dx} \pm \frac{d\varphi x}{dx} = f'x \pm \varphi'x;$$
 oder auch, wenn man  
 statt der Ableitungen Differentiale schreibt:

$$d(fx \pm \varphi x) = dfx \pm d\varphi x = f'x dx \pm \varphi'x dx.$$

b. Die Ableitung des Productes  $fx \cdot \varphi x$  ist der Werth  
 des Quotienten

$$\frac{f(x+k) \cdot \varphi(x+k) - fx \cdot \varphi x}{k} \quad \text{für } k=0.$$

Nach dem Obigen ist aber  $f(x+k) = fx + kF$ ,  
 $\varphi(x+k) = \varphi x + k\varphi$ ; setzt man diese Werthe in den vorstehenden  
 Quotienten, so wird derselbe:

$$fx \cdot \varphi + \varphi x \cdot F + k \cdot F \cdot \varphi;$$

mithin, für  $k=0$ , indem  $F$  in  $f'x$ ,  $\varphi$  in  $\varphi'x$  übergeht,

$$fx \varphi'x + \varphi x f'x = \frac{d(fx \cdot \varphi x)}{dx}.$$

Also: Die Ableitung des Productes zweier Functionen ist die Summe der beiden Producte, welche  
 entstehen, wenn jede der Functionen in die Ableitung  
 der anderen multiplicirt wird. Daher ist auch:

$$d(fx \cdot \varphi x) = fx \cdot d\varphi x + \varphi x \cdot dfx.$$

c. Die Ableitung des Quotienten  $\frac{fx}{\varphi x}$  ist der Werth von

$\frac{f(x+k)}{\varphi(x+k)} - \frac{fx}{\varphi x}$  für  $k=0$ . Schreibt man wieder für  $f(x+k)$ ,  
 $\varphi(x+k)$  ihre obigen Werthe, so geht dieser Ausdruck, auf einen  
 Nenner gebracht, über in:

$$\frac{\varphi x \cdot F - fx \cdot \varphi}{\varphi x \cdot \varphi(x+k)}.$$

daher, für  $k=0$ , in  $\frac{\varphi x \cdot f'x - fx \cdot \varphi'x}{(\varphi x)^2} = \frac{d\left(\frac{fx}{\varphi x}\right)}{dx}.$



Mithin ist auch 
$$d\left(\frac{fx}{\varphi x}\right) = \frac{\varphi x dfx - fx d\varphi x}{(\varphi x)^2}.$$

Also: Die Ableitung eines Quotienten wird gefunden, wenn man den Nenner mit der Ableitung des Zählers, den Zähler mit der Ableitung des Nenners multiplicirt, das letztere Product von dem ersteren abzieht, und den Unterschied durch das Quadrat des Nenners dividirt.

6. Es sei ferner eine Function einer Function  $\varphi(fx)$  gegeben, so läßt sich die Ableitung derselben folgendermaßen finden, wenn  $\varphi'x$  und  $f'x$  bekannt sind:

Man setze, wie früher,  $f(x+k) = fx + kF$ ; und

$$Q = \frac{\varphi(fx + kF) - \varphi(fx)}{k}.$$

Nun sei  $fx = y$ ,  $kF = h$ , so wird

$$Q = \frac{\varphi(y+h) - \varphi y}{h} \cdot F.$$

Offenbar aber wird, für  $k=0$ , zugleich  $h=0$ , mithin  $\frac{\varphi(y+h) - \varphi y}{h} = \varphi'y$ , und zugleich  $F = f'x$ ; folglich

$$Q = \varphi'y \cdot f'x, \text{ wo } y = fx.$$

Also: Um die Ableitung von  $\varphi(fx)$  zu finden, betrachte man zuerst  $\varphi(fx)$  als eine Function von  $y = fx$ , und nehme die Ableitung von  $\varphi y$  nach  $y$ ; diese Ableitung  $\varphi'y$  mit der Ableitung  $f'x$  von  $fx$  multiplicirt, giebt  $\varphi'y \cdot f'x$  als die gesuchte Ableitung von  $\varphi(fx) = \varphi y$ . Man hat also

$$\frac{d\varphi y}{dx} = \frac{d\varphi y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \varphi'y \cdot f'x; \text{ oder } d(\varphi y) = \varphi'y \cdot dfx = \varphi'y \cdot f'x \cdot dx.$$

3. B. die Ableitung von  $x^3$  war  $3x^2$ , und die von  $\sqrt{x}$  war  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Nun sei  $y = fx = x^3$ , und  $\varphi y = \sqrt{y}$ , also  $\varphi y = \varphi(fx)$

$$= \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}. \text{ Man hat } \varphi'y = \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{x^3}}; \quad \text{und}$$

$f x = 3x^2$ , folglich  $\frac{d\varphi(fx)}{dx} = \varphi' y \cdot f' x = \frac{1}{2\sqrt{x^3}} \cdot 3x^2 = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ ;

folglich ist  $d(\sqrt{x^3}) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \cdot dx$ , oder  $d(x^{\frac{3}{2}}) = \frac{3}{2}(x^{\frac{1}{2}})dx$ .

7. Vermittelt dieser Satz soll zunächst die Ableitung oder das Differential von  $x^n$  bestimmt werden. — Zu dem Ende nehme man das Differential des Productes  $fx \cdot \varphi x$  nach §. 5. b. Es war  $d(fx \cdot \varphi x) = fx d\varphi x + \varphi x \cdot dfx$ .

Dividirt man auf beiden Seiten mit  $fx \cdot \varphi x$ , so kommt  $\frac{d(fx \cdot \varphi x)}{fx \cdot \varphi x} = \frac{dfx}{fx} + \frac{d\varphi x}{\varphi x}$ . — Es sei nun  $\varphi x$  selbst das Product zweier Functionen, deren Differentiale bekannt sind, und die mit  $v$  und  $w$ , so wie  $fx$  mit  $u$ , zur Abkürzung bezeichnet werden sollen; so folgt:

$$\frac{d(u \cdot v \cdot w)}{u \cdot v \cdot w} = \frac{du}{u} + \frac{d(v \cdot w)}{v \cdot w} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w}.$$

Die in vorstehender Formel enthaltene Regel für die Bildung des Differential's eines Productes gilt offenbar für eine beliebige Anzahl von Factoren. Sind diese sämtlichen Factoren einander gleich, und ihre Anzahl  $n$ , so erhält man

$$\frac{d(u^n)}{u^n} = \frac{du}{u} + \frac{du}{u} + \frac{du}{u} + \dots = n \frac{du}{u}, \text{ mithin } d(u^n) = nu^{n-1} du.$$

Ist insbesondere  $u = x$ , so ist das Differential davon  $dx$  (oder die Ableitung ist  $= 1$ ); mithin ist  $\frac{d(x^n)}{x^n} = n \frac{dx}{x}$ , wenn  $n$  eine positive ganze Zahl; oder  $d(x^n) = nx^{n-1} \cdot dx$ .

Es sei ferner  $n = \frac{p}{q}$  ein Bruch, Zähler  $p$  und Nenner  $q$

ganze positive Zahlen; man setze  $z = x^{\frac{p}{q}}$ ,  $z' = (x+k)^{\frac{p}{q}}$ ; so ergibt sich der Werth des Quotienten  $\frac{z' - z}{k}$ , für  $k = 0$ , wie

folgt: Man setze  $x^{\frac{1}{q}} = u$ ,  $(x+k)^{\frac{1}{q}} = u+h$ , so wird, da  $k = x+k-x = (u+h)^q - u^q$ ,

$$\frac{z' - z}{k} = \frac{(u+h)^p - u^p}{(u+h)^q - u^q} = \frac{(u+h)^p - u^p}{h} \cdot \frac{(u+h)^q - u^q}{h}.$$

Für  $k=0$  wird aber auch  $h=0$ , mithin, da  $p$  und  $q$  ganze positive Zahlen sind,

$$\frac{(u+h)^p - u^p}{h} = pu^{p-1},$$

$$\frac{(u+h)^q - u^q}{h} = qu^{q-1}; \quad \text{folglich wird, für } k=0,$$

$$\frac{z' - z}{k} = \frac{pu^{p-1}}{qu^{q-1}} = \frac{p}{q} u^{p-q} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}, \quad \text{also}$$

$$d\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1} \cdot dx, \quad \text{oder} \quad d(x^n) = nx^{n-1} dx.$$

Um ferner das Differential von  $x^{-n}$  zu finden, wo  $n$  wieder positiv, setze man für  $x^{-n}$ ,  $\frac{1}{x^n}$ . Nach §. 5. c. findet man hiervon das Differential, wenn man  $fx=1$ ,  $\varphi x=x^n$ , mithin  $dfx=0$ ,  $d\varphi x=nx^{n-1}dx$  setzt; woraus sich ergibt

$$d(x^{-n}) = d\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{d(x^n)}{x^{2n}} = -\frac{nx^{n-1}dx}{x^{2n}} = -n \cdot x^{-n-1} \cdot dx.$$

Hieraus geht hervor, daß allgemein, der Exponent  $n$  mag positiv oder negativ, ganz oder gebrochen sein,  $d(x^n) = nx^{n-1}dx$ , oder die Ableitung  $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$  ist.

Also: Die Ableitung von  $x^n$  ist das Product des Exponenten  $n$  in die  $(n-1)$ te Potenz von  $x$ .

8. Mit Hülfe vorstehender Sätze kann man das Differential (oder die Ableitung) jeder algebraischen Function finden, d. h. dieselbe differentiiren. Es sei z. B.  $y = (a + bx^n)^p$ , so setze man  $a + bx^n = z$ ,  $y = z^p$ ; alsdann wird  $dy = pz^{p-1}dz$ ,  $dz = bnx^{n-1}dx$ , folglich  $dy = pbn \cdot z^{p-1} \cdot x^{n-1}dx = pbn(a + bx^n)^{p-1}x^{n-1}dx$ . — Andere, zum Theil etwas verwickeltere Beispiele, wofür aber die im Vorigen enthaltenen Regeln hinreichen, sind:

$$d(\sqrt{1+x^2}) = + \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} \cdot d(\sqrt{1-x^2}) = - \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$d(x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} [x + \sqrt{1+x^2}].$$

$$\begin{aligned} d \left[ \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \right] &= \frac{-2dx}{\sqrt{(1-x^2)} (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^2} \\ &= \frac{-dx}{\sqrt{(1-x^2)} (1 - \sqrt{1-x^2})} = - \frac{dx}{x^2} - \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

9. Wenn der Quotient  $\frac{f(x+k) - f'x}{k}$  für  $k=0$  einen bestimmten Werth erhält; so wird dieser die Ableitung von  $f'x$  oder die zweite Ableitung von  $fx$  sein, und soll mit  $f''x$  bezeichnet werden. Man hat also  $\frac{df'x}{dx} = f''x$ , oder  $df'x = f''x \cdot dx$ .

Um aber die Entstehung der zweiten Ableitung aus der ursprünglichen Function  $fx$  anschaulicher darzustellen, betrachte man zunächst die Differenz  $\Delta fx = f(x + \Delta x) - fx$ . — Läßt man in derselben  $x$  nochmals um  $\Delta x$  wachsen, so erhält sie eine Zunahme, welche als Differenz einer Differenz, oder zweite Differenz mit  $\Delta \Delta fx$ , oder kürzer mit  $\Delta^2 fx$  bezeichnet werden kann. Diese Zunahme ist offenbar:

$$\Delta^2 fx = [f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x)] - [f(x + \Delta x) - fx]$$

$$\text{oder} \quad \Delta^2 fx = f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + fx.$$

Dividirt man  $\Delta^2 fx$  mit  $(\Delta x)^2$ , so kommt:

$$\frac{\Delta^2 fx}{(\Delta x)^2} = \frac{\frac{f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x} - \frac{f(x + \Delta x) - fx}{\Delta x}}{\Delta x}.$$

Indem nun die Differenz  $\Delta x$  nur in ihrem Verschwinden betrachtet wird, so geht sie in das Differential  $dx$  über; damit verwandelt sich der Zähler auf der rechten Seite in das Differential von  $f'x$ , und folglich der ganze Quotient auf der rechten Seite in  $\frac{df'x}{dx} = f''x$ . Dies ist also der Werth, welchen der

als  $fx_0$ , folglich sind  $\frac{fx_1 - fx_0}{x_1 - x_0}$  und  $f'x$  beide zugleich positiv.

Wenn aber  $f'x$  überall zwischen den angegebenen Grenzen endlich und negativ ist, so nimmt  $fx$  von  $fx_0$  nach  $fx_1$  hin fortwährend ab; also ist  $\frac{fx_1 - fx_0}{x_1 - x_0}$  negativ, so wie  $f'x$  es ist. —

11. Nun sei  $fx$  eine Function, deren Ableitungen bis zu jeder beliebigen (nten) endliche Werthe haben und als bekannt angesehen werden. Man setze  $x+k=z$ , also  $k=z-x$  und

$$\frac{f(x+k) - fx}{k} = \frac{fz - fx}{z - x} = Q, \quad \text{mithin}$$

$$fz = fx + Q(z-x). \quad a).$$

Der Quotient  $Q$  ist offenbar eine Function der beiden Größen  $x$  und  $z$ , die von einander völlig unabhängig sind, weil  $k$  ganz willkürlich ist. Es ist daher gestattet, nur eine derselben, nämlich  $x$ , als veränderlich, die andere  $z$  aber als beständig anzusehen, so daß  $Q$  eine bloße Function von  $x$  ist. Mit Hülfe der Regeln des §. 5. wird man im Stande sein, beliebige Ableitungen von  $Q$  nach  $x$  zu nehmen, d. h. dieselben durch die Ableitungen von  $fx$  auszudrücken. Um aber übersichtliche Formeln zu erhalten, und namentlich Brüche zu vermeiden, bediene man sich der Gleichung a). Da nämlich  $fz - fx$  und  $Q(z-x)$  zwei ganz identische Functionen sind, so müssen auch ihre Ableitungen, nach  $x$  genommen, während  $z$  als beständig gesetzt wird, identisch sein.

Diese Ableitungen sind  $-f'x$  und  $\frac{dQ}{dx}(z-x) - Q$ ; mithin ist

$$-f'x = \frac{dQ}{dx}(z-x) - Q$$

oder  $Q = fx + \frac{dQ}{dx}(z-x). \quad b).$

Wird dieser Werth von  $Q$  in die Gleichung a) gesetzt, so kommt:

$$fz = fx + f'x(z-x) + \frac{dQ}{dx}(z-x)^2. \quad c).$$

Nimmt man wieder die Ableitungen auf beiden Seiten von b), welche ebenfalls ganz identisch sein müssen, so kommt:

$$\frac{dQ}{dx} = f''x + \frac{d^2Q}{dx^2}(z-x) - \frac{dQ}{dx}, \quad \text{oder}$$

$$2\frac{dQ}{dx} = f''x + \frac{d^2Q}{dx^2}(z-x). \quad d).$$

Dieser Werth von  $\frac{dQ}{dx}$  in c) gesetzt, giebt

$$fz = fx + f'x(z-x) + f''x \frac{(z-x)^2}{2} + \frac{d^2Q}{dx^2} \frac{(z-x)^3}{2}. \quad e).$$

Wird von d) auf's Neue die Ableitung genommen und aus derselben  $\frac{d^2Q}{dx^2}$  entwickelt, so folgt:

$$3\frac{d^2Q}{dx^2} = f'''x + \frac{d^3Q}{dx^3}(z-x), \quad f)$$

welcher Werth in e) gesetzt, giebt

$$fz = fx + f'x \frac{(z-x)}{1} + f''x \frac{(z-x)^2}{1 \cdot 2} + f'''x \frac{(z-x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{d^3Q}{dx^3} \frac{(z-x)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Man ersieht hieraus leicht, nach welcher Regel der Ausdruck für  $fz$  allgemein zu bilden ist. Wird nämlich angenommen, daß  $n\frac{d^{n-1}Q}{dx^n} = f^n x + \frac{d^n Q}{dx^n}(z-x)$  sei, so folgt daraus, indem man die folgende Ableitung nimmt:

$$(n+1)\frac{d^n Q}{dx^n} = f^{n+1}(x) + \frac{d^{n+1}Q}{dx^{n+1}}(z-x),$$

woraus die Allgemeingültigkeit der Annahme sich ergibt. Mit Hülfe dieser Formel folgt dann weiter:

$$fz = fx + f'x \frac{(z-x)}{1!} + f''x \frac{(z-x)^2}{2!} + f'''x \frac{(z-x)^3}{3!} + \dots \\ \dots + f^n x \frac{(z-x)^n}{n!} + \frac{d^n Q}{dx^n} \frac{(z-x)^{n+1}}{n!};$$

denn wenn in dieser Formel der obige Werth von  $\frac{d^n Q}{dx^n}$  gesetzt wird, so erhält man einen neuen Ausdruck für  $fz$ , der aber wieder dieselbe Form hat; mithin ist der vorstehende allgemein.

12. Die Glieder dieses Ausdruckes für  $fz$  befolgen ein leicht faßliches Gesetz, von welchem nur das letzte, der Rest der Reihe, eine Ausnahme macht. Um den Ausdruck für denselben bestimmter zu entwickeln, bilde man die Function

$$\varphi x = \left( C - \frac{d^n Q}{dx^n} \right) (z - x)^{n+1},$$

in welcher  $C$  eine beliebige beständige Größe ist. Nimmt man die Ableitung von  $\varphi x$ , so kommt

$$\varphi' x = \left[ (n+1) \frac{d^n Q}{dx^n} - (z-x) \frac{d^{n+1} Q}{dx^{n+1}} - (n+1)C \right] [z-x]^n,$$

mithin, da  $(n+1) \frac{d^n Q}{dx^n} = \frac{d^{n+1} Q}{dx^{n+1}} (z-x) + f^{n+1}(x)$  war,

$$\varphi' x = [f^{n+1}(x) - (n+1)C] [z-x]^n.$$

Es wird angenommen, daß die sämtlichen Ableitungen  $f'x$ ,  $f''x$ , u. s. f. bis  $f^{n+1}(x)$  an und zwischen den Grenzen  $x$  und  $z = x + k$  nur endliche bestimmte Werthe haben. Es sei  $G$  der größte,  $K$  der kleinste Werth von  $f^{n+1}(x)$ , zwischen diesen Grenzen. Setzt man  $(n+1)C = G$ , so wird die Differenz  $f^{n+1}(x) - G$  für alle zwischen den angenommenen Grenzen befindlichen Werthe von  $x$  negativ sein, und da zugleich  $z - x$  für alle diese Werthe von  $x$  (indem  $z$  unverändert bleibt) sein Zeichen nicht ändert; so wird auch  $\varphi' x$  beständig dasselbe Zeichen behalten. — Wird dagegen  $(n+1)C = K$  gesetzt, so wird  $f^{n+1}(x) - K$  fortwährend positiv sein, mithin  $\varphi' x$  gleichfalls ein beständiges, dem vorigen aber entgegengesetztes Zeichen haben. Daher wird, nach dem Satze §. 10. die Function  $\frac{\varphi z - \varphi x}{z - x}$  entgegengesetzte Zeichen erhalten, wenn man das eine

Mal in demselben  $C = \frac{G}{n+1}$ , das andere Mal  $C = \frac{K}{n+1}$  setzt.

Da aber  $\varphi z = 0$  ist, so folgt, daß  $-\frac{\varphi x}{z-x}$  unter dieser doppelten Annahme entgegengesetzte Zeichen erhält, mithin daß endlich die beiden, diesen Annahmen entsprechenden, Ausdrücke von  $\varphi x$ ,

$$\left(\frac{G}{n+1} - \frac{d^n Q}{dx^n}\right)(z-x)^{n+1} \quad \text{und} \quad \left(\frac{K}{n+1} - \frac{d^n Q}{dx^n}\right)(z-x)^{n+1}$$

entgegengesetzte Zeichen haben. Daher liegt die Größe

$(n+1)\frac{d^n Q}{dx^n}$  nothwendig zwischen  $G$  und  $K$ , d. h. zwischen dem

größten und dem kleinsten Werthe von  $f^{n+1}(x)$ , der sich innerhalb der angenommenen Grenzen befindet. Indem nun  $f^{n+1}(x)$  eine stetige Function ist, so wird es zwischen  $x$  und  $z = x+k$  wenigstens einen Werth  $x'$  geben, für welchen genau

$(n+1)\frac{d^n Q}{dx^n} = f^{n+1}(x')$  wird, und dieser Werth sich durch

$x + \Theta k$  bezeichnen lassen, wenn unter  $\Theta$  eine Größe verstanden wird, die nicht außerhalb der Grenzen 0 und 1 fallen kann.

Daher erhält man  $(n+1)\frac{d^n Q}{dx^n} = f^{n+1}(x + \Theta k)$ , und zugleich,

wenn man in der obigen Reihe für  $fz$ ,  $x+k$  statt  $z$  und  $k$  statt  $z-x$  schreibt:

$$f(x+k) = fx + kf'x + \frac{k^2}{2} f''x + \dots + \frac{k^n}{n!} f^n x \\ + \frac{k^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(x + \Theta k), \quad (\Theta \geq 0, \leq 1),$$

eine Reihe, welche immer gilt, wenn die sämtlichen Ableitungen von  $fx$ , bis zur  $n+1$ ten, für die Werthe  $x$  und  $x+k$  und alle zwischen ihnen befindlichen, endlich und stetig sind. —

Der Ausdruck für den Rest der Reihe läßt sich noch auf eine andere Art darstellen. Man bezeichne diesen Rest, der als eine Function von  $x$  betrachtet werden kann, in so fern  $z$  unveränderlich gedacht wird, mit  $\varphi x$ , und setze demnach:



Wenn man in dieser Formel den obigen Werth von  $\frac{d^n Q}{dx^n}$  gesetzt wird, so erhält man einen neuen Ausdruck für  $fz$ , der aber wieder dieselbe Form hat; mithin ist der vorstehende allgemein.

12. Die Glieder dieses Ausdruckes für  $fz$  befolgen ein leicht faßliches Gesetz, von welchem nur das letzte, der Rest der Reihe, eine Ausnahme macht. Um den Ausdruck für denselben bestimmter zu entwickeln, bilde man die Function

$$\varphi x = \left( C - \frac{d^n Q}{dx^n} \right) (z-x)^{n+1},$$

in welcher  $C$  eine beliebige beständige Größe ist. Nimmt man die Ableitung von  $\varphi x$ , so kommt

$$\varphi' x = \left[ (n+1) \frac{d^n Q}{dx^n} - (z-x) \frac{d^{n+1} Q}{dx^{n+1}} - (n+1)C \right] [z-x]^n,$$

mithin, da  $(n+1) \frac{d^n Q}{dx^n} = \frac{d^{n+1} Q}{dx^{n+1}} (z-x) + f^{n+1}(x)$  war,

$$\varphi' x = [f^{n+1}(x) - (n+1)C] [z-x]^n.$$

Es wird angenommen, daß die sämtlichen Ableitungen  $f'x$ ,  $f''x$ , u. s. f. bis  $f^{n+1}(x)$  an und zwischen den Grenzen  $x$  und  $z = x + k$  nur endliche bestimmte Werthe haben. Es sei  $G$  der größte,  $K$  der kleinste Werth von  $f^{n+1}(x)$ , zwischen diesen Grenzen. Setzt man  $(n+1)C = G$ , so wird die Differenz  $f^{n+1}(x) - G$  für alle zwischen den angenommenen Grenzen befindlichen Werthe von  $x$  negativ sein, und da zugleich  $z-x$  für alle diese Werthe von  $x$  (indem  $z$  unverändert bleibt) sein Zeichen nicht ändert; so wird auch  $\varphi' x$  beständig dasselbe Zeichen behalten. — Wird dagegen  $(n+1)C = K$  gesetzt, so wird  $f^{n+1}(x) - K$  fortwährend positiv sein, mithin  $\varphi' x$  gleichfalls ein beständiges, dem vorigen aber entgegengesetztes Zeichen haben. Daher wird, nach dem Satze §. 10. die Function  $\frac{\varphi z - \varphi x}{z - x}$  entgegengesetzte Zeichen erhalten, wenn man das eine

Mal in demselben  $C = \frac{G}{n+1}$ , das andere Mal  $C = \frac{K}{n+1}$  setzt.

Da aber  $\varphi z = 0$  ist, so folgt, daß  $-\frac{\varphi x}{z-x}$  unter dieser doppelten Annahme entgegengesetzte Zeichen erhält, mithin daß endlich die beiden, diesen Annahmen entsprechenden, Ausdrücke von  $\varphi x$ ,

$$\left(\frac{G}{n+1} - \frac{d^n Q}{dx^n}\right)(z-x)^{n+1} \quad \text{und} \quad \left(\frac{K}{n+1} - \frac{d^n Q}{dx^n}\right)(z-x)^{n+1}$$

entgegengesetzte Zeichen haben. Daher liegt die Größe

$$(n+1) \frac{d^n Q}{dx^n} \text{ nothwendig zwischen } G \text{ und } K, \text{ d. h. zwischen dem}$$

größten und dem kleinsten Werthe von  $f^{n+1}(x)$ , der sich innerhalb der angenommenen Grenzen befindet. Indem nun  $f^{n+1}(x)$  eine stetige Function ist, so wird es zwischen  $x$  und  $z = x+k$  wenigstens einen Werth  $x'$  geben, für welchen genau

$$(n+1) \frac{d^n Q}{dx^n} = f^{n+1}(x') \text{ wird, und dieser Werth sich durch}$$

$x + \Theta k$  bezeichnen lassen, wenn unter  $\Theta$  eine Größe verstanden wird, die nicht außerhalb der Grenzen 0 und 1 fallen kann.

$$\text{Daher erhält man } (n+1) \frac{d^n Q}{dx^n} = f^{n+1}(x + \Theta k), \text{ und zugleich,}$$

wenn man in der obigen Reihe für  $fz$ ,  $x+k$  statt  $z$  und  $k$  statt  $z-x$  schreibt:

$$f(x+k) = fx + kf'x + \frac{k^2}{2} f''x + \dots + \frac{k^n}{n!} f^n x \\ + \frac{k^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(x + \Theta k), \quad (\Theta \geq 0, \leq 1),$$

eine Reihe, welche immer gilt, wenn die sämtlichen Ableitungen von  $fx$ , bis zur  $n+1$ ten, für die Werthe  $x$  und  $x+k$  und alle zwischen ihnen befindlichen, endlich und stetig sind. —

Der Ausdruck für den Rest der Reihe läßt sich noch auf eine andere Art darstellen. Man bezeichne diesen Rest, der als eine Function von  $x$  betrachtet werden kann, in so fern  $z$  unveränderlich gedacht wird, mit  $\varphi x$ , und setze demnach:

$$fz = fx + (z-x)f'x + \frac{(z-x)^2}{2}f''x + \dots + \frac{(z-x)^n}{n!}f^{(n)}x + \varphi x.$$

Die Function  $\varphi x$  hat erstens die Eigenschaft, daß sie für  $x=z$  verschwindet, wie offenbar zu sehen ist. Ferner wenn man von vorstehender Reihe die Ableitung nach  $x$  nimmt, dabei aber  $z$  als unveränderlich ansieht, so heben sich die Ableitungen von  $fx$ , bis auf eine, gegen einander auf, und man erhält, wie eine sehr leichte Rechnung lehrt:

$$\varphi'x + \frac{(z-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x) = 0, \quad 1)$$

wodurch der Werth von  $\varphi'x$  gegeben ist. Weiter aber hat man

$$\varphi z = \varphi(x + z - x) = \varphi x + (z-x)\varphi'(x + \lambda(z-x)),$$

wenn unter  $\lambda$  eine Zahl verstanden wird, die nicht außerhalb der Grenzen 0 und 1 liegen kann, eben so wie früher  $\odot$ ; und da  $\varphi z = 0$ , so erhält man:

$$\varphi x = -(z-x)\varphi'(x + \lambda(z-x)).$$

Man schreibe jetzt zur Abkürzung  $y$  statt  $x + \lambda(z-x)$ ,

so ist  $\varphi x = -(z-x)\varphi'y$ . 2).

Setzt man aber in der Gleichung 1)  $y$  statt  $x$ , so ergibt sich

$$\varphi'y = -\frac{(z-y)^n}{n!}f^{(n+1)}(y);$$

mithin aus 2)  $\varphi x = +\frac{(z-x)(z-y)^n}{n!}f^{(n+1)}(y)$ . 3)

Nun setze man  $k$  statt  $z-x$ , also  $x + \lambda k$  statt  $y$ , und bemerke, daß

$$(z-x)(z-y)^n = k(z-x-\lambda k)^n = k^{n+1}(1-\lambda)^n \quad \text{ist,}$$

so folgt aus 3)  $\varphi x = \frac{k^{n+1}}{n!}(1-\lambda)^nf^{(n+1)}(x + \lambda k),$

welches der neue Ausdruck des Restes ist. Demnach hat man:

$$f(x+k) = fx + kf'x + \frac{k^2}{2!}f''x + \frac{k^3}{3!}f'''x + \dots$$

$$\dots + \frac{k^n}{n!}f^{(n)}x + \frac{k^{n+1}}{n!}(1-\lambda)^nf^{(n+1)}(x + \lambda k).$$

Wenn sich nachweisen läßt, daß einer der beiden angegebenen Restausdrücke, nämlich

$$\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(x+\Theta k) \quad \text{oder} \quad \frac{k^{n+1}}{n!} (1-\lambda)^n f^{n+1}(x+\lambda k)$$

mit wachsendem  $n$  sich der Null nähert, so kann man setzen:

$$f(x+k) = fx + kf'x + \frac{k^2}{2} f''x + \dots + \frac{k^n}{n!} f^n x + \dots \text{ in inf.,}$$

d. man kann  $f(x+k)$  in eine Reihe nach Potenzen von  $k$  entwickeln, und die Summe der  $n$  ersten Glieder der Reihe wird der ganzen Summe  $f(x+k)$  desto genauer gleich kommen, je größer  $n$  genommen wird; oder die Reihe ist convergent. — Wenn insbesondere  $fx$  und dessen sämtliche Ableitungen für  $x=0$  endliche Werthe behalten, welche durch  $f0, f'0, f''0, \text{ u. f. f.}$  bezeichnet werden, so läßt  $fx$  in eine Reihe nach Potenzen von  $x$  entwickeln, indem man  $x=0$  setzt, und statt  $k, x$  schreibt, nämlich:

$$fx = f0 + xf'0 + \frac{x^2}{2} f''0 + \dots + \frac{x^n}{n!} f^n 0 + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\Theta x).$$

Die obige unendliche Reihe für  $f(x+k)$  heißt die Taylorsche. Sie bedarf im Allgemeinen der Hinzufügung des Restes, dessen Ausdruck Lagrange gefunden hat. Die hier befolgte Herleitung derselben ist von Ampère, die des zweiten Rest-Ausdrucks von Cauchy gegeben worden. Die Reihe ist für die gesamte Analysis von der größten Wichtigkeit. —

13. Es sei  $fx = x^n$ , so ist  $f'x = nx^{n-1}$ , allgemein  $f^m(x) = m! \cdot n_m x^{n-m}$ , (§. 9.); mithin erhält man nach dem Taylorschen Satze, wenn der Rest vorläufig durch  $R$  angedeutet wird, folgende Reihe, welche die binomische Reihe genannt wird:

$$(x+k)^n = x^n + n_1 x^{n-1} k + n_2 x^{n-2} k^2 + \dots + n_m x^{n-m} k^m + R.$$

In dieser Reihe werde sofort  $x=1$ , gesetzt, und statt  $k, x$  geschrieben; so bleiben die sämtlichen Ableitungen von  $x^n$ , für  $x=1$ , offenbar endliche bestimmte Größen, und es ergibt sich:

$$(1+x)^n = 1 + n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3 + \dots + n_m x^m + R.$$

Der Rest kann entweder nach der ersten, oder nach der zweiten Formel ausgedrückt werden. Die erste giebt

$$R = n_{m+1}(1 + \odot x)^{n-m-1} x^{m+1},$$

die zweite  $R = (m+1)n_{m+1}(1-\lambda)^m(1+\lambda x)^{n-m-1} x^{m+1}.$

Man setze  $\frac{(1-\lambda)x}{1+\lambda x} = u$ , und  $(1+\lambda x)^{n-1} x = P$ , so wird der zweite Ausdruck, indem man zugleich  $(n-m)n_m$  für  $(m+1)n_{m+1}$ , setzt:

$$R = (n-m)n_m u^m \cdot P.$$

Nun ist  $u = x \left(1 - \frac{\lambda + \lambda x}{1 + \lambda x}\right)$  offenbar ein echter Bruch, so lange  $x$  ein solcher ist; und zwar liegt  $u$  immer zwischen 0 und  $x$ , welchen Werth, zwischen 0 und 1,  $\lambda$  auch haben mag; also ist der positive Werth des Restes nothwendig kleiner als der von  $(n-m)n_m x^m \cdot P$ , wenn man  $x^m$  für  $u^m$  schreibt. Man hat ferner

$$(n-m)n_m x^m =$$

$$n \cdot \frac{(n-1)x}{1} \cdot \frac{(n-2)x}{2} \dots \frac{(n-\mu)x}{\mu} \cdot \frac{(n-\mu-1)x}{\mu+1} \dots \frac{(n-m)x}{m}.$$

In diesem Producte kann  $\mu$  immer so angenommen werden, daß  $\frac{(n-\mu)x}{\mu} = -x \left(1 - \frac{n}{\mu}\right)$ , so wie alle nachfolgende Factoren

des Productes ächte Brüche werden; und die letzten dieser Brüche nähern sich dem Werthe von  $x$  desto mehr, je größer  $m$  genommen wird. Es sei daher  $v$  der größte unter den  $m-\mu+1$

ächten Brüchen von  $\frac{(n-\mu)x}{\mu}$  bis  $\frac{(n-m)x}{m}$ , abgesehen

von dem Zeichen derselben; so ist ihr Product, ebenfalls ohne Rücksicht auf das Zeichen, kleiner als  $v^{m-\mu+1}$ , und nähert sich daher noch mehr, als diese Potenz, mit wachsendem  $m$ , der Null. Da nun  $P$  fortwährend, wie auch  $m$  wachse, eine endliche Größe bleibt, so nähert sich das Product  $(n-m)n_m x^m \cdot P$  mit wachsendem  $m$  der Null; um so mehr nähert sich also der Rest  $R$

der Null, oder die Reihe für  $(1+x)^n$  convergirt, wenn sich  $x$  innerhalb der Grenzen  $+1$  und  $-1$  befindet.

Anmerkung. Wenn  $n$  ein Bruch ist, so ist  $(1+x)^n$  eine mehrdeutige Größe. Die vorstehende Reihe giebt nur den einen (positiven) Werth, welcher Statt findet, in so fern  $1^n = 1$  gesetzt wird. Vgl. §. 25.

14. Wird der Ausdruck  $A = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$  nach dem binomischen Satze entwickelt, so findet man

$$A = 1 + m \cdot \frac{1}{m} + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{m}\right)^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{m}\right)^3 + \dots + R$$

$$= 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \frac{1}{3!} + \dots + R.$$

Die vorstehende Reihe bricht nothwendig ab, wenn  $m$  eine positive ganze Zahl ist. Ist diese Zahl aber beträchtlich groß, so läßt sich zeigen, daß man sich dem Werthe von  $A$  beliebig annähern kann, wenn man nur eine hinreichende Anzahl ( $n$ ) von Gliedern der Reihe, vom ersten an, in Rechnung bringt; welche Anzahl  $n$  viel kleiner sein darf als  $m$ . Man schreibe nämlich den weggelassenen Rest  $R$  wie folgt:

$$R = \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{m}\right) \frac{1}{n!} \cdot S, \text{ wo } S =$$

$$1 + \left(1 - \frac{n}{m}\right) \frac{1}{n+1} + \left(1 - \frac{n}{m}\right) \left(1 - \frac{n+1}{m}\right) \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots$$

Da die Differenzen  $1 - \frac{1}{m}$ ,  $1 - \frac{2}{m}$ , u. s. f. alle zwischen 0 und 1 liegen, so ist der vorstehende Rest offenbar kleiner, als der Werth, welchen man erhält, wenn man statt dieser Differenzen überall 1 setzt. Daher ist auch um so mehr

$$R < \frac{1}{n!} \left[ 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right]$$

und folglich, wenn man sich die geometrische Progression in den Klammern bis in das Unendliche fortgesetzt denkt und sie sum-

nirt, so findet man  $R < \frac{1}{n!} \frac{n+1}{n}$ . Wenn nun die Zahl  $m$  sehr groß gedacht wird, so kann  $n$  als beliebig klein, gegen  $m$ , angesehen werden; also nähern sich mit zunehmendem  $m$  die Brüche  $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, \frac{n}{m}$  der Null, und folglich  $A$  der Summe:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!}.$$

Der Fehler, welcher begangen wird, wenn der Werth von  $A$ , für  $m = \infty$ , dieser Summe gleichgesetzt wird, ist positiv und kleiner als  $\frac{1}{n!} \cdot \frac{n+1}{n}$ ; nähert sich also mit wachsendem  $n$  der Null.

Daher erhält man, für ein unendlich großes  $m$ :

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \text{ in inf.}$$

Die Reihe rechts liefert offenbar einen endlichen bestimmten Werth, der mit  $e$  bezeichnet wird; man findet leicht  $e = 2,7182818..$

Ist  $m$  keine ganze Zahl, so schreibe man  $m + \alpha$  statt  $m$ , wo  $\alpha$  ein positiver echter Bruch und  $m$  wieder eine ganze Zahl ist.

Alsdann liegt offenbar  $1 + \frac{1}{m+\alpha}$  zwischen  $1 + \frac{1}{m}$  und  $1 + \frac{1}{m+1}$ ; also  $\left(1 + \frac{1}{m+\alpha}\right)^m$  zwischen  $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$  und

$$\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^m = \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{m+1}};$$

beide Grenzen nähern sich dem nämlichen Werthe  $e$ , mit wachsendem  $m$ ; folglich nähert sich auch

$$\left(1 + \frac{1}{m+\alpha}\right)^{m+\alpha} = \left(1 + \frac{1}{m+\alpha}\right)^m \left(1 + \frac{1}{m+\alpha}\right)^\alpha$$

mit wachsendem  $m$  dem Werthe  $e$ . Also nähert sich immer  $A$  dem Werthe  $e$ , sobald  $m$  sehr groß ist.

15. Entwickelt man ferner den Ausdruck  $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mk}$  nach dem binomischen Lehrsatz, so kommt:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mk} &= \\ 1 + k + \frac{mk \cdot mk-1}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{m}\right)^2 + \frac{mk \cdot mk-1 \cdot mk-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{m}\right)^3 + \dots \\ &= 1 + k + \left(k - \frac{1}{m}\right) \frac{k}{2!} + \left(k - \frac{1}{m}\right) \left(k - \frac{2}{m}\right) \frac{k}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Zieht man auf beiden Seiten die Einheit ab, dividirt durch  $k$ , und setzt  $k=0$ , so kommt

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mk} - 1}{k} = 1 - \frac{1}{2m} + \frac{1}{3m^2} - \frac{1}{4m^3} + \dots$$

für  $k=0$ . Je größer  $m$  wird, desto genauer erhält man auf der rechten Seite 1, auf der linken  $e$  statt  $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ ; also ist  $\frac{e^k - 1}{k} = 1$ , für  $k=0$ .

Nun ist  $\frac{e^{x+k} - e^x}{k} = e^x \left[ \frac{e^k - 1}{k} \right] = e^x$  für  $k=0$ , also ist  $e^x$  die Ableitung von  $e^x$ , oder  $d(e^x) = e^x dx$ . Hieraus erhält man zufolge der letzten Reihe in §. 12.:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + R.$$

Der Rest ist  $\frac{e^{\theta x} \cdot x^n}{n!}$ , und nähert sich offenbar, für jedes  $x$ , mit wachsendem  $n$  der Null (vgl. die Bemerkung über den Ausdruck  $\frac{x^n}{n!}$  in §. 18.); d. h. die Reihe convergirt für jeden Werth von  $x$ .

Entwickelt man den Ausdruck  $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$  nach dem binomischen Lehrsatz, und setzt hierauf  $m$  unendlich groß; so erhält man genau die nämliche Reihe, wie die vorstehende für  $e^x$ ; daher ist  $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x$ , für  $m=\infty$ .

16. Nun sei  $e^x = y$ , so heißt  $x$  der Logarithmus von  $y$ , zur Grundzahl  $e$ , häufig auch der natürliche Logarithmus, welcher durch  $\log$  bezeichnet werden soll, so daß, wenn  $y = e^x$ ,



Der Rest kann entweder nach der ersten, oder nach der zweiten Formel ausgedrückt werden. Die erste giebt

$$R = n_{m+1}(1 + \lambda x)^{n-m-1} x^{m+1},$$

die zweite  $R = (m+1)n_{m+1}(1-\lambda)^m(1+\lambda x)^{n-m-1} x^{m+1}.$

Man setze  $\frac{(1-\lambda)x}{1+\lambda x} = u$ , und  $(1+\lambda x)^{n-1} x = P$ , so wird der zweite Ausdruck, indem man zugleich  $(n-m)n_m$  für  $(m+1)n_{m+1}$ , setzt:

$$R = (n-m)n_m u^m \cdot P.$$

Nun ist  $u = x \left(1 - \frac{\lambda + \lambda x}{1 + \lambda x}\right)$  offenbar ein echter Bruch, so lange  $x$  ein solcher ist; und zwar liegt  $u$  immer zwischen 0 und  $x$ , welchen Werth, zwischen 0 und 1,  $\lambda$  auch haben mag; also ist der positive Werth des Restes nothwendig kleiner als der von  $(n-m)n_m x^m \cdot P$ , wenn man  $x^m$  für  $u^m$  schreibt. Man hat ferner

$$(n-m)n_m x^m =$$

$$n \cdot \frac{(n-1)x}{1} \cdot \frac{(n-2)x}{2} \dots \frac{(n-\mu)x}{\mu} \cdot \frac{(n-\mu-1)x}{\mu+1} \dots \frac{(n-m)x}{m}.$$

In diesem Producte kann  $\mu$  immer so angenommen werden, daß  $\frac{(n-\mu)x}{\mu} = -x \left(1 - \frac{n}{\mu}\right)$ , so wie alle nachfolgende Factoren

des Productes echte Brüche werden; und die letzten dieser Brüche nähern sich dem Werthe von  $x$  desto mehr, je größer  $m$  genommen wird. Es sei daher  $v$  der größte unter den  $m-\mu+1$

echten Brüchen von  $\frac{(n-\mu)x}{\mu}$  bis  $\frac{(n-m)x}{m}$ , abgesehen

von dem Zeichen derselben; so ist ihr Product, ebenfalls ohne Rücksicht auf das Zeichen, kleiner als  $v^{m-\mu+1}$ , und nähert sich daher noch mehr, als diese Potenz, mit wachsendem  $m$  der Null. Da nun  $P$  fortwährend, wie auch  $m$  wachse, eine endliche Größe bleibt, so nähert sich das Product  $(n-m)n_m x^m \cdot P$  mit wachsendem  $m$  der Null; um so mehr nähert sich also der Rest  $R$

der Null, oder die Reihe für  $(1+x)^n$  convergirt, wenn sich  $x$  innerhalb der Grenzen  $+1$  und  $-1$  befindet.

Anmerkung. Wenn  $n$  ein Bruch ist, so ist  $(1+x)^n$  eine mehrdeutige Größe. Die vorstehende Reihe giebt nur den einen (positiven) Werth, welcher Statt findet, in so fern  $1^n = 1$  gesetzt wird. Vgl. §. 25.

14. Wird der Ausdruck  $A = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$  nach dem binomischen Satze entwickelt, so findet man

$$\begin{aligned} A &= 1 + m \cdot \frac{1}{m} + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{m}\right)^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{m}\right)^3 + \dots + R \\ &= 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \frac{1}{3!} + \dots + R. \end{aligned}$$

Die vorstehende Reihe bricht nothwendig ab, wenn  $m$  eine positive ganze Zahl ist. Ist diese Zahl aber beträchtlich groß, so läßt sich zeigen, daß man sich dem Werthe von  $A$  beliebig annähern kann, wenn man nur eine hinreichende Anzahl ( $n$ ) von Gliedern der Reihe, vom ersten an, in Rechnung bringt; welche Anzahl  $n$  viel kleiner sein darf als  $m$ . Man schreibe nämlich den weggelassenen Rest  $R$  wie folgt:

$$\begin{aligned} R &= \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{m}\right) \frac{1}{n!} \cdot S, \text{ wo } S = \\ &= 1 + \left(1 - \frac{n}{m}\right) \frac{1}{n+1} + \left(1 - \frac{n}{m}\right) \left(1 - \frac{n+1}{m}\right) \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots \end{aligned}$$

Da die Differenzen  $1 - \frac{1}{m}$ ,  $1 - \frac{2}{m}$ , u. s. f. alle zwischen 0 und 1 liegen, so ist der vorstehende Rest offenbar kleiner, als der Werth, welchen man erhält, wenn man statt dieser Differenzen überall 1 setzt. Daher ist auch um so mehr

$$R < \frac{1}{n!} \left[ 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right]$$

und folglich, wenn man sich die geometrische Progression in den Klammern bis in das Unendliche fortgesetzt denkt und sie sum-

mirt, so findet man  $R < \frac{1}{n!} \frac{n+1}{n}$ . Wenn nun die Zahl  $m$  sehr groß gedacht wird, so kann  $n$  als beliebig klein, gegen  $m$ , angesehen werden; also nähern sich mit zunehmendem  $m$  die Brüche  $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, \frac{n}{m}$  der Null, und folglich  $A$  der Summe:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!}.$$

Der Fehler, welcher begangen wird, wenn der Werth von  $A$ , für  $m = \infty$ , dieser Summe gleichgesetzt wird, ist positiv und kleiner als  $\frac{1}{n!} \frac{n+1}{n}$ ; nähert sich also mit wachsendem  $n$  der Null.

Daher erhält man, für ein unendlich großes  $m$ :

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \text{ in inf.}$$

Die Reihe rechts liefert offenbar einen endlichen bestimmten Werth, der mit  $e$  bezeichnet wird; man findet leicht  $e = 2,7182818..$

Ist  $m$  keine ganze Zahl, so schreibe man  $m + \alpha$  statt  $m$ , wo  $\alpha$  ein positiver echter Bruch und  $m$  wieder eine ganze Zahl ist.

Alsdann liegt offenbar  $1 + \frac{1}{m+\alpha}$  zwischen  $1 + \frac{1}{m}$  und  $1 + \frac{1}{m+1}$ ; also  $\left(1 + \frac{1}{m+\alpha}\right)^m$  zwischen  $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$  und

$$\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^m = \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{m+1}};$$

beide Grenzen nähern sich dem nämlichen Werthe  $e$ , mit wachsendem  $m$ ; folglich nähert sich auch

$$\left(1 + \frac{1}{m+\alpha}\right)^{m+\alpha} = \left(1 + \frac{1}{m+\alpha}\right)^m \left(1 + \frac{1}{m+\alpha}\right)^\alpha$$

mit wachsendem  $m$  dem Werthe  $e$ . Also nähert sich immer  $A$  dem Werthe  $e$ , sobald  $m$  sehr groß ist.

15. Entwickelt man ferner den Ausdruck  $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mh}$  nach dem binomischen Lehrsatz, so kommt:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mk} &= \\ 1 + k + \frac{mk \cdot mk-1}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{m}\right)^2 + \frac{mk \cdot mk-1 \cdot mk-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{m}\right)^3 + \dots \\ &= 1 + k + \left(k - \frac{1}{m}\right) \frac{k}{2!} + \left(k - \frac{1}{m}\right) \left(k - \frac{2}{m}\right) \frac{k}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Zieht man auf beiden Seiten die Einheit ab, dividirt durch  $k$ , und setzt  $k=0$ , so kommt

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mk} - 1}{k} = 1 - \frac{1}{2m} + \frac{1}{3m^2} - \frac{1}{4m^3} + \dots$$

für  $k=0$ . Je größer  $m$  wird, desto genauer erhält man auf der rechten Seite 1, auf der linken  $e$  statt  $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ ; also ist  $\frac{e^k - 1}{k} = 1$ , für  $k=0$ .

Nun ist  $\frac{e^{x+k} - e^x}{k} = e^x \left[ \frac{e^k - 1}{k} \right] = e^x$  für  $k=0$ , also

ist  $e^x$  die Ableitung von  $e^x$ , oder  $d(e^x) = e^x dx$ . Hieraus erhält man zufolge der letzten Reihe in §. 12.:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + R.$$

Der Rest ist  $\frac{e^{\theta x} \cdot x^n}{n!}$ , und nähert sich offenbar, für jedes  $x$ , mit wachsendem  $n$  der Null (vgl. die Bemerkung über den Ausdruck  $\frac{x^n}{n!}$  in §. 18.); d. h. die Reihe convergirt für jeden Werth von  $x$ .

Entwickelt man den Ausdruck  $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$  nach dem binomischen Lehrsatz, und setzt hierauf  $m$  unendlich groß; so erhält man genau die nämliche Reihe, wie die vorstehende für  $e^x$ ; daher ist  $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x$ , für  $m=\infty$ .

16. Nun sei  $e^x = y$ , so heißt  $x$  der Logarithmus von  $y$ , zur Grundzahl  $e$ , häufig auch der natürliche Logarithmus, welcher durch  $\log$  bezeichnet werden soll, so daß, wenn  $y = e^x$ ,

$x = \log y$  ist. Da ferner  $dy = e^x dx$ , so ist auch  $\frac{dy}{y} = dx = d \log y$ ; also  $d \log x = \frac{dx}{x}$ . Hierdurch erhält man die Ableitungen von  $\log x$

der Reihe nach  $\frac{1}{x}$ ,  $-\frac{1}{x^2}$ ,  $+\frac{2}{x^3}$ ,  $-\frac{3!}{x^4}$ , u. s. f., die  $n$ te  $(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$ ; mithin, nach dem Taylorschen Satze, wenn

wieder der zweite Ausdruck des Restes benutzt wird:

$$\log(x+k) = \log x + \frac{k}{x} - \frac{k^2}{2x^2} + \frac{k^3}{3x^3} - \frac{k^4}{4x^4} + \dots \\ + (-1)^{n-1} \frac{(1-\lambda)^{n-1} k^n}{(x+\lambda k)^n}.$$

Wird  $x=1$ ,  $k=x$  gesetzt, so kommt, da  $\log 1=0$ ,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(1-\lambda)^{n-1} x^n}{(1+\lambda x)^n}.$$

In diesen Formeln bezeichnet  $\lambda$  immer einen positiven ächten Bruch (oder auch 0 oder 1); aber keinesweges denselben in beiden. Die Reihe convergirt, so lange  $x$  ein ächter Bruch ist. Es läßt sich aber daraus eine Reihe für  $\log x$  erhalten, die immer convergent gemacht werden kann. Nämlich man setze  $x=y^m$ , so wird  $\log x = m \log y$ , also

$$\log x = m \log(1+y-1) = m \left[ y-1 - \frac{(y-1)^2}{2} + \dots \right] = \\ m(y-1) \left[ 1 - \frac{y-1}{2} + \frac{(y-1)^2}{3} - \frac{(y-1)^3}{4} \dots \right].$$

Es wird vorausgesetzt, daß  $x$  positiv ist. Nimmt man nun für  $m$  eine sehr hohe Potenz von 2,  $m=2^n$ , so kann  $y=x^{\frac{1}{2^n}}$  durch  $n$ maliges Ausziehen der Quadratwurzel aus  $x$  der Einheit, also  $y-1$  der Null beliebig genähert werden, daher die vorstehende Reihe rasch convergiren muß. Denkt man sich  $m$  unendlich groß, so wird  $1 - \frac{y-1}{2} + \frac{(y-1)^2}{3} \dots = 1$ , indem  $y-1=0$ , und man erhält

$$\log x = m(y-1) = m\left(x^{\frac{1}{m}} - 1\right),$$

für ein unendliches  $m$ . Oben war gefunden  $e^x = \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ ;

wird  $x = \log y$ ,  $y = e^x$  gesetzt, so kommt  $y = \left(1 + \frac{\log y}{m}\right)^m$ ;

übereinstimmend mit der Formel  $\log y = m\left(y^{\frac{1}{m}} - 1\right)$  die so eben gefunden worden ist. Man hat also für  $e^x$  und  $\log x$  die beiden merkwürdigen Ausdrücke:  $e^x = \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$  und

$\log x = m\left(x^{\frac{1}{m}} - 1\right)$ , für  $m = \infty$ , welche eine Vergleichung dieser Functionen mit den algebraischen Functionen gewähren, indem sich, ihnen gemäß,  $e^x$  als eine Potenz von unendlich großem,  $\log x$  als eine Potenz von unendlich kleinem Exponenten betrachten läßt.

Sehr brauchbare Reihen zur Berechnung der natürlichen Logarithmen erhält man auf folgende Weise. In der Reihe  $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$  schreibe man  $-x$  statt  $x$ , so kommt  $\log(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \dots$ ; mithin durch Subtraction:

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + \dots\right].$$

Man setze  $\frac{1+x}{1-x} = \frac{z+k}{z}$ , so wird  $x = \frac{k}{2z+k}$  und

$$\log\left(\frac{z+k}{z}\right) = 2\left[\frac{k}{2z+k} + \frac{1}{3}\left(\frac{k}{2z+k}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{k}{2z+k}\right)^5 + \dots\right],$$

oder:

$$\log(z+k) = \log z + 2\left[\frac{k}{2z+k} + \frac{1}{3}\left(\frac{k}{2z+k}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{k}{2z+k}\right)^5 + \dots\right].$$

Wird in dieser Reihe  $z=1$ ,  $k=1$  gesetzt, so kommt

$$\log 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \dots\right];$$

für  $z=2$ ,  $k=1$ , kommt

$$\log 3 = \log 2 + 2\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \dots\right];$$

für  $z=4$ ,  $k=1$ ,

$$\log 5 = 2 \log 2 + 2 \left[ \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{9} \right)^2 + \frac{1}{5} \left( \frac{1}{9} \right)^3 + \frac{1}{7} \left( \frac{1}{9} \right)^4 + \dots \right].$$

Um von den natürlichen Logarithmen zu den gewöhnlichen, deren Grundzahl 10 ist, überzugehen, berechne man

$$\log_{\text{nat}} 10 = \log_{\text{nat}} 2 + \log_{\text{nat}} 5 = 2,302585093 \dots$$

Man setze ferner  $M = \frac{1}{\log_{\text{nat}} 10} = 0,43429448 \dots$ , so ist all-

gemein  $\log_{\text{vulg}} x = M \cdot \log_{\text{nat}} x$ . — Soll endlich die Function  $a^x$  differentiirt werden, in welcher  $a$  verschieden von  $e$ , aber positiv ist, so setze man  $e^b = a$ , also  $b = \log a$ ; dadurch wird  $a^x = e^{bx}$ , und  $d(a^x) = d(e^{bx}) = e^{bx} b dx = a \log a \cdot dx$ . —

17. Um die Ableitungen der trigonometrischen Functionen  $\sin x$  und  $\cos x$  zu finden, könnte man sich zwar der aus der Trigonometrie bekannten Eigenschaften derselben bedienen; da aber hierdurch die Untersuchung zum Theil auf geometrische Betrachtungen gegründet werden würde, so ist vorzuziehen, von den trigonometrischen Functionen rein analytische Definitionen zu geben, nachher aber deren Uebereinstimmung mit den bekannten Constructionen nachzuweisen. Dieses Verfahren wird auch als Beispiel der Untersuchung des Ganges einer Function dienen können. — In der Reihe für  $e^x$  (§. 15.) schreibe man  $xi$  statt  $x$ , wo  $i$  die positive imaginäre Einheit  $\sqrt{-1}$  bedeutet. Die auf diese Weise entstehende Reihe wird sich, nach der Analogie, durch  $e^{xi}$  bezeichnen lassen, so daß die Reihe als die Definition des Zeichens  $e^{xi}$  anzusehen ist. Man hat also:

$$e^{xi} = 1 + xi + \frac{(xi)^2}{2} + \frac{(xi)^3}{3!} + \frac{(xi)^4}{4!} + \dots \text{ in inf.,}$$

oder, weil  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = +1$ , u. s. f.

$$e^{xi} = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots \text{ in inf.} \\ +i \left[ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots \text{ in inf.} \right]. \end{cases}$$

Diese Reihe zerfällt, wie man sieht, in zwei Theile, deren erster der Cosinus, der zweite, mit Weglassung des Factors  $i$ , der Sinus von  $x$  genannt werden soll. Demnach ist:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} \dots \text{in inf.}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \dots \text{in inf.}$$

und  $\cos x + i \sin x = e^{xi}.$

Um in der Folge mit imaginären Exponenten rechnen zu können, setze  $x$  und  $y$  zwei beliebige reelle oder imaginäre Größen, und, nach der Definition,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!} + \dots + \frac{y^n}{n!} + \dots$$

Multipliziert man diese beiden Reihen in einander, so kommt:

$$e^x \cdot e^y = 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \dots + \frac{(x+y)^n}{n!} + \dots$$

Nämlich das allgemeine ( $n$ te) Glied des Productes ergibt sich durch die Multiplication gleich

$$\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}y}{(n-1)! \cdot 1} + \frac{x^{n-2}y^2}{(n-2)! \cdot 2!} + \dots + \frac{x^{n-m}y^m}{(n-m)! \cdot m!} + \frac{y^n}{n!} =$$

$$\frac{1}{n!} \left[ x^n + nx^{n-1}y + \dots + \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!} x^{n-m}y^m + \dots + y^n \right]$$

$$= \frac{1}{n!} (x+y)^n.$$

Da die Reihe, welche das Product  $e^x \cdot e^y$  angiebt, offenbar nichts Anderes ist, als  $e^{x+y}$ ; so folgt das  $e^x \cdot e^y = e^{(x+y)}$ , welche Regel der Multiplication also auch dann gilt, wenn die Exponenten  $x$  und  $y$  imaginäre Größen sind. — Hieraus ergibt sich dann weiter, wenn  $h$  eine reelle Größe bezeichnet,  $(e^x)^h = e^{hx}$ ,  $x$  mag reell oder imaginär sein.



$\cos(x+y) = \cos x - y \sin x$ , und  $\sin(x+y) = \sin x + y \cos x$ ,  
welche Ausdrücke nur dazu dienen sollen, um das stetige Zu-  
nehmen der Functionen  $\sin x$  und  $\cos x$  augenscheinlich zu ma-  
chen. — Für  $y=0$  wird offenbar

$$\frac{\cos(x+y) - \cos x}{y} = -\sin x, \quad \frac{\sin(x+y) - \sin x}{y} = +\cos x;$$

also sind  $-\sin x$  und  $\cos x$  die Ableitungen von  $\cos x$  und  $\sin x$ , d. h.

$$d(\cos x) = -\sin x \cdot dx; \quad d(\sin x) = +\cos x \cdot dx.$$

Hieraus folgt auch noch

$$\begin{aligned} d(e^{xi}) &= d(\cos x + i \sin x) = (-\sin x + i \cos x) dx \\ &= (i \cos x + i^2 \sin x) dx, \end{aligned}$$

oder:

$$d(e^{xi}) = i(\cos x + i \sin x) dx = i e^{xi} \cdot dx; \quad \text{also } d(e^{xi}) = e^{xi} \cdot i dx,$$

wodurch die Regel der Differentiation der Exponentialgröße  $e^x$  auch  
auf imaginäre Exponenten ausgedehnt wird. Aus dem Taylor-  
schen Satze ergeben sich, mit Hülfe der höheren Ableitungen von  
 $\sin x$  und  $\cos x$ , die folgenden für jeden Werth von  $x$  und  $k$   
convergirenden Reihen:

$$\begin{aligned} \sin(x+k) &= \sin x + k \cos x - \frac{k^2}{2} \sin x - \frac{k^3}{3!} \cos x + \frac{k^4}{4!} \sin x \\ &\quad + \frac{k^5}{5!} \cos x - \frac{k^6}{6!} \sin x - \frac{k^7}{7!} \cos x + \dots + \frac{k^{4n}}{4n!} \sin(x+\Theta k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(x+k) &= \cos x - k \sin x - \frac{k^2}{2} \cos x + \frac{k^3}{3!} \sin x + \frac{k^4}{4!} \cos x \\ &\quad - \frac{k^5}{5!} \sin x - \frac{k^6}{6!} \cos x + \frac{k^7}{7!} \sin x + \dots + \frac{k^{4n}}{4n!} \cos(x+\Theta k), \end{aligned}$$

wenn man bei der 4nten Potenz von  $k$  stehen bleibt. — Fern-  
er ist zu erwähnen, daß

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

wie aus den Formeln  $\cos x + i \sin x = e^{xi}$ ,  $\cos x - i \sin x = e^{-xi}$

sofort folgt. — Aus denselben Formeln ergibt sich auch, wenn  $n$  eine ganze Zahl ist,

$$(\cos x + i \sin x)^n = (e^{xi})^n = e^{nxi} = \cos nx + i \sin nx,$$

also  $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx,$

und eben so  $(\cos x - i \sin x)^n = \cos nx - i \sin nx.$

Nennt man die Quotienten  $\frac{\sin x}{\cos x}$  die Tangente, und  $\frac{\cos x}{\sin x}$  die Cotangente von  $x$ ; so daß

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

so giebt die Differentiation, nach der Regel §. 5. c.

$$d \operatorname{tg} x = \frac{\cos x d \sin x - \sin x d \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} dx,$$

mithin  $d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}$  und eben so  $d \operatorname{cotg} x = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$

28. Giebt man in den Reihen  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$

und  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$  der Zahl  $x$  beliebige Werthe zwischen 0 und 1; so sieht man leicht, daß sowohl  $\cos x$  als  $\sin x$  positive ächte Brüche werden. Für  $x=0$  wird  $\cos x=1$ ,  $\sin x=0$ ; für  $x=1$  erhält man

$$\cos 1 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \dots, \quad \sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} - \dots,$$

woraus zu ersehen ist, daß auch  $\cos 1$  und  $\sin 1$  positive ächte Brüche sind. Ferner erhält man durch Subtraction:

$$\begin{aligned} \sin 1 - \cos 1 = & \frac{7}{24} + \left( \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} \right) + \left( \frac{1}{6!} - \frac{1}{8!} \right) + \left( \frac{1}{9!} - \frac{1}{11!} \right) \\ & + \left( \frac{1}{10!} - \frac{1}{12!} \right) + \dots \text{in inf.;} \end{aligned}$$

daher ist die Differenz  $\sin 1 - \cos 1$  positiv, also  $\sin 1$  größer als  $\cos 1$ .

Nun ist die Ableitung von  $\sin x$ ,  $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$ , zwischen den Grenzen 0 und 1 von  $x$  beständig positiv; daher wächst  $\sin x$  ununterbrochen von 0 bis  $\sin 1$ , indem  $x$  von 0 bis 1 wächst. Dagegen ist die Ableitung von  $\cos x$ ,  $\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$ , so lange  $\sin x$  positiv bleibt, beständig negativ; mithin nimmt  $\cos x$  von 1 bis  $\cos 1$  ununterbrochen ab, indem  $x$  von 0 bis 1 wächst. Da ferner, wie bewiesen,  $\sin 1 > \cos 1$  ist, so folgt, daß es zwischen 0 und 1 einen, und nur einen Werth von  $x$  geben muß, für welchen genau  $\sin x = \cos x$  ist. Man bezeichne diesen Werth mit  $\frac{1}{4}\pi$ , so ist  $\cos \frac{1}{4}\pi = \sin \frac{1}{4}\pi$ , und weil allgemein  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ , so ist  $\cos \frac{1}{4}\pi = \sin \frac{1}{4}\pi = +\frac{1}{2}\sqrt{2}$ , indem beide nothwendig positiv sind. — Aus den allgemeinen Ausdrücken für  $\cos(x+y)$ ,  $\sin(x+y)$  ergibt sich, wenn  $y = x$  gesetzt wird,

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

Daher findet man  $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$ ,  $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$ ; weiter  $\cos \pi = -1$ ,  $\sin \pi = 0$ ;  $\cos 2\pi = 1$ ,  $\sin 2\pi = 0$ . Vermöge dieser Werthe wird  
 $\cos(\frac{1}{2}\pi + x) = -\sin x$ ,  $\sin(\frac{1}{2}\pi + x) = \cos x$ ;  
 $\cos(\pi + x) = -\sin x$ ,  $\sin(\pi + x) = -\sin x$ ;  $\cos(2\pi + x) = \cos x$ ,  
 $\sin(2\pi + x) = \sin x$ .

Daher sind  $\sin x$  und  $\cos x$  periodische Functionen; die Periode ist  $= 2\pi$ ; und wenn  $m$  eine beliebige ganze pos. oder neg. Zahl, so ist

$$\cos(2m\pi + x) = \cos x, \quad \sin(2m\pi + x) = \sin x \text{ *).$$

---

\*) Wenn  $x$  unendlich groß gedacht wird, so hört  $\sin x$  auf einen bestimmten Werth zu haben, und kann dann jeder beliebigen Zahl zwischen  $-1$  und  $+1$  gleich sein. Eben so  $\cos x$ . Denn beide Functionen hängen eigentlich nur von dem Reste ab, welchen  $x$  durch  $2\pi$  dividirt, läßt, d. h. wenn  $x = 2n\pi + \alpha$ , ( $\alpha > 0$  und  $< 2\pi$ ), von  $\alpha$ . Dieser Rest  $\alpha$  wird aber offenbar gänzlich unbestimmt, sobald  $x$  unendlich groß ist. — Daher ist auch der Werth von  $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$  für  $x = 0$ ,  $\sin\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$  für  $x = a$ , unbestimmt.

Man findet ferner  $\cos(\frac{1}{2}\pi + x) = (\cos x - \sin x)\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ,  
 $\sin(\frac{1}{2}\pi + x) = (\cos x + \sin x)\frac{1}{2}\sqrt{2}$ . Indem nun  $x$  von 0 bis  $\frac{1}{2}\pi$  wächst, nimmt  $\cos x$  von 1 bis  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$  beständig ab,  $\sin x$  von 0 bis  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$  beständig zu; dabei bleibt die Differenz  $\cos x - \sin x$  immer positiv; folglich bleiben sowohl  $\cos(\frac{1}{2}\pi + x)$  als auch  $\sin(\frac{1}{2}\pi + x)$ , indem  $x$  von 0 bis  $\frac{1}{2}\pi$ , also  $\frac{1}{2}\pi + x$  von  $\frac{1}{2}\pi$  bis  $\pi$  wächst, beständig positiv, bis für  $\frac{1}{2}\pi$  der  $\cosinus = 0$  und der  $\sinus = 1$  wird. Daher bleibt die Ableitung von  $\sin x$ , d. i.  $\cos x$ , beständig positiv, und die von  $\cos x$ , d. i.  $-\sin x$ , beständig negativ, so lange  $x$  sich zwischen 0 und  $\frac{1}{2}\pi$  befindet; und mithin wächst  $\sin x$  ununterbrochen von 0 bis 1, nimmt dagegen  $\cos x$  ununterbrochen von 1 bis 0 ab, während  $x$  von 0 bis  $\frac{1}{2}\pi$  wächst. Da ferner  $\cos(\frac{1}{2}\pi + x) = -\sin x$ ,  $\sin(\frac{1}{2}\pi + x) = \cos x$ ; so nimmt  $\cos x$  von 0 bis  $-1$ ,  $\sin x$  von 1 bis 0 ab, indem  $x$  von  $\frac{1}{2}\pi$  bis  $\pi$  wächst. Folglich nimmt  $\cos x$  von 1 bis  $-1$  ununterbrochen ab, indem  $x$  von 0 bis  $\pi$  wächst. Dagegen nimmt  $\sin x$  von  $-1$  bis  $+1$  ununterbrochen zu, indem  $x$  von  $-\frac{1}{2}\pi$  bis  $+\frac{1}{2}\pi$  wächst.

Anmerkung. Aus den Formeln der §§. 19. 20. lassen sich die übrigen trigonometrischen Formeln leicht finden, wie z. B.

$$\cos(\frac{1}{2}\pi - x) = \sin x, \quad \sin(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos x;$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, \quad \text{u. s. f.,}$$

die als bekannt vorausgesetzt werden, wenn ihrer auch hier nicht ausdrückliche Erwähnung geschehen ist. —

21. Indem  $x$  von  $-\frac{1}{2}\pi$  bis  $+\frac{1}{2}\pi$  wächst, so durchläuft die Function  $\sin x$  beständig wachsend alle Werthe von  $-1$  bis  $+1$ . Wenn folglich  $z$  eine beliebige Zahl zwischen  $-1$  und  $+1$  ist, so giebt es zwischen  $-\frac{1}{2}\pi$  und  $+\frac{1}{2}\pi$  eine, und immer nur eine Zahl  $x$ , welche so beschaffen ist, daß  $\sin x = z$ . Diese Zahl  $x$  heiße *arcus (sinus = z)* oder kürzer *arc sin z*.

Wenn ferner  $x$  von 0 bis  $\pi$  wächst, so nimmt  $\cos x$  von 1 bis  $-1$  ununterbrochen ab; bezeichnet also  $z$  eine beliebige Zahl zwischen  $-1$  und  $+1$ , so giebt es immer einen einzigen Werth von

$x$ , zwischen 0 und  $\pi$ , für welchen  $\cos x = z$ . Dieser Werth von  $x$  heiße *arcus (cosinus = z)* oder *arc cos z*.

Wenn  $x$  von  $-\frac{1}{2}\pi$  bis  $+\frac{1}{2}\pi$  wächst, so durchläuft die Function  $\operatorname{tg} x$ , indem sie fortwährend stetig bleibt, alle Werthe von  $-\infty$  bis  $+\infty$ , und zwar beständig wachsend, weil die Ableitung  $\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$  beständig positiv ist. Bezeichnet folglich  $z$  eine beliebige Zahl, so giebt es zwischen  $-\frac{1}{2}\pi$  und  $+\frac{1}{2}\pi$  eine einzige Zahl  $x$ , für welche  $\operatorname{tg} x = z$  wird. Diese Zahl  $x$  heiße *arcus (tangens = z)* oder *arc tg z*. Endlich wenn  $x$  von 0 bis  $\pi$  wächst, so durchläuft  $\operatorname{cotg} x$ , überall stetig bleibend, alle Werthe von  $+\infty$  bis  $-\infty$ , und zwar beständig abnehmend, weil die Ableitung  $\frac{d \operatorname{cotg} x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$  negativ ist. Ist folglich  $z$  eine beliebige Zahl, so giebt es zwischen 0 und  $\pi$  eine einzige Zahl  $x$ , für welche  $\operatorname{cotg} x = z$ . Diese Zahl heiße *arcus (cotangens = z)* oder *arc cotg z*.

Wenn nun erstens  $z = \sin x$ ,  $dz = \cos x \cdot dx$ ; dabei  $x$  zwischen  $-\frac{1}{2}\pi$  und  $+\frac{1}{2}\pi$ ; so ist  $\cos x = +\sqrt{1-z^2}$ , mithin  $dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ , also, da  $x = \operatorname{arc} \sin z$ ,

$$d(\operatorname{arc} \sin z) = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Wenn zweitens  $z = \cos x$ ,  $dz = -\sin x \, dx$ ,  $x$  zwischen 0 und  $\pi$ ; so ist  $\sin x = +\sqrt{1-z^2}$ , also  $dx = \frac{-dz}{\sqrt{1-z^2}}$ ;

$$\text{d. h. } d(\operatorname{arc} \cos z) = -\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Drittens wenn  $z = \operatorname{tg} x$ ,  $dz = \frac{dx}{\cos^2 x}$ ,  $\cos^2 x = \frac{1}{1+z^2}$ ; so folgt  $dx = d(\operatorname{arc} \operatorname{tg} z) = \frac{dz}{1+z^2}$ .

Viertens wenn  $z = \operatorname{cotg} x$ ,  $dz = -\frac{dx}{\sin^2 x}$ ; so folgt

$$dx = d(\operatorname{arc} \cotg z) = -\frac{dz}{1+z^2}$$

Es sei  $\alpha$  eine gegebene Zahl zwischen  $-\frac{1}{2}\pi$  und  $+\frac{1}{2}\pi$ ; man verlangt alle Werthe von  $x$ , die der Gleichung  $\sin x = \sin \alpha$  genügen. — Stellt  $x$  irgend einen dieser Werthe vor, so sei  $n\pi$  das ihm am nächsten kommende Vielfache von  $\pi$ , also  $x = n\pi + \beta$ ,  $\beta$  zwischen  $-\frac{1}{2}\pi$  und  $+\frac{1}{2}\pi$ . Alsdann ist  $\sin(n\pi + \beta) = \cos n\pi \cdot \sin \beta = \sin \alpha$ . Ist folglich  $n$  gerade, so wird  $\cos n\pi = 1$ , mithin  $\sin \beta = \sin \alpha$ , also  $\beta = \alpha$ . Ist aber  $n$  ungerade,  $\cos n\pi = -1$ , so wird  $-\sin \beta = \sin(-\beta) = \sin \alpha$ , also  $-\beta = \alpha$ ,  $\beta = -\alpha$ . Daher sind alle möglichen Werthe von  $x$  in den Formeln  $x = 2n\pi + \alpha$  und  $x = (2n+1)\pi - \alpha$  enthalten, in welchen  $n$  eine beliebige ganze Zahl ist. —

Es sei  $\alpha$  eine beliebige Zahl zwischen 0 und  $\pi$ ; man verlangt die sämtlichen Auflösungen der Gleichung  $\cos x = \cos \alpha$ . Man setze  $x = 2n\pi \pm \beta$ ,  $\beta$  zwischen 0 und  $\pi$  gedacht; so wird  $\cos x = \cos(2n\pi \pm \beta) = \cos(\pm \beta) = \cos \beta = \cos \alpha$  sein müssen, mithin  $\beta = \alpha$ . Folglich sind alle Werthe von  $x$  in der Formel  $x = 2n\pi \pm \alpha$  enthalten.

Es sei  $\alpha$  eine beliebige Zahl zwischen  $-\frac{1}{2}\pi$  und  $+\frac{1}{2}\pi$ ; man verlangt alle Auflösungen der Gleichung  $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$ . Man setze  $x = n\pi + \beta$ ,  $\beta$  zwischen  $-\frac{1}{2}\pi$  und  $+\frac{1}{2}\pi$ ; so wird  $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(n\pi + \beta) = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$ ; folglich  $\beta = \alpha$ . Daher ist  $x = n\pi + \alpha$ .

Es sei  $\alpha$  eine beliebige Zahl zwischen 0 und  $\pi$ ; man verlangt  $x$  aus der Gleichung  $\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} \alpha$ . Man setze  $x = n\pi + \beta$ ,  $\beta$  zwischen 0 und  $\pi$ , so ist  $\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg}(n\pi + \beta) = \operatorname{cotg} \beta = \operatorname{cotg} \alpha$ ; daher  $\beta = \alpha$ , und  $x = n\pi + \alpha$ .

22. Es ist noch übrig, den Werth von  $\pi$  zu finden. Zu dem Ende soll jetzt die Function  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$  in eine Reihe entwickelt werden.

Es sei  $z = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ , so ist  $dz = \frac{dx}{1+x^2}$ . Nun ist  $x^2+1$  das Product der beiden Factoren  $x+i$  und  $x-i$ ; ( $i = \sqrt{-1}$ ); daher findet sich:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+x^2} = \left[ \frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right] \frac{1}{2i}.$$

Nimmt man die Ableitungen von  $\frac{dz}{dx}$ , so ergibt sich leicht:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{2i} \left[ -\frac{1}{(x-i)^2} + \frac{1}{(x+i)^2} \right] = -\frac{1}{2i} \left[ \frac{(x+i)^2 - (x-i)^2}{(1+x^2)^2} \right];$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{2}{2i} \left[ \frac{1}{(x-i)^3} - \frac{1}{(x+i)^3} \right] = +\frac{1 \cdot 2}{2i} \left[ \frac{(x+i)^3 - (x-i)^3}{(1+x^2)^3} \right];$$

und so fort; allgemein:

$$\frac{d^n z}{dx^n} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{2i} \left[ \frac{(x+i)^n - (x-i)^n}{(1+x^2)^n} \right].$$

Nun setze man  $x = \sqrt{1+x^2} \cdot \cos \varphi$ ,  $1 = \sqrt{1+x^2} \cdot \sin \varphi$ , (die Größe  $\sqrt{1+x^2}$  immer positiv genommen); so wird

$$x+i = \sqrt{1+x^2} (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

also  $(x+i)^n = (\sqrt{1+x^2})^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ , (§. 19.);

desgleichen  $(x-i)^n = (\sqrt{1+x^2})^n (\cos n\varphi - i \sin n\varphi)$ ;

folglich  $(x+i)^n - (x-i)^n = 2i (\sqrt{1+x^2})^n \sin n\varphi$ .

Da ferner  $\frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^n} = (\sin \varphi)^n$ , so erhält man

$$\frac{d^n z}{dx^n} = (-1)^{n-1} (n-1)! \sin n\varphi \cdot \sin \varphi^n.$$

Hieraus ergibt sich

$$z' = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (x+k) = z + \frac{dz}{dx} \cdot k + \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{k^2}{2} + \dots + R =$$

$$z + \sin \varphi^2 \cdot k - \sin 2\varphi \sin \varphi^2 \cdot \frac{k^2}{2} + \sin 3\varphi \sin \varphi^3 \cdot \frac{k^3}{3}$$

$$\begin{aligned}
& -\sin 4\varphi \sin \varphi^4 \cdot \frac{k^4}{4} \dots + (-1)^{n-1} \sin n\varphi \sin \varphi^n \cdot \frac{k^n}{n} \\
& + (-1)^n \sin (n+1)\varphi' \sin \varphi'^{n+1} \cdot \frac{k^{n+1}}{n+1}.
\end{aligned}$$

Das letzte Glied stellt den Rest der Reihe dar, in welchem statt  $x$ ,  $x + \Theta k$ , und mithin statt  $\varphi$  eine andere Zahl gesetzt werden muß, die bloß durch  $\varphi'$  bezeichnet ist.

Wird insbesondere  $x=0$  gesetzt, so ist auch  $z = \arctg 0 = 0$ , und  $\sin \varphi = 1$ ,  $\cos \varphi = 0$ , also  $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ,  $\sin 2\varphi = 0$ ,  $\sin 3\varphi = -1$ ,  $\sin 4\varphi = 0$ , allgemein  $\sin 2n\varphi = 0$ ,  $\sin (2n+1)\varphi = (-1)^n$ ; folglich, wenn man  $x=0$  setzt) und für  $k$ ,  $x$  schreibt:

$$\begin{aligned}
z = \arctg x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \\
& + (-1)^n \sin (n+1)\varphi' \cdot (\sin \varphi')^{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1},
\end{aligned}$$

wo der Werth von  $\varphi'$  so bestimmt ist, daß

$$\Theta x = \sqrt{1 + \Theta^2 x^2} \cdot \cos \varphi', \quad 1 = \sqrt{1 + \Theta^2 x^2} \cdot \sin \varphi',$$

$\Theta$  ein positiver ächter Bruch. —

Vorstehende Reihe convergirt immer, wenn  $x$  ein ächter Bruch ist; wird  $x=1$  gesetzt, so nähert sich zwar der Rest, der sich zwischen den Grenzen  $\pm \frac{1}{n}$  befinden muß, ebenfalls der Null; die Convergenz ist jedoch eine sehr langsame. Man erhält indessen in diesem Falle, da für  $x=1$ ,  $\arctg 1 = z = \frac{1}{4}\pi$  wird,

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} \dots \text{in inf.}$$

Um rascher convergirende Reihen zu erhalten, muß man auf die Eigenschaften der Functionen  $\lg x$  und  $\arctg x$  zurückgehen. Es seien  $u$  und  $v$  zwei *arcus*, jeder zwischen  $-\frac{1}{2}\pi$  und  $+\frac{1}{2}\pi$  enthalten, und ihre Summe  $u+v$  werde  $=n\pi+w$  gesetzt, wo  $w$  ebenfalls zwischen  $-\frac{1}{2}\pi$  und  $+\frac{1}{2}\pi$  liegen soll, so daß  $n$  entweder  $+1$ , oder  $0$ , oder  $-1$  ist; so hat man



$$\operatorname{tg}(n\pi + w) = \operatorname{tg} w = \operatorname{tg}(u + v) = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}.$$

Wenn also  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} y = n\pi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} z$  ist,

so folgt 
$$z = \frac{x + y}{1 - xy}.$$

Ebenfalls wenn  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} y = n\pi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} z$  ist,

so folgt 
$$z = \frac{x - y}{1 + xy}.$$

Man berechne man mit Hülfe der obigen Reihe den Werth von  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$  z. B. für  $x = \frac{1}{2}$ ; derselbe sei  $A$ . Also  $\operatorname{tg} A = \frac{1}{2}$ ,

$\operatorname{tg} 2A = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$ . Da ferner  $\operatorname{tg} \frac{1}{4}\pi = 1$ , so setze man

$2A - \frac{1}{4}\pi = B$ , und es ergiebt sich  $\operatorname{tg} B = \frac{1}{7}$ . Man berechne daher  $B = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{7}$  aus der Reihe, und erhält dann  $\frac{1}{4}\pi = 2A - B$ , oder:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\pi &= 2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{1}{2} \right)^5 - \frac{1}{7} \left( \frac{1}{2} \right)^7 + \dots \right] \\ &\quad - \left[ \frac{1}{7} - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{7} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{1}{7} \right)^5 - \frac{1}{7} \left( \frac{1}{7} \right)^7 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Auf demselben Wege kann man noch schneller convergirende Reihen erhalten. Man berechne z. B.  $A = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5}$ , so wird  $\operatorname{tg} A = \frac{1}{5}$ ,  $\operatorname{tg} 2A = \frac{5}{12}$ ,  $\operatorname{tg} 4A = \frac{129}{119}$ . Es sei  $B = 4A - \frac{1}{4}\pi$ , so folgt  $\operatorname{tg} B = \frac{1}{239}$ , woraus  $B = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{1}{239} \right)$  sich berechnen läßt. Mithin findet sich

$$\begin{aligned} 4A - B &= \frac{1}{4}\pi = 4 \left[ \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{5} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{1}{5} \right)^5 - \frac{1}{7} \left( \frac{1}{5} \right)^7 \dots \right] \\ &\quad - \left[ \frac{1}{239} - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{239} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{1}{239} \right)^5 \dots \right]. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man den gesuchten Werth von

$$\pi = 3,1415926535 \dots$$

Anm. Die Gleichungen  $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$  und  $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$  gelten bekanntlich von den in der Trigonometrie vorkommenden *sinus* und *cosinus*, unabhängig von der angenommenen Winkelseinheit, also eben so wohl, wenn der Winkel  $x$  z. B. in Graden, als wenn er durch das Längenverhältniß seines Kreisbogens zum Halb-

messer ausgedrückt wird. Man erhält aus ihnen

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+k) - \sin x}{k} &= \cos x \cdot \frac{\sin k}{k} - \sin x \cdot \frac{1 - \cos k}{k} \\ &= \cos x \cdot \frac{\sin k}{k} - \sin x \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}k}{\frac{1}{2}k} \cdot \sin \frac{1}{2}k,\end{aligned}$$

weil  $1 - \cos k = 2(\sin \frac{1}{2}k)^2$  ist. Wenn nun  $x$  und  $k$  Bogenlängen, für den Halbmesser  $=1$ , bezeichnen, so wird  $\frac{\sin k}{k} = 1$ , für  $k=0$ , weil das Verhältniß des Bogens zur

Sehne sich desto mehr der Einheit nähert, je kleiner der Bogen genommen wird. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich  $\cos x$  als die Ableitung von  $\sin x$ , indem man in dem obigen Ausdrucke für  $\frac{\sin(x+k) - \sin x}{k}$ ,  $k=0$  setzt. Auf dieselbe Art folgt auch,

daß  $-\sin x$  die Ableitung von  $\cos x$  ist; und hieraus wird man, wie in §. 19. am Schlusse, die Reihen für  $\sin(x+k)$  und  $\cos(x+k)$  mit Hülfe des Taylorschen Satzes finden. Setzt man ferner in diesen Reihen  $x=0$  und schreibt  $x$  statt  $k$ , so erhält man genau diejenigen Reihen für die trigonometrischen *sinus* und *cosinus*, von denen die obige analytische Untersuchung ausging. Folglich stimmen diese Reihen mit den trigonometrischen Functionen  $\sin x$  und  $\cos x$  unter der Voraussetzung vollständig zusammen, daß bei den letzteren der Winkel  $x$  nicht z. B. in Graden, sondern durch das Längenverhältniß seines Bogens zum Halbmesser gemessen werde.

23. Es soll jetzt, als Beispiel zur Uebung im Differentiiren, das Differential der Function

$$f_x = [\log(1+x^2)]^{\arcsin x} \cdot \left(\arctg \frac{1}{x}\right)^n$$

gesucht werden. ( $\log$  bedeutet den natürlichen Logarithmus, zur Grundzahl  $e$ .) Dieselbe besteht aus zwei Factoren, deren jeder besonders zu behandeln ist. Man setze also

$$\varphi = [\log(1+x^2)]^{\arcsin x} \quad \text{und} \quad \psi = \left(\arctg \frac{1}{x}\right)^n.$$

Um  $d\varphi$  zu finden, werde  $\log(1+x^2) = e^u$ , also  $\varphi = e^{u \arcsin x}$  gesetzt, so wird

$$d\varphi = e^{u \arcsin x} d(u \arcsin x) = \varphi [\arcsin x \cdot du + u d(\arcsin x)].$$

Es ist aber  $u = \log \cdot \log(1+x^2)$ ,

$$du = \frac{d \log(1+x^2)}{\log(1+x^2)} = \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2) \log(1+x^2)} = \frac{2x dx}{(1+x^2) \log(1+x^2)};$$

$$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{mithin}$$

$$d\varphi = \varphi \left[ \frac{2x \cdot \arcsin x}{(1+x^2) \log(1+x^2)} + \frac{\log \cdot \log(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \right] dx.$$

Ferner  $d\psi = n \left(\arctg \frac{1}{x}\right)^{n-1} d \arctg \frac{1}{x}$ , und

$$d \left( \arctg \frac{1}{x} \right) = \frac{d \left( \frac{1}{x} \right)}{1 + \left( \frac{1}{x} \right)^2} = - \frac{dx}{1+x^2};$$

mithin  $d\psi = -n \left(\arctg \frac{1}{x}\right)^{n-1} \frac{dx}{1+x^2}$ . — Das gesamte

Differential von  $fx = \varphi \cdot \psi$  ist aber  $dfx = \psi d\varphi + \varphi d\psi$ ; also erhält man:

$$dfx = [\log(1+x^2)]^{\arcsin x} \cdot \left(\arctg \frac{1}{x}\right)^{n-1} \left[ \left( \frac{2x \arcsin x}{(1+x^2) \log(1+x^2)} + \frac{\log \cdot \log(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \right) \arctg \frac{1}{x} - \frac{n}{1+x^2} \right] dx.$$

### Einige Zusätze zur Theorie der trigonometrischen Functionen.

24. Eine beliebige Potenz von  $\cos x$  oder  $\sin x$  läßt sich immer in eine Reihe entwickeln, welche nach den Cosinus oder Sinus der Vielfachen von  $x$  fortgeht. Der Raum gestattet jedoch nicht,

diese Entwicklung hier in voller Allgemeinheit zu geben, sondern nöthigt, dieselbe auf positive ganze Exponenten zu beschränken. Es sei demnach  $m$  eine positive ganze Zahl; man setze

$$\cos x + i \sin x = u, \quad \cos x - i \sin x = \frac{1}{u};$$

$$\text{so ist } \cos mx + i \sin mx = u^m; \quad \cos mx - i \sin mx = \frac{1}{u^m}.$$

$$\text{Man hat } 2 \cos x = u + \frac{1}{u}; \text{ mithin}$$

$$2^m \cos x^m = u^m + m_1 u^{m-2} + \dots + m_\mu u^{m-2\mu} + \dots + \frac{1}{u^m};$$

$$\text{zugleich aber auch, wenn man schreibt } 2 \cos x = \frac{1}{u} + u;$$

$$2^m \cos x^m = \frac{1}{u^m} + m_1 \frac{1}{u^{m-2}} + \dots + m_\mu \frac{1}{u^{m-2\mu}} + \dots + u^m;$$

$$\text{folglich durch Addition, weil } u^m + \frac{1}{u^m} = 2 \cos mx,$$

$$2^m \cdot \cos x^m = \cos mx + m_1 \cos(m-2)x + m_2 \cos(m-4)x + \dots \\ + m_\mu \cos(m-2\mu)x + \dots + m_1 \cos(m-2)x + \cos mx;$$

oder, wenn man die gleichen Glieder dieses Ausdruckes zusammennimmt:

$$2^{m-1} \cos x^m = \cos mx + m_1 \cos(m-2)x \\ + m_2 \cos(m-4)x + \dots + v.$$

Das durch  $v$  bezeichnete letzte Glied dieses Ausdruckes ist

$$= m \binom{m-1}{\frac{m-1}{2}} \cos x = \frac{m!}{\frac{m+1}{2}! \frac{m-1}{2}!} \cos x, \text{ wenn } m \text{ ungerade ist;}$$

$$\text{dagegen ist } v = \frac{1}{2} \cdot m \binom{m}{\frac{m}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m!}{\frac{m}{2}! \frac{m}{2}!}, \text{ wenn } m \text{ gerade ist.}$$

$$\text{Daher erhält man } 2 \cos x^2 = \cos 2x + 1.$$

$$4 \cos x^3 = \cos 3x + 3 \cos x.$$

$$8 \cos x^4 = \cos 4x + 4 \cos 2x + 3.$$

$$16 \cos x^5 = \cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x.$$

u. f. f.

Schreibt man in der obigen Formel für  $\cos x^m$ ,  $\frac{1}{2}\pi - x$  statt  $x$ , so erhält man die Entwicklung von  $\sin x^m$ . Man setze zur Abkürzung  $m - 2\mu = n$ , so ist  $\cos n(\frac{1}{2}\pi - x) = \sin \frac{n\pi}{2} \sin nx$ , wenn  $n$ , mithin  $m$ , ungerade ist, dagegen  $\cos n(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos \frac{n\pi}{2} \cos nx$ , wenn  $m$  gerade ist. Also erhält man, wenn  $m$  ungerade ist:

$$2^{m-1} \sin x^m = \sin \frac{m\pi}{2} \sin mx - m_1 \sin \frac{(m-2)\pi}{2} \sin (m-2)x + \dots \\ + m_\mu \sin \frac{(m-2\mu)\pi}{2} \sin (m-2\mu)x + \dots$$

oder, weil  $\sin \frac{(m-2\mu)\pi}{2} = \cos \mu\pi \sin \frac{m\pi}{2}$  ist, so kommt:

$$2^{m-1} \sin x^m = \sin \frac{m\pi}{2} \left[ \sin mx - m_1 \sin (m-2)x + \dots + (-1)^\mu m_\mu \sin (m-2\mu)x + \dots \right].$$

Daher  $4 \sin x^3 = -\sin 3x + 3 \sin x.$

$$16 \sin x^5 = \sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x.$$

u. f. f.

Auf ähnliche Weise erhält man, wenn  $m$  gerade ist,

$$2^{m-1} \sin x^m = \cos \frac{m\pi}{2} \left[ \cos mx - m_1 \cos (m-2)x + \dots + (-1)^\mu m_\mu \cos (m-2\mu)x + \dots + v \right].$$

Das letzte Glied  $v$  ist  $= \frac{1}{2}(-1)^{\frac{m}{2}} \frac{m!}{\frac{m}{2}! \frac{m}{2}!}.$

Daher  $2 \sin x^2 = -\cos 2x + 1.$

$$8 \sin x^4 = \cos 4x - 4 \cos 2x + 3.$$

$$32 \sin x^6 = -\cos 6x + 6 \cos 4x - 15 \cos 2x + 10,$$

u. f. f.

25. Die Formel  $\cos x + j \sin x = e^{xi}$  kann benutzt wer-

den, um die  $n$ ten Wurzeln der positiven oder negativen Einheit, d. h. die sämtlichen Werthe des vieldeutigen Ausdrucks

$(\pm 1)^{\frac{1}{n}}$ , wo  $n$  eine ganze positive Zahl, zu finden. Setzt man

nämlich  $z = (\pm 1)^{\frac{1}{n}}$ , so wird  $z^n = \pm 1$ , und es kommt mithin auf die Auflösung der beiden Gleichungen  $z^n + 1 = 0$  und  $z^n - 1 = 0$  an. Sind die sämtlichen Wurzeln derselben bekannt, so erhält man damit auch die Werthe des vieldeutigen

Ausdrucks  $(\pm a)^{\frac{m}{n}}$ , in welchem  $a$  irgend eine positive Zahl,  $m$  und  $n$  aber zwei ganze Zahlen bedeuten, und  $n$  immer positiv ist. Denn man bezeichne den reellen positiven Werth von

$(a)^{\frac{m}{n}}$  mit  $b$ , so sind die sämtlichen Werthe des Ausdrucks

$(\pm a)^{\frac{m}{n}}$  in der Form  $b(\pm 1)^{\frac{m}{n}}$  enthalten. —

Um zuerst  $z^n + 1 = 0$  aufzulösen, setze man  $z = \cos x + i \sin x$ , so wird, da  $n$  eine positive ganze Zahl ist,  $z^n = \cos nx + i \sin nx$ . Soll nun  $z^n = -1$  sein, so muß  $\cos nx = -1$ ,  $\sin nx = 0$ , also  $nx = (2m+1)\pi$  gesetzt werden; mithin  $x = \frac{(2m+1)\pi}{n}$ , und

$z = \cos \frac{(2m+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2m+1)\pi}{n}$ ; woraus  $z^n = -1$  folgt.

Giebt man in diesem Ausdrucke der Zahl  $m$  alle Werthe von 0 bis  $n-1$ , so erhält man sämtliche  $n$  Wurzeln der vorgelegten Gleichung  $z^n + 1 = 0$ ; setzt man für  $m$  andere ganze Zahlen ein, so erhält man immer nur dieselben Wurzeln wieder. Die Wurzeln lassen sich paarweise verbinden; nämlich wenn man in dem vorstehenden Ausdrucke für  $z$ ,  $m$  mit  $n-m-1$  vertauscht, so kommt eine zweite Wurzel

$$\begin{aligned} & \cos \frac{(2n-2m-1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2n-2m-1)\pi}{n} \\ &= \cos \frac{(2m+1)\pi}{n} - i \sin \frac{(2m+1)\pi}{n}. \end{aligned}$$

Diese beiden Wurzeln geben zusammen einen reellen Factor des zweiten Grades von  $z^n+1$ , nämlich

$$\begin{aligned} & \left( z - \cos \frac{(2m+1)\pi}{n} \right)^2 + \left( \sin \frac{(2m+1)\pi}{n} \right)^2 \\ &= z^2 - 2z \cos \frac{(2m+1)\pi}{n} + 1. \end{aligned}$$

Um nun die sämtlichen reellen Factoren des zweiten Grades von  $z^n+1$  zu finden, setze man für  $m$  alle ganze positive Zahlen, für welche  $2m+1$  nicht größer als  $n$  wird. Ist  $n$  ungerade, so wird  $2m+1=n$  für  $m=\frac{n-1}{2}$ ; alsdann giebt es außer den reellen Factoren des zweiten Grades auch einen reellen Factor des ersten Grades ( $z+1$ ), weil für  $2m+1=n$ ,

$$\cos \left( \frac{2m+1}{n} \right) \pi + i \sin \left( \frac{2m+1}{n} \right) \pi = \cos \pi = -1 \quad \text{wird.}$$

Beispiele.

$$z^3+1=(z+1)\left(z^2-2z \cos \frac{\pi}{3}+1\right).$$

$$z^4+1=(z^2-2z \cos \frac{\pi}{4}+1)\left(z^2-2z \cos \frac{3\pi}{4}+1\right).$$

$$z^5+1=(z+1)\left(z^2-2z \cos \frac{\pi}{5}+1\right)\left(z^2-2z \cos \frac{3\pi}{5}+1\right).$$

$$z^6+1=\left(z^2-2z \cos \frac{\pi}{6}+1\right)\left(z^2-2z \cos \frac{3\pi}{6}+1\right)$$

$$\left(z^2-2z \cos \frac{5\pi}{6}+1\right). \text{ u.}$$

Auf dieselbe Weise findet man die Wurzeln von  $z^n-1=0$ . Man setze  $z=\cos x+i \sin x$ ,  $z^n=\cos nx+i \sin nx=1$ ; so muß  $nx=2m\pi$ ,  $x=\frac{2m\pi}{n}$  sein. Die Wurzeln sind also alle

von der Form:  $z=\cos \frac{2m\pi}{n}+i \sin \frac{2m\pi}{n}$ ; und es ergeben

sich wieder reelle Factoren des zweiten Grades von der Form:

$$z^n - 2z \cos \frac{2m\pi}{n} + 1,$$

in welcher Formel für  $m$  alle positive ganze Zahlen zu setzen sind, für welche  $2m$  nicht größer als  $n$  wird. Ist  $n$  ungerade, so wird, für  $m=0$ ,  $z-1$  ein einzelner reeller Factor; ist  $n$  gerade, so erhält man außer diesem noch einen zweiten  $(z+1)$  für  $2m=n$ .

Beispiele.

$$z^2 - 1 = (z-1)(z+1).$$

$$z^3 - 1 = (z-1) \left( z^2 - 2z \cos \frac{2\pi}{3} + 1 \right).$$

$$z^4 - 1 = (z-1)(z+1)(z^2 + 1).$$

$$z^5 - 1 = (z-1) \left( z^2 - 2z \cos \frac{2\pi}{5} + 1 \right) \left( z^3 - 2z \cos \frac{4\pi}{5} + 1 \right).$$

$$z^6 - 1 = (z-1)(z+1) \left( z^2 - 2z \cos \frac{2\pi}{6} + 1 \right) \left( z^2 - 2z \cos \frac{4\pi}{6} + 1 \right).$$

26. Da  $\cos x + i \sin x = e^{xi}$ , und, wenn  $m$  eine beliebige ganze Zahl ist,

$$\cos(2m\pi + x) = \cos x, \sin(2m\pi + x) = \sin x,$$

so hat man

$$\cos(2m\pi + x) + i \sin(2m\pi + x) = e^{(2m\pi + x)i} = \cos x + i \sin x.$$

Erweitert man daher den Begriff der Logarithmen so, daß auch imaginäre Exponenten von  $e$  als Logarithmen betrachtet werden; so ist  $\log(\cos x + i \sin x) = (2m\pi + x)i$ . Folglich, wenn

$$x = 0, \frac{1}{2}\pi, \pi \text{ gesetzt wird, so folgt } \log(1) = 2m\pi i,$$

$$\log(i) = (2m + \frac{1}{2})\pi i, \log(-1) = (2m + 1)\pi i.$$

Es sei  $a$  eine beliebige positive Zahl, und  $b$  ihr reeller natürlicher Logarithmus, so daß  $e^b = a$ ; alsdann ist allgemein  $\log a = b + \log 1$

$$= b + 2m\pi i, \log(-a) = b + \log(-1) = b + (2m + 1)\pi i,$$

$$\log(ia) = b + (2m + \frac{1}{2})\pi i, \log(-ia) = b + (2m + \frac{3}{2})\pi i.$$

Es seien ferner  $a$  und  $b$  zwei beliebige reelle Zahlen, so erhält man



den Logarithmus von  $a+bi$  auf folgendem Wege: Man setze den positiven Werth von  $\sqrt{a^2+b^2}=r$ , und suche diejenige Zahl zwischen 0 und  $2\pi$ , für welche  $\cos \varphi = \frac{a}{r}$ ,  $\sin \varphi = \frac{b}{r}$ , mithin  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$  wird; eine solche ist immer, aber nur einmal, zwischen den angegebenen Grenzen vorhanden; alsdann wird

$$a+bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r \cdot e^{i\varphi};$$

folglich  $\log(a+bi) = \log(r) + (2m\pi + \varphi)i;$

wo unter  $\log(r)$  der reelle Werth zu verstehen ist. — Es hat also jede beliebige reelle oder imaginäre Zahl  $z$  unendlich viele Logarithmen, d. h. es giebt unendlich viele Exponenten  $p$  zu  $e$ , welche durch Reihenentwicklung der Potenz  $e^p$  die verlangte Zahl  $z$  geben. Unter diesen befindet sich aber nur in dem Falle ein einziger reeller Exponent, wenn die Zahl  $z$  reell und positiv ist. —

Endlich da  $d(e^{xi}) = e^{xi} i dx$ , und  $\log(\cos x + i \sin x) = (2m\pi + x)i$  ist; so folgt

$$d \log(\cos x + i \sin x) = i dx = \frac{d(e^{xi})}{e^{xi}} = \frac{d(\cos x + i \sin x)}{\cos x + i \sin x},$$

woraus allgemein hergeleitet werden kann, daß das Differential eines imaginären Logarithmen eben so wie das eines reellen gefunden wird. —

### Functionen von mehreren veränderlichen Grössen.

27. Wenn in einer Function zweier veränderlicher Grössen  $x$  und  $y$ ,  $f(x,y)$ , die eine  $x$  um  $k$  vermehrt wird, so entsteht die Zunahme  $f(x+k,y) - f(x,y)$ .

Indem man sich nun den Werth von  $y$  unveränderlich denkt, wird  $f(x,y)$  als eine bloße Function von  $x$  zu betrachten sein, und der Werth, welchen

$$\frac{f(x+k, y) - f(x, y)}{k}$$

für  $k=0$  erhält, stellt die partielle Ableitung von  $f(x, y)$  nach  $x$ , dar, die mit  $\left(\frac{df}{dx}\right)$  bezeichnet wird, wenn man zur Abkürzung  $f$  statt  $f(x, y)$  setzt.

Desgleichen, wenn  $x$  ungedändert bleibt,  $y$  aber um  $h$  zunimmt, ergibt sich die partielle Ableitung von  $f$  nach  $y$ , als der Werth von

$$\frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = \left(\frac{df}{dy}\right), \quad \text{für } h=0.$$

Wenn aber  $x$  um  $k$ ,  $y$  und  $h$  zugleich wachsen, so entsteht die Zunahme

$$f(x+k, y+h) - f(x, y).$$

Es werde  $f(x+k, y+h) = f(x, y+h) + kP$  gesetzt, so ist klar, daß, für  $k=0$ ,  $P$  in die Ableitung von  $f(x, y+h)$  nach  $x$ , d. h. in  $\left(\frac{df(x, y+h)}{dx}\right)$  übergeht. Ferner sei  $f(x, y+h) = f(x, y) + hQ$ ,

so wird, für  $h=0$ ,  $Q = \left(\frac{df(x, y)}{dy}\right) = \left(\frac{df}{dy}\right)$ .

Man hat allgemein:

$$f(x+k, y+h) - f(x, y) = kP + hQ.$$

Wenn die beiden Größen  $x$  und  $y$  von einander unabhängig sind, so ist auch das Verhältniß der Zunahmen  $h$  und  $k$  ganz willkürlich; man bezeichne es mit  $q$ , so daß  $h = k \cdot q$ ; so wird

$$\frac{f(x+k, y+h) - f(x, y)}{k} = P + q \cdot Q.$$

Setzt man zugleich  $h=0$ ,  $k=0$ , so geht  $q$  in das Verhältniß der verschwindenden Zunahmen von  $x$  und  $y$ , d. i.  $\frac{dy}{dx}$

über, und da zugleich  $P$  u.  $Q$  in  $\left(\frac{df}{dx}\right)$  und  $\left(\frac{df}{dy}\right)$  übergehen, so erhält man

$$\frac{f(x+k, y+h) - f(x, y)}{k} = \left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dy}\right) \frac{dy}{dx},$$

für  $k=0, h=0$ . Dieser Ausdruck ist die vollständige Ableitung von  $f(x, y)$ . Dieselbe ist unbestimmt, so lange  $\frac{dy}{dx}$  willkürlich bleibt; wird aber bestimmt, wenn  $y$  als eine Function von  $x$  betrachtet wird, wozu dann  $\frac{dy}{dx}$  die Ableitung ist. Man

könnte aber auch eben so gut  $x$  als eine Function von  $y$  ansehen, und würde dann, auf demselben Wege, wie oben, erhalten

$$\frac{f(x+k, y+h) - f(x, y)}{h} = \left(\frac{df}{dy}\right) + \left(\frac{df}{dx}\right) \frac{dx}{dy} \text{ für } h=0, k=0.$$

Um diese Willkür zu vermeiden, schreibt man symmetrischer die Differentiale statt der Ableitungen. Nämlich die Differenz

$$f(x+k, y+h) - f(x, y)$$

geht für verschwindende  $k$  und  $h$  in das vollständige Differential  $df(x, y)$  von  $f(x, y)$  über, und man erhält

$$df(x, y) = \left(\frac{df}{dx}\right) dx + \left(\frac{df}{dy}\right) dy.$$

Hier sind  $\left(\frac{df}{dx}\right) dx, \left(\frac{df}{dy}\right) dy$  die partiellen Differentiale von  $f$  nach  $x$  und  $y$ , und die Formel spricht den Satz aus:

Das vollständige Differential einer Function von  $x$  und  $y$  ist die Summe ihrer partiellen Differentiale. — Man sieht leicht ein, daß dieser Satz auch für mehr als zwei veränderliche Größen gilt. Z. B. wenn eine Function von drei veränderlichen Größen  $f(x, y, z) = f$  gegeben ist, so hat man

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right) dx + \left(\frac{df}{dy}\right) dy + \left(\frac{df}{dz}\right) dz,$$

als Ausdruck des vollständigen Differentiales von  $f$ , durch die partiellen Differentiale. — Der Beweis beruht ganz auf denselben Gründen, wie bei zwei veränderlichen Größen. —

Beispiel. Es sei  $f(x,y)=x^m y^n$ , so ist

$$\left(\frac{df}{dx}\right)=mx^{m-1}y^n, \quad \left(\frac{df}{dy}\right)=nx^m y^{n-1},$$

$$df=mx^{m-1}y^n dx + nx^m y^{n-1} dy = x^{m-1}y^{n-1}(my dx + nx dy).$$

28. Hiernach lassen sich die partiellen Ableitungen (oder auch die partiellen Differentiale) höherer Ordnungen einer Function von mehreren Veränderlichen finden. Man bezeichnet durch  $\frac{d^2 f}{dx dy}$  diejenige Function, die gefunden wird, wenn man

zuerst die partielle Ableitung von  $f$  nach  $x$  nimmt, d. i.  $\left(\frac{df}{dx}\right)$ ,

und von dieser die partielle Ableitung nach  $y$ ,  $\frac{d\left(\frac{df}{dx}\right)}{dy} = \frac{d^2 f}{dx dy}$ .

Eben so ist  $\frac{d^2 f}{dx^2}$  die Function, welche entsteht, wenn die part.

Ableitung nach  $x$  von  $\left(\frac{df}{dx}\right)$  genommen wird.

3. B. für  $f=x^m y^n$  war  $\frac{df}{dx}=mx^{m-1}y^n$ , woraus folgt

$$\frac{d^2 f}{dx dy}=mx^{m-1} \cdot ny^{n-1}, \quad \frac{d^2 f}{dx^2}=m \cdot m-1 \cdot x^{m-2}y^n;$$

$$\text{auch ist } \frac{d^2 f}{dy^2}=n \cdot n-1 \cdot x^m y^{n-2}.$$

Zu bemerken ist, daß  $\frac{d^2 f}{dx dy}=\frac{d^2 f}{dy dx}$ ; d. h. daß es gleichviel ist, ob man die Ableitung zuerst nach  $x$  und dann nach  $y$ , oder zuerst nach  $y$ , dann nach  $x$  nimmt, was sich so beweisen läßt:

Nach dem §. 12. kann man setzen  $f(x+k)=fx+kf'(x+\Theta k)$ ; also, indem der Werth von  $y$  als unveränderlich angesehen, und zugleich zur Abkürzung  $x+k=x'$  gesetzt wird,

$$f(x',y)=f(x,y)+k \frac{df(x+\Theta k,y)}{dx},$$

wo das Zeichen  $\frac{df(x+\Theta k, y)}{dx}$  diejenige Function bedeutet, welche entsteht, wenn in der partiellen Ableitung  $\frac{df}{dx}$ ,  $x+\Theta k$  statt  $x$  gesetzt wird.

Verwandelt sich nunmehr  $y$  in  $y'=y+h$ , so wird

$$f(x', y') = f(x, y') + k \frac{df(x+\Theta_1 k, y')}{dx},$$

folglich ist

$$Q = \frac{\frac{f(x', y') - f(x, y')}{k}}{h} = \frac{\frac{f(x', y) - f(x, y)}{k}}{h} \\ = \frac{\frac{df(x+\Theta_1 k, y')}{dx}}{h} = \frac{\frac{df(x+\Theta k, y)}{dx}}{h}.$$

Für  $k=0$  geht aber die Größe auf der rechten Seite über in

$$\frac{\frac{df(x, y')}{dx} - \frac{df(x, y)}{dx}}{h}$$

und diese wiederum für  $h=0$ , in  $\frac{d^2 f}{dx dy}$ .

Daher ist  $\frac{d^2 f}{dx dy}$  der Werth, welchen der Quotient  $Q$  für  $k=0$  und  $h=0$  erhält. Auf dieselbe Art ergibt sich aber auch

$$f(x, y') = f(x, y) + h \frac{df(x, y+\lambda h)}{dy},$$

wo  $\lambda$  ein positiver echter Bruch; und

$$f(x', y') = f(x', y) + h \frac{df(x', y+\lambda, h)}{dy};$$

mithin wiederum

$$Q = \frac{\frac{f(x', y') - f(x', y)}{h}}{k} = \frac{\frac{f(x, y') - f(x, y)}{h}}{k},$$

$$\frac{df(x', y + \lambda, h)}{dy} - \frac{df(x, y + \lambda h)}{dy} \\ = \frac{\dots}{k}$$

folglich, für  $h=0, k=0$ ;  $Q = \frac{d^2 f}{dy dx}$  Daher ist

$\frac{d^2 f}{dy dx}$  ebenfalls der Werth des Quotienten  $Q$ , für  $h=0$ ,  $k=0$ ; und folglich einerlei mit  $\frac{d^2 f}{dx dy}$ .

Hieraus folgt weiter, daß auch für partielle Ableitungen höherer Ordnungen die Folge der Differentiationen einerlei ist.

Denn es sei  $\frac{d^2 f}{dx dy} = \frac{d^2 f}{dy dx} = q$ , so folgt hieraus:

$$\frac{dq}{dy} = \frac{d^3 f}{dx dy^2} = \frac{d^3 f}{dy dx dy}$$

Setzt man sodann  $\frac{df}{dy} = p$ , so ist

$$\frac{d^3 f}{dy dx dy} = \frac{d^2 p}{dx dy} = \frac{d^2 p}{dy dx} = \frac{d^2}{dy dx} \left( \frac{df}{dy} \right) = \frac{d^3 f}{dy^2 dx};$$

also:  $\frac{d^3 f}{dx dy^2} = \frac{d^3 f}{dy dx dy} = \frac{d^3 f}{dy^2 dx}$ , m. j. b. w.

29. Differentirt man zum zweitenmale den Ausdruck:

$$df = \left( \frac{df}{dx} \right) dx + \left( \frac{df}{dy} \right) dy,$$

so ergibt sich das zweite Differential von  $f$ . Wird dabei  $x$  als unabhängig veränderliche Größe, und  $y$  als eine Function derselben angesehen (diese Function mag nun gegeben sein oder nicht),

so ist  $\frac{dy}{dx}$  ebenfalls eine Function von  $x$ , und um die höheren

Differentiale von

$$df = \left[ \left( \frac{df}{dx} \right) + \left( \frac{df}{dy} \right) \cdot \frac{dy}{dx} \right] dx$$

zu finden, braucht man diesen Ausdruck nur so zu differenzieren, als ob  $dx$  constant, mithin  $d^2x=0$  wäre.

Unter dieser Voraussetzung differenziert, giebt die Gleichung

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right) dx + \left(\frac{df}{dy}\right) dy$$

die folgende:

$$d^2f = \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) dx^2 + 2\left(\frac{d^2f}{dx dy}\right) dx dy + \left(\frac{d^2f}{dy^2}\right) dy^2 + \left(\frac{df}{dy}\right) d^2y$$

als vollständiges zweites Differential von  $f$ .

Wenn aber  $x$  und  $y$  beide als Functionen einer dritten unabhängig veränderlichen Größe  $t$  sollen angesehen werden, wie es nicht selten der Fall ist; so darf man weder  $d^2x$  nach  $d^2y$  Null setzen, und erhält also in einem solchen Falle in dem Ausdrucke für  $d^2f$  noch ein Glied  $\left(\frac{df}{dx}\right) d^2x$ , wodurch derselbe ganz symmetrisch wird.

Beispiel. Für  $f = x^m y^n$  war oben

$$df = mx^{m-1} y^n dx + nx^m y^{n-1} dy;$$

daher vollständig:

$$d^2f = mx^{m-1} y^n d^2x + m \cdot m - 1 \cdot x^{m-2} y^n dx^2 + 2mnx^{m-1} y^{n-1} dx dy \\ + n \cdot n - 1 \cdot x^m y^{n-2} dy^2 + nx^m y^{n-1} d^2y,$$

$$\text{oder } d^2f = x^{m-2} y^{n-2} [mxy^2 d^2x + m \cdot m - 1 \cdot y^2 dx^2 + 2mnxy dx dy \\ + n \cdot n - 1 \cdot x^2 dy^2 + nx^2 y d^2y],$$

in welchem Ausdrucke  $d^2x=0$  zu setzen ist, wenn  $x$  als unabhängig veränderliche Größe betrachtet wird.

30. Wenn zwischen  $x$  und  $y$  eine Gleichung besteht, die durch  $f(x,y)=0$  bezeichnet werden mag, so muß, indem  $x$  und  $y$  um  $h$  zunehmen, zwischen den veränderten  $x$  und  $y$  ebenfalls die Gleichung  $f(x+h,y+h)=0$  gelten; d. h. mit  $x$  muß auch  $y$  sich ändern, aber so, daß  $f$  unverändert bleibt. Hieraus folgt, daß in diesem Falle das Differential von  $f$  Null sein

muß; d. h.  $df = \left(\frac{df}{dx}\right)dx + \left(\frac{df}{dy}\right)dy = 0$

und zwar für jeden beliebigen Werth von  $x$  und  $y$ . Diese Gleichung dient daher, um das Verhältniß  $\frac{dy}{dx}$  oder die Ableitung von  $y$  nach  $x$ , auszudrücken. Ferner muß  $d^2f = 0$  sein, also, wenn man den Ausdruck für  $df$  differentiirt, und  $d^2x = 0$  setzt, d. h.  $x$  als unabhängig veränderliche, fortwährend gleichmäßig wachsende Größe, und  $y$  als Function derselben betrachtet, so kommt:

$$d^2f = \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)dx^2 + 2\left(\frac{d^2f}{dx dy}\right)dx dy + \left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)dy^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)d^2y = 0;$$

welche Gleichung dient, um mit Hülfe der vorigen die zweite Ableitung von  $y$ , d. i.  $\frac{d^2y}{dx^2}$  zu bestimmen. Durch weitere Differen-

tiationen werden auf ähnliche Weise die höheren Ableitungen von  $y$  nach  $x$  bestimmt. Wenn aber  $x$  und  $y$  beide als Functionen einer dritten Größe  $t$  so gegeben sind, daß ihre Ausdrücke der Gleichung  $f(x,y) = 0$  genügen, so darf bei den Differentiationen weder  $dx$  noch  $dy$  als beständig, mithin weder  $d^2x$  noch  $d^2y$  Null gesetzt werden; doch müssen die Gleichungen

$$df = 0, d^2f = 0, d^3f = 0, \text{ u. s. f.}$$

sämmtlich befriedigt werden, wenn man die Werthe der Ableitungen  $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}$  u. s. f., welche sich aus den Ausdrücken für  $x$  und  $y$  in  $t$  ergeben, einsetzt.

Um ein Beispiel zu geben, sei

$$f(x,y) = \frac{(x-a)^2}{A^2} + \frac{(y-b)^2}{B^2} - 1 = 0,$$

so folgt durch Differentiation:

$$\frac{(x-a)dx}{A^2} + \frac{(y-b)dy}{B^2} = 0;$$

weiter:



$$\frac{dx^2}{A^2} + \frac{dy^2}{B^2} + \frac{(x-a)d^2x}{A^2} + \frac{(y-b)d^2y}{B^2} = 0.$$

In dieser Gleichung ist  $d^2x=0$ , wenn  $x$  als unabh. veränderl. Größe betrachtet wird. — Man kann aber der vorgelegten Gleichung Genüge leisten, wenn man  $x-a=A\cos t$ ,  $y-b=B\sin t$  setzt, woraus folgt:

$$dx = -A \sin t \cdot dt, \quad dy = B \cos t \cdot dt, \\ d^2x = -A \cos t \cdot dt^2, \quad d^2y = -B \sin t \cdot dt^2.$$

Bei dieser Annahme ist  $t$  als unabhängig betrachtet, also  $d^2t=0$  gesetzt. Setzt man die vorstehenden Werthe für  $dx$ ,  $dy$ ,  $d^2x$ ,  $d^2y$  in die obigen Gleichungen, so überzeugt man sich leicht, daß sie denselben Genüge leisten.

Anmerkung. Wenn man in irgend einem Ausdrucke, der die höheren Differentiale von  $y$ , d. i.  $d^2y$ ,  $d^3y$ , u. s. f. enthält, während  $d^2x=0$  gesetzt ist,  $x$  nicht mehr als unabhängig betrachten, sondern eine andere unabhängige Veränderliche  $t$  einführen will, von welcher  $x$  und  $y$  Functionen sind, so ist es leicht, den neuen Ausdruck aus dem vorigen so zu erhalten, daß man hernach nur die Ableitungen von  $x$  und  $y$  nach  $t$  in denselben einsetzen darf, um sofort seinen Werth zu haben. Man darf sich nur erinnern, daß  $\frac{d^2y}{dx^2}$  das Verhältniß der Differentiale

$d\left(\frac{dy}{dx}\right)$  und  $dx$  unter der Bedingung anzeigt, daß  $dx$  als unveränderlich angesehen wird. Hebt man diese Bedingung auf, so sind  $dy$ ,  $dx$  oder, wenn man lieber will, die Ableitungen  $\frac{dy}{dt}$ ,  $\frac{dx}{dt}$  veränderliche Grö-

ßen, und der Quotient  $\frac{dy}{dx}$  muß daher nach der Regel §. 5. c.

differentiirt werden. Man findet demnach

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^2}, \quad \text{und muß also}$$

$$\text{statt } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ setzen } \frac{1}{dx} d\left(\frac{dy}{dx}\right), \quad \text{d. i. } \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3},$$

wo aber  $d^2y$  links und rechts nicht mehr dieselbe Bedeutung hat; nämlich  $d^2y$  links bezieht sich auf die zweite Ableitung von  $y$  nach  $x$ ; rechts aber ist es der Zähler von  $\frac{d^2y}{dt^2}$ , d. h. es bezieht sich auf die zweite Ableitung von  $y$  nach  $t$ . Schreibt man also die Ableitungen, und nicht die Differentiale, so ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Man sieht, daß die Ausdrücke dadurch sehr an Kürze verlieren, und daß es bequemer ist, die Differentiale zu schreiben, wenn man nur die jedesmalige Bedeutung derselben gehörig beachtet.

Man findet weiter  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{dx} d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$  und indem man für  $\frac{d^2y}{dx^2}$  seinen obigen Werth setzt,

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{1}{dx} d\left(\frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3}\right) \\ &= \frac{dx^3 d^2y - dx dy d^2x - 3dx d^2x d^2y + 3dy d^2x^2}{dx^6}. \end{aligned}$$

Es war z. B. oben

$$d^2f = \frac{d^2f}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2f}{dx dy} dx dy + \frac{d^2f}{dy^2} dy^2 + \frac{df}{dy} d^2y = 0.$$

Indem man nun statt  $d^2y$  schreibt:

$$\frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx},$$

erhält man:

$$\begin{aligned} d^2f &= \frac{d^2f}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2f}{dx dy} dx dy + \frac{d^2f}{dy^2} dy^2 \\ &\quad + \frac{df}{dy} \left( \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx} \right) = 0. \end{aligned}$$

Hätte man aber die Gleichung  $df = \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy = 0$  sogleich vollständig, auch in Bezug auf  $dx$  differentirt, so hätte man erhalten:

$$d^2f = \frac{df}{dx} d^2x + \frac{d^2f}{dx^2} dy^2 + 2 \frac{d^2f}{dx dy} dx dy + \frac{d^2f}{dy^2} dy^2 + \frac{df}{dy} d^2y = 0.$$

Dieses stimmt in der That mit dem Vorigen, wie es sein muß, überein, weil  $-\frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$  ist. — Im Allgemeinen ist es besser, von vorn herein vollständig zu differenziren, weil die Ausdrücke dadurch an Symmetrie gewinnen.

31. Man kann die Gleichung  $f(x, y) = 0$  mit ihrer Ableitung  $\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$  beliebig verbinden, um aus ihnen irgend eine in beiden vorkommende Größe zu eliminiren. Wenn insbesondere in der Gleichung  $f(x, y) = 0$  eine Constante  $a$  vorkommt, so kann diese aus der Ableitung weggeschafft, und eine Gleichung zwischen  $x, y, \frac{dy}{dx}$  erhalten werden, der die vorgelegte Gleichung  $f(x, y, a) = 0$  immer Genüge thut, welcher Werth auch der Constante  $a$  beigelegt werden mag.

Es sei z. B.  $y = ax$ , so wird  $dy = a dx$ , mithin  $x dy = y dx$ , eine Differentialgleichung, die immer besteht, wenn  $y$  dem  $x$  proportionirt ist. Es sei  $y^2 - 2ax + x^2 = a^2$ , so folgt:

$$y dy - a dx + x dx = 0 \quad \text{oder} \quad y dy + x dx = a dx.$$

Wird mit Hülfe dieses Ausdruckes  $a$  aus der ursprünglichen Gleichung weggeschafft, so kommt die Differentialgleichung:

$$(x^2 + y^2) dx^2 = (x dx + y dy)^2 + 2(x dx + y dy)x dx,$$

oder, nach Potenzen von  $dy$  geordnet:

$$y^2 dy^2 + 4xy dy dx + (2x^2 - y^2) dx^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf  $\frac{dy}{dx}$  vom zweiten Grade, so wie die vorige Differentialgleichung vom ersten Grade war. Beide enthalten aber nur die erste Ableitung von  $y$  nach  $x$ , und sind deshalb von erster Ordnung. —

Bermittelt der höheren Ableitungen kann man mehrere

Constanten wegschaffen, wenn solche in der gegebenen Gleichung vorhanden sind. Es sei z. B.  $y = a \cdot e^x + b \cdot e^{-x}$ , so wird

$$dy = (ae^x - be^{-x})dx,$$

$$d^2y = (ae^x + be^{-x})dx^2, \text{ oder } d^2y = ydx^2,$$

eine Differentialgleichung zweiter Ordnung (zugleich in Hinsicht auf die höchste Ableitung  $\frac{d^2y}{dx^2}$  vom ersten Grade), aus welcher die Constanten  $a$  und  $b$  beide verschwunden sind.

32. Endlich ist noch zu erwähnen, daß die Zunahme einer Function zweier Veränderlicher sich auf ähnliche Weise nach Potenzen der Zunahmen  $k$  und  $h$  von  $x$  und  $y$  entwickeln läßt, wie bei einer Function von  $x$  nach Potenzen von  $k$  geschehen ist. Man setze zur Abkürzung  $f(x, y) = u$ ,  $f(x, y + h) = u'$ , so wird, nach dem Taylorschen Satze, wenn man den Rest bloß durch  $r$  andeutet:

$$f(x+k, y+h) = u' + k \frac{du'}{dx} + \frac{k^2}{2} \frac{d^2u'}{dx^2} + \dots + \frac{k^n}{n!} \frac{d^nu'}{dx^n} + r$$

$$\text{Ferner aber ist } u' = u + h \frac{du}{dy} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2u}{dy^2} + \dots + \frac{h^n}{n!} \frac{d^nu}{dy^n} + r_1.$$

$$\frac{du'}{dx} = \frac{du}{dx} + h \frac{d^2u}{dx dy} + \frac{h^2}{2} \frac{d^3u}{dx^2 dy} + \dots + \frac{h^n}{n!} \frac{d^{n+1}u}{dx^n dy^n} + r_2;$$

allgemein

$$\frac{d^mu'}{dx^m} = \frac{d^mu}{dx^m} + h \frac{d^{m+1}u}{dx^m dy} + \dots + \frac{h^n}{n!} \frac{d^{n+m}u}{dx^m dy^n} + r_m.$$

Werden diese Werthe von  $u'$ ,  $\frac{du'}{dx}$ , u. s. f. eingesetzt, und gehörig geordnet, so folgt:

$$\begin{aligned} f(x+k, y+h) = & u + k \frac{du}{dx} + \frac{k^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{k^3}{3!} \frac{d^3u}{dx^3} + \dots \\ & + h \frac{du}{dy} + kh \frac{d^2u}{dx dy} + \frac{k^2 h}{2! 1!} \frac{d^3u}{dx^2 dy} + \dots \end{aligned}$$

$$+ \frac{h^2}{2} \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{k h^2}{1! 2!} \frac{d^2 u}{dx dy} + \dots$$

$$+ \frac{h^3}{3!} \frac{d^3 u}{dy^3} + \dots$$

Das allgemeine Glied dieses Ausdruckes, von der Ordnung  $n+m$ , läßt sich durch  $S \left( \frac{k^n h^m}{n! m!} \frac{d^{n+m} u}{dx^n dy^m} \right)$  bezeichnen, so verstanden, daß für  $n$  und  $m$  alle positiven ganzen Zahlen, mit Einschluß von Null, zu setzen sind, welche eine unveränderliche Summe  $n+m$  geben. Auch für den Rest läßt sich ein ähnlicher Ausdruck angeben, wie bei der Entwicklung von  $f(x+k)$ , der jedoch hier übergangen werden soll. — Eine ähnliche Reihenentwicklung findet auch bei Functionen von mehr als zwei veränderlichen Größen Statt.

### Untersuchung besonders ausgezeichneter Werthe einer Function.

§3. Diejenigen Werthe von  $x$ , für welche  $f x$  Null, oder unendlich groß wird, findet man durch die Auflösung der Gleichungen  $f x = 0$ ,  $\frac{1}{f x} = 0$ . Außer ihnen muß man aber auch, bei der Untersuchung des Ganges einer Function, auf solche Werthe achten, für welche die Ableitungen  $f'x$ ,  $f''x$ , u. s. f. Null oder unendlich groß werden. In dem letzteren Falle verliert die Taylorsche Reihe ihre Gültigkeit. Wenn jedoch z. B.  $f''x$  unendlich wird für  $x = \alpha$ ,  $f x$ ,  $f'x$ ,  $f''x$  aber für alle Werthe von  $x$  zwischen den Grenzen  $a$  und  $b$ , zwischen welchen  $\alpha$  und  $\alpha+k$  liegen, endlich und stetig sind, so kann man immer noch setzen:

$$f(\alpha+k) = f\alpha + k f'\alpha + \frac{k^2}{2} f''(\alpha+\theta k);$$

nur darf die Entwicklung nicht bis auf die dritte Ableitung ausgedehnt werden, weil, nach der Annahme,  $f''\alpha$  unendlich ist.

Wenn nun die Ableitung  $f'x$ , für  $x=\alpha$ , Null ist, so zeigt dies an, daß die Function  $fx$ , während  $x$  von dem Werthe  $\alpha$  aus im Wachsen gedacht wird, sich in einem augenblicklichen Stillstande befindet, indem die Ableitung  $f'x$ , oder das Maas der veränderlichen Stärke, mit welcher  $fx$  wächst, während  $x$  gleichmässig wächst, für  $x=\alpha$ , Null ist. Hat zugleich  $f'\alpha$  einen endlichen, von Null verschiedenen Werth, so ist, indem  $f'\alpha$  verschwindet,

$$f(\alpha+k) = f\alpha + \frac{k^2}{2} f''(\alpha+\theta k) \text{ und } f(\alpha-k) = f\alpha + \frac{k^2}{2} f''(\alpha-\lambda k),$$

( $\theta$  und  $\lambda$  zwischen 0 und +1).

Nun kann  $k$  so klein genommen werden, daß die Werthe  $f''(\alpha+\theta k)$  und  $f''(\alpha-\lambda k)$  dem Werthe  $f''\alpha$  beliebig nahe kommen, also beide gleiche Zeichen mit  $f''\alpha$  erhalten. Alsdann haben auch die Unterschiede  $f(\alpha+k)-f\alpha$  und  $f(\alpha-k)-f\alpha$  mit einander und mit  $f''\alpha$  gleiche Zeichen. Ist dieses Zeichen positiv, so ist  $f\alpha$  kleiner, als  $f(\alpha+k)$  und  $f(\alpha-k)$ ; ist es aber negativ, so ist  $f\alpha$  größer als  $f(\alpha+k)$  und  $f(\alpha-k)$ .

Wenn demnach  $f'\alpha$  Null, und  $f''\alpha$  endlich und verschieden von Null ist, so ist der Werth von  $f\alpha$  entweder größer als die ihm zu beiden Seiten benachbarten Werthe von  $fx$ , oder kleiner, je nachdem der Werth von  $f''\alpha$  negativ oder positiv ist. In dem ersten Falle findet, indem  $x$  als wachsend gedacht wird, ein Uebergang der Function aus dem Wachsen in das Abnehmen, d. h. ein Maximum, in dem zweiten ein Uebergang aus dem Abnehmen in das Wachsen, ebenfalls bei wachsenden  $x$ , d. h. ein Minimum Statt.

Wenn aber mit  $f'\alpha$  zugleich  $f''\alpha$  Null wird,  $f'''\alpha$  aber einen endlichen Werth hat, der nicht Null ist, so kommt:

$$f(\alpha+k)-f\alpha = \frac{k^3}{3!} f'''(\alpha+\theta k),$$

$$f(\alpha-k)-f\alpha = -\frac{k^3}{3!} f'''(\alpha-\lambda k).$$

Indem daher  $k$  hinreichend klein genommen wird, so daß

Werth, bei welchem die Function  $f(x)$  abbricht, d. h. aus dem Reellen in das Imaginäre übergeht. — Im Allgemeinen ist die Taylorsche Reihe nicht anwendbar, sobald die Werthe der Ableitungen unendlich groß werden, d. h. die Zunahme  $f(x+k) - f(x)$  läßt sich, für solche Werthe von  $x$ , nicht mehr nach ganzen Potenzen von  $k$  entwickeln. So giebt  $f(x) = (x-b)^{\frac{1}{2}}$  für  $x=b$ ,  $f(x+k) - f(x) = k^{\frac{1}{2}}$ ; welche Form offenbar mit derjenigen der Taylorsche Reihe unverträglich ist. Es sei noch  $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ ; so wird  $f(x) = 0$  für  $x = a$ ; setzt man nun  $x = a - k$ , so kommt  $f(a-k) = \sqrt{k} \cdot \sqrt{2a-k}$ , welcher Werth sich nicht nach ganzen Potenzen von  $k$  entwickeln läßt.

Es mag hier auch bemerkt werden, daß bei manchen Functionen Unterbrechungen der Stetigkeit vorkommen, während die Ableitungen derselben immer endlich und stetig sind. Dahin gehört die Function  $\arctg \frac{1}{x}$ , deren Ableitung  $\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)$  beständig endlich und negativ ist, und welche also, so lange sie stetig bleibt, beständig abnehmen muß. Sie wird aber Null für  $x = -\infty$  und für  $x = +\infty$ . Bei näherer Betrachtung findet man leicht, daß sie, indem  $x$  durch Null geht, nicht stetig bleibt, sondern plötzlich von dem Werthe  $-\frac{1}{2}\pi$  zu dem Werthe  $+\frac{1}{2}\pi$  gelangt. Diese Function nimmt also, indem  $x$  von  $-\infty$  bis 0 wächst, von 0 bis  $-\frac{1}{2}\pi$ , hierauf aber, während  $x$  von 0 bis  $+\infty$  wächst, von  $+\frac{1}{2}\pi$  bis 0, beständig ab.

Betrachtet man indessen ihre Ableitung 
$$-\frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$
 genauer, be-

vor sie noch auf die einfachere Form 
$$\frac{-1}{1+x^2}$$
 gebracht ist, so sieht

man, daß dieselbe, für  $x=0$ , die Form  $\infty$  erhält, wodurch sich der Werth  $x=0$ , als ein solcher, der nähere Untersuchung erfordert, hinreichend kund giebt. Ueberhaupt wird der Werth von  $\varphi(x)$  für  $x=a$  immer näher zu untersuchen sein, wenn der

Es sei  $fx = x^2 = e^{2 \log x}$ ;  $fx = x^2[1 + \log x]$ .

$$f'x = x^2 \left[ \frac{1}{x} + (1 + \log x) \right].$$

Setzt man  $\log x + 1 = 0$ , also  $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$ , so wird  $fx = 0$ , und offenbar zugleich  $f'x$  endlich und positiv. Folglich findet, für  $x = \frac{1}{e}$  ( $e = 2,7182818$ ,  $\frac{1}{e} = 0,3678795$ ) ein Minimum der Function  $x^2$  Statt, dessen Werth etwa 0,6922006 ist.

Es sei  $fx = (a-x)^3$ ,  $fx = -3(a-x)^2$ ,  $f'x = -6(a-x)$ ,  $f''x = 6a$ ; so wird, für  $x = a$ ,  $fa = 0$ ,  $f'a = 0$ ,  $f''a$  aber nicht Null; hier ist also ein Stillstand der Function, die sonst fortwährend, mit wachsendem  $x$ , abnimmt, wie schon daraus erhellt, daß der Werth von  $fx$  für jedes  $x$  negativ ist, während zugleich die Function offenbar immer stetig bleibt.

34. Wenn die Ableitung  $f'x$ , für  $x = a$ , einen unendlich großen Werth erhält, so muß man die Beschaffenheit der Functionen  $fx$  und  $f'x$ , in der Nähe des Werthes  $x = a$ , untersuchen. Die Ableitung  $f'x$  kann z. B. für  $x = a - k$ , ein anderes Zeichen haben, als für  $x = a + k$ , so lange  $k$  eine sehr kleine Größe ist. Alsdann wird die Function  $fx$ , wenn sie z. B. von  $x = a - k$  bis zu  $x = a$  wächst, von  $x = a$  abnehmen, oder umgekehrt; es wird also bei  $x = a$  ein Wechsel zwischen Ab- und Zunahme, d. h. ein Maximum oder Minimum, Statt finden. Dies ist z. B., wenn  $fx = (x-b)^{\frac{2}{3}}$ , mithin  $f'x = \frac{2}{3}(x-b)^{-\frac{1}{3}}$  ist, der Fall für  $x = b$ , wo  $fx = 0$  wird. Die Ableitung ist negativ, so lange  $x < b$ , und wird positiv, wenn  $x > b$  wird; die Function geht also aus dem Abnehmen in das Wachsen über, und der Werth  $fx = 0$  für  $x = b$  ist ein Minimum. Dieser Uebergang ist aber nicht, wie in den Fällen des §. 33., mit einem augenblicklichen Stillstande verbunden. — In anderen Fällen wechselt die Ableitung  $f'x$  ihr Zeichen nicht, indem sie unendlich wird; z. B. für  $fx = (x-b)^{\frac{3}{2}}$  wird  $f'x = \frac{3}{2}(x-b)^{-\frac{1}{2}}$  für  $x = b$  unendlich groß. Hier ist  $b$  der



Werth, bei welchem die Function  $f(x)$  abbricht, d. h. aus dem Reellen in das Imaginäre übergeht. — Im Allgemeinen ist die Taylorsche Reihe nicht anwendbar, sobald die Werthe der Ableitungen unendlich groß werden, d. h. die Zunahme  $f(x+k) - f(x)$  läßt sich, für solche Werthe von  $x$ , nicht mehr nach ganzen Potenzen von  $k$  entwickeln. So giebt  $f(x) = (x-b)^{\frac{1}{3}}$  für  $x=b$ ,  $f(x+k) - f(x) = k^{\frac{1}{3}}$ ; welche Form offenbar mit derjenigen der Taylorschen Reihe unverträglich ist. Es sei noch  $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ ; so wird  $f(x) = 0$  für  $x = a$ ; setzt man nun  $x = a - k$ , so kommt  $f(a-k) = \sqrt{k} \cdot \sqrt{2a-k}$ , welcher Werth sich nicht nach ganzen Potenzen von  $k$  entwickeln läßt.

Es mag hier auch bemerkt werden, daß bei manchen Functionen Unterbrechungen der Stetigkeit vorkommen, während die Ableitungen derselben immer endlich und stetig sind. Dahin gehört die Function  $\arctg \frac{1}{x}$ , deren Ableitung  $\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)$  beständig endlich und negativ ist, und welche also, so lange sie stetig bleibt, beständig abnehmen muß. Sie wird aber Null für  $x = -\infty$  und für  $x = +\infty$ . Bei näherer Betrachtung findet man leicht, daß sie, indem  $x$  durch Null geht, nicht stetig bleibt, sondern plötzlich von dem Werthe  $-\frac{1}{2}\pi$  zu dem Werthe  $+\frac{1}{2}\pi$  gelangt. Diese Function nimmt also, indem  $x$  von  $-\infty$  bis 0 wächst, von 0 bis  $-\frac{1}{2}\pi$ , hierauf aber, während  $x$  von 0 bis  $+\infty$  wächst, von  $+\frac{1}{2}\pi$  bis 0, beständig ab.

Betrachtet man indessen ihre Ableitung 
$$-\frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$
 genauer, be-

vor sie noch auf die einfachere Form 
$$\frac{-1}{1+x^2}$$
 gebracht ist, so sieht

man, daß dieselbe, für  $x=0$ , die Form  $\frac{\infty}{\infty}$  erhält, wodurch sich der Werth  $x=0$ , als ein solcher, der nähere Untersuchung erfordert, hinreichend kund giebt. Ueberhaupt wird der Werth von  $\varphi(x)$  für  $x=a$  immer näher zu untersuchen sein, wenn der

Werth  $a$  ein solcher ist, für welchen die Function  $f_x$  unendlich wird, oder überhaupt eine besondere Abweichung ihres Ganges darbietet.

35. Oft erscheint der Werth einer Function in unbestimmter Form, ungeachtet ein bestimmter Werth wirklich Statt findet. So wird  $\frac{f(x+k)-f_x}{k}$  für  $k=0, \frac{0}{0}$ ; der Werth aber ist, wie bekannt, die Ableitung  $f'_x$ . — Es seien  $\varphi_x$  und  $\psi_x$  zwei Functionen, die für  $x=a$  beide zugleich verschwinden, so wird ihr Quotient  $y=\frac{\varphi_x}{\psi_x}$ , für  $x=a, \frac{0}{0}$ . Um den Werth zu finden, welchen  $y$  für  $x=a$  erhält, setze man  $y \cdot \psi_x = \varphi_x$ , und nehme die Ableitung dieser Gleichung, so kommt,

$$\frac{dy}{dx} \cdot \psi_x + y \psi'_x = \varphi'_x,$$

mithin, für  $x=a$ ,  $y \psi'_a = \varphi'_a$  oder  $y = \frac{\varphi'_a}{\psi'_a}$ ; d. h. der Werth von  $\frac{\varphi_x}{\psi_x}$  für  $x=a$ , wenn  $\varphi_a$  und  $\psi_a$  zugleich verschwinden, ist der Quotient aus den Werthen der Ableitungen  $\varphi'_x$  und  $\psi'_x$ , für  $x=a$ . Es sei z. B.  $y = \frac{\frac{1}{2}\pi - x}{\cos x}$ , so wird  $y = \frac{0}{0}$  für  $x = \frac{1}{2}\pi$ ; nimmt man aber die Ableitungen, so ist die des Zählers  $= -1$ , die des Nenners  $= -\sin x = -1$ , für  $x = \frac{1}{2}\pi$ , also  $y = 1$  der richtige Werth. Es sei  $y = \frac{\sin(x^2 - a^2)}{1 - \cos(x - a)}$ , so ist der Werth von  $y$ , für  $x=a$ ,  $\frac{2x \cos(x^2 - a^2)}{\sin(x - a)} = \frac{2a}{0}$ , d. i. unendlich groß, wenn nicht  $a=0$  ist. Für  $a=0$  aber wird  $\frac{\sin(x^2)}{1 - \cos x} = \frac{2x \cos(x^2)}{\sin x} = \frac{0}{0}$  für  $x=0$ ; also aufs Neue unbestimmt.

Man muß daher auf den Quotienten  $\frac{\varphi_x}{\psi_x} = \frac{2x \cos(x^2)}{\sin x}$  wieder die obige Regel anwenden, oder den Werth  $\frac{\varphi'_0}{\psi'_0}$  suchen.

Derselbe ergibt sich gleich  $\frac{2 \cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2)}{\cos x}$  für  $x=0$ ,

also gleich 2; d. h. es ist  $\frac{\sin(x^2)}{1 - \cos x} = 2$  für  $x=0$ . — Es

sei noch  $y = \frac{a^x - b^x}{x}$ , so wird  $y = \frac{0}{0}$  für  $x=0$ ; der richtige Werth aber ist  $y = \log a - \log b$ . — Um den Werth von

$$y = \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}$$

für  $x=0$  zu finden, muß man zweimal hintereinander die Ableitungen nehmen, worauf man  $y = \frac{1}{a}$  erhält.

Diese Regel gilt jedoch nur dann, wenn diejenigen Ableitungen von  $\varphi x$  und  $\psi x$ , welche den Werth des Quotienten  $\frac{\varphi x}{\psi x}$  nicht mehr  $= \frac{0}{0}$  geben, nicht wieder auf andere Weise einen unbestimmten Werth liefern, z. B.  $\frac{\infty}{\infty}$ . In einem solchen Falle, wo, wie bekannt,  $\varphi(x+k)$ ,  $\psi(x+k)$  sich nicht nach Potenzen von  $k$  entwickeln lassen, muß man eine andere Form der Entwicklung suchen, um den Quotienten  $\frac{\varphi x}{\psi x}$  für  $x=a$  zu erhalten.

Es sei z. B.  $\varphi x = \sqrt{x^2 - a^2}$ ,  $\psi x = \sqrt[3]{x^3 - a^3}$ , so wird  $y = \frac{\varphi x}{\psi x} = \frac{0}{0}$  für  $x=a$ , während  $\varphi'a$  und  $\psi'a$  unendlich werden. Man erhält aber

$$\varphi(a+k) = \sqrt{k} \cdot \sqrt{2a+k}, \quad \psi(a+k) = \sqrt[3]{k} \cdot \sqrt[3]{3a^2+3ak+k^2},$$

$$\text{also } \frac{\varphi(a+k)}{\psi(a+k)} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt[3]{k}} \cdot \frac{\sqrt{2a+k}}{\sqrt[3]{3a^2+3ak+k^2}} = 0, \quad \text{für } k=0.$$

$$\text{Also ist } \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt[3]{x^3 - a^3}} = 0, \quad \text{für } x=a.$$

Ist zwischen  $x$  und  $y$  eine Gleichung  $f(x, y) = 0$  gegeben, so folgt durch Differentiierung derselben:

$$\frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy = 0.$$

Werden nun, für einen bestimmten Werth von  $x$ , und einen entsprechenden von  $y$ , die partiellen Ableitungen  $\frac{df}{dx}$  und  $\frac{df}{dy}$  beide zugleich Null; so bleibt das Verhältniß  $\frac{dy}{dx}$  unbestimmt. Differentiirt man aber zum zweitenmale, indem man  $d^2x = 0$  setzt, so kommt

$$\frac{d^2f}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2f}{dx dy} dx dy + \frac{d^2f}{dy^2} dy^2 + \frac{df}{dy} d^2y = 0.$$

Für die in Rede stehenden Werthe von  $x$  und  $y$  wird aber  $\frac{df}{dy} = 0$ ; also kommt die quadratische Gleichung:

$$\frac{d^2f}{dy^2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + 2 \frac{d^2f}{dx dy} \frac{dy}{dx} + \frac{d^2f}{dx^2} = 0,$$

wonach  $\frac{dy}{dx}$  einen doppelten Werth erhält. — Wenn auch diese

Gleichung den Werth von  $\frac{dy}{dx}$  noch unbestimmt läßt, so muß man zu den Gliedern höherer Ordnung fortgehen, oder auch, nach Umständen, andere Formen der Entwicklung von  $f(x+k, y+h)$  suchen, wenn die Taylorsche Reihe unzulässig ist.

Beispiel. Es sei  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = 0$ .

Durch Differentiiren erhält man

$$(x^2 + y^2)(x dx + y dy) + a^2(y dy - x dx) = 0,$$

oder 
$$(x^2 + y^2 + a^2)y dy + (x^2 - y^2 - a^2)x dx = 0.$$

Für  $x = 0$ , wird  $y = 0$ , also  $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ . Differentiirt man aber weiter, so kommt:

$$(x^2 + y^2 + a^2) y d^2 y + (3y^2 + x^2 + a^2) dy^2 + 4xy dx dy + (y^2 + 3x^2 - a^2) dx^2 = 0,$$

also, für  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $dy^2 - dx^2 = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = \pm 1$ .

36. Ein Werth von  $fx$  kann auch unter anderen Formen als  $\frac{0}{0}$  versteckt sein, z. B.  $0 \cdot \infty$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\infty^0$ ,  $0^0$  u. dgl., und muß dann durch geeignete Transformationen, Entwicklung in Reihen, oder auf anderem Wege ermittelt werden, worüber sich nicht wohl allgemeine Regeln geben lassen. Z. B. das Product  $x \log x$  wird  $0 \cdot \infty$  für  $x=0$ ; sein Werth ist aber in diesem Falle Null. Denn man setze  $\log x = -z$ ,  $x = e^{-z}$ , so ist

$$x \log x = \frac{-z}{e^z} = \frac{-z}{1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots},$$

ein Quotient, der für  $z = \infty$ , offenbar Null wird. — Der Werth von  $0^0$  ist nicht immer gleich 1. Allerdings ist  $x^x = 1$  für

$x=0$ ; dagegen ist z. B.  $x^{\frac{1}{\log x}} = e$ , für jeden Werth von  $x$ , also auch für  $x=0$ , wo die Formel in  $0^0$  übergeht. In der That kann man setzen  $0^0 = 0^{1-1} = 0^1 \cdot 0^{-1} = \frac{0}{0}$ ; also ist  $0^0$  eben so unbestimmt als  $\frac{0}{0}$ .

37. Für die Anwendung sind diejenigen größten oder kleinsten Werthe von  $fx$ , von denen in §. 33. gehandelt worden, die wichtigsten. Häufig ist die Function, von welcher ein solcher Werth gesucht wird, unter der Form  $f(x, y)$  gegeben, d. h. von zwei veränderlichen Größen  $x$  und  $y$  abhängig, zwischen welchen aber eine Gleichung  $\varphi(x, y) = 0$  besteht. In solchen Fällen kann man zwar  $y$  mit Hülfe der Gleichung  $\varphi = 0$  aus  $f$  eliminiren, und alsdann nach §. 33. verfahren; man kann aber auch, um zu finden, ob ein Maximum oder Minimum vorhanden ist, ohne Auf-

Lösung der Gleichung  $\varphi = 0$ , das Differential

$$df = \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy = 0$$

setzen, wenn man zugleich berücksichtigt, daß auch

$$\frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy = 0$$

sein muß. — Eliminiert man sodann  $\frac{dy}{dx}$ , so kommt

$$\frac{df}{dx} \cdot \frac{d\varphi}{dy} - \frac{df}{dy} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

welche Gleichung, verbunden mit  $\varphi = 0$ , die gesuchten Werthe von  $x$  und  $y$  liefern muß. — Um zu entscheiden, ob dieselben wirklich größte oder kleinste Werthe sind, muß man die zweiten Ableitungen entwickeln; nicht selten aber ist es schon aus der Natur der Aufgabe klar, daß ein Maximum oder Minimum vorhanden sein muß, und in solchen Fällen kann man die Entwicklung der Ableitungen zweiter Ordnung unterlassen.

Beispiel. In einer Ebene ist ein Winkel  $\gamma$  und ein Punkt gegeben; man soll durch den Punkt eine gerade Linie so ziehen, daß das zwischen den Schenkeln des Winkels befindliche Stück derselben möglichst klein sei.

Man nehme den Scheitel des Winkels  $\gamma$  zum Anfange, und seine Schenkel zu Axen der Coordinaten, und nenne  $x$  und  $y$  die Stücke, welche die gesuchte Gerade von den Schenkeln abschneidet. Es seien ferner  $a$ ,  $b$  die Coordinaten des gegebenen Punktes; so wird die Gleichung der gesuchten Geraden sein:

$$\frac{u}{x} + \frac{v}{y} = 1 \quad (\text{wo } u, v \text{ die laufenden Coord. sind}), \text{ und, da für}$$

$u = a$ ,  $v = b$  werden muß, damit die Linie durch den gegebenen Punkt gehe,  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$ , oder  $ay + bx = xy$ . Ferner erhält

man für die Länge  $l$  des abgeschnittenen Stückes:

$$l^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma.$$

Da  $l$ , und mithin  $l^2$  möglichst klein sein soll, so muß man haben  $ldl=0$ , also:

$$(x - y \cos \gamma) dx + (y - x \cos \gamma) dy = 0;$$

zugleich aber:  $(y - b) dx + (x - a) dy = 0$ ; folglich als Endgleichung:

$$(x - y \cos \gamma)(x - a) = (y - x \cos \gamma)(y - b).$$

Eliminirt man  $y$  mit Hilfe der Gleichung  $ay + bx = xy$ , und läßt man den Factor  $x$  weg, welcher die Auflösung  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $l=0$  giebt, die sich von selbst versteht; so kommt die Gleichung  $(x-a)^3 - b \cos \gamma (x-a)^2 + ab \cos \gamma (x-a) - ab^2 = 0$ , durch deren Auflösung  $x$  bestimmt werden muß. — Ist z. B. der Winkel  $\gamma = \frac{1}{2}\pi$ ,  $\cos \gamma = 0$ , so folgt:

$$x = a + \sqrt[3]{ab^2} \quad \text{und eben so} \quad y = b + \sqrt[3]{ba^2},$$

als die abgeschnittenen Stücke des Aeg. — Ist  $a=b$ , so folgt  $x=2a=y$ .

38. Es kann aber auch verlangt werden, daß  $f(x, y)$ , ein Max. od. Min. sei, ohne daß zwischen  $x$  und  $y$  irgend eine Abhängigkeit bestehe. Man setze  $u=f(x, y)$ ,  $u'=f(x+k, y+h)$ , so wird

$$u' - u = \frac{df}{dx} k + \frac{df}{dy} h + \frac{d^2f}{dx^2} \frac{k^2}{2} + \frac{d^2f}{dx dy} hk + \frac{d^2f}{dy^2} \frac{h^2}{2} + \dots$$

wenn man bei den Gliedern der zweiten Ordnung stehen bleibt.

Sobald sich nun  $x$  und  $y$  so bestimmen lassen, daß zugleich

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0, \quad \text{die Glieder der zweiten Ordnung aber nicht}$$

verschwinden, so kann ein Maximum oder Minimum vorhanden

sein. Man setze zur Abkürzung  $\frac{1}{2} \frac{d^2f}{dx^2} = a, \quad \frac{d^2f}{dx dy} = 2b,$

$\frac{1}{2} \frac{d^2f}{dy^2} = c$ , so geben die Glieder der zweiten Ordnung, mit Weglassung der höheren,

$$u' - u = ak^2 + 2bhk + ck^2,$$

wo man  $h$  und  $k$  hinreichend klein nehmen muß, damit die hb

heren Glieder keinen Einfluß auf das Zeichen der Differenz  $u' - u$  ausüben. Damit nun  $u$  ein Max. od. Min. sei, muß die Differenz  $u' - u$  ihr Zeichen nicht ändern, wie auch die Zeichen von  $k$  und  $h$  geändert werden mögen. Man erhält aber aus der vorstehenden Gleichung, vorausgesetzt, daß  $a$  nicht Null ist,

$$u' - u = \frac{(ak + bh)^2 + (ac - b^2)h^2}{a} = \frac{(aq + b)^2 + ac - b^2}{a} h^2,$$

wenn  $k = qh$ ; woraus hervorgeht, daß die Differenz  $u' - u$  ihr Zeichen nur dann nicht ändern wird, wenn  $ac - b^2$  nicht  $< 0$  ist. Denn wäre dieser Werth negativ, so könnte man der ganz unbestimmten Größe  $q$  sowohl Werthe geben, die den Zähler positiv, als andere, die ihn negativ machten. Ist aber  $ac - b^2 > 0$ , so kann offenbar weder  $a$  noch  $c$  gleich Null sein, und beide müssen gleiche Zeichen haben; alsdann wird  $u' - u$  positiv oder negativ, je nachdem  $a$  positiv oder negativ ist.

Ein Maximum oder Minimum der Function  $f(x, y)$  findet also Statt, wenn  $\frac{df}{dx} = 0$ ,  $\frac{df}{dy} = 0$ , die Glieder der zweiten Ordnung,  $ak^2 + 2bhk + ch^2$  aber so beschaffen sind, daß  $ac - b^2$  positiv ist. Und zwar findet das Max. Statt, wenn  $a$ , und mithin auch  $c$ , beide negativ; das Min., wenn  $a$  und  $c$  beide positiv sind. Auch giebt es ein Maximum oder Minimum, wenn  $ac - b^2 = 0$  ist, ohne daß  $a$  und  $c$ , beide zugleich, Null sind. — Werden die Glieder der zweiten Ordnung mit denen der ersten zugleich Null, so muß man zu den höheren Ordnungen fortgehen, um zu entscheiden, ob überhaupt ein Max. oder Min. vorhanden ist, und welches von beiden. Dies soll jedoch hier nicht weiter ausgeführt werden.

**Beispiel.** Es sei  $f(x, y) = xy(m - x - y)$ , so wird  $\frac{df}{dx} = y(m - x - 2y)$ ,  $\frac{df}{dy} = x(m - y - 2x)$ . Die Glieder zweiten Ordnung sind  $-2yk^2 + (m - 2x - 2y)kh - 2xh^2$ . Man erhält daher zur Bestimmung des Größten oder Kleinsten



$m - x - 2y = 0$ ,  $m - y - 2x = 0$ , woraus  $x = y = \frac{1}{3}m$ . Die Glieder der zweiten Ordnung sind

$$-\frac{2}{3}m(k^2 + \frac{1}{2}kh + h^2) = -\frac{2}{3}m[(k + \frac{1}{4}h)^2 + \frac{1}{8}h^2];$$

daher findet ein größter Werth Statt, wenn  $m$  positiv, ein kleinster, wenn  $m$  negativ ist. Der Werth von  $f$  ist dabei  $\left(\frac{m}{3}\right)^3$ .

39. Das wichtigste hierher gehörige Beispiel ist die Methode der kleinsten Quadrate, deren man sich bedient, um aus einer großen Anzahl von Beobachtungen diejenigen Resultate zu erhalten, welche mit der Gesamtheit der Beobachtungen am besten übereinstimmen. Es sei z. B.  $y$  eine Function von  $x$  von folgender Form:  $y = ax^m + bx^n + cx^p$ ; man kennt die Exponenten  $m, n, p$ , welche häufig z. B. die Zahlen 0, 1, 2, oder 1, 2, 3 sind; und zur Bestimmung der Coefficienten  $a, b, c$  hat man für zahlreiche Werthe von  $x$  die entsprechenden Werthe von  $y$  beobachtet. Wären diese Werthe von  $y$  genau, so bräuhete man deren zur Bestimmung der drei Coefficienten  $a, b, c$  nur drei; da sie aber alle mit Beobachtungs-Fehlern behaftet sind, so wird, wenn man sich für  $a, b, c$  die richtigen oder wenigstens die der Wahrheit möglichst nahe kommenden Werthe, für  $x$  und  $y$  aber die zusammengehörigen Beobachtungswerte gesetzt denkt, die Gleichung zwischen  $x$  und  $y$  niemals genau erfüllt werden, oder die Differenz

$$ax^m + bx^n + cx^p - y = u$$

wird niemals genau Null sein, sondern bald einen positiven, bald einen negativen Fehler darstellen. Man kann sie aber nicht unmittelbar als das Maas des Fehlers ansehen, weil es in der Natur der Sache liegt, daß das Maas des Fehlers immer positiv sein muß, in welchem Sinne derselbe auch Statt gefunden habe; indem sonst ein negativer Fehler als ein Vortheil, im Gegensatz eines positiven Fehlers, angesehen werden müßte, was offenbar widersinnig ist. Man wählt demnach das Quadrat von  $u$  zum Maas des Fehlers, und bestimmt die unbekannte Werthe

von  $a, b, c$  so, daß die Summe aller durch die Quadrate von  $u$  gemessenen Fehler, möglichst klein sei. Man setze demnach

$$ag_1 + bh_1 + cl_1 - y_1 = u_1,$$

$$ag_2 + bh_2 + cl_2 - y_2 = u_2,$$

allgemein:  $ag_n + bh_n + cl_n - y_n = u_n;$

in welchen Gleichungen  $g_1, h_1, l_1$  die Werthe bedeuten, welche die Potenzen  $x^m, x^n, x^p$  für  $x = x_1$  erhalten, wobei  $y_1$  der beobachtete Werth von  $y$  ist; eben so wie  $g_2, h_2, l_2$  dem Werthe  $x_2$  entsprechen, für welchen  $y_2$  der beobachtete Werth von  $y$  ist; u. s. f. für die übrigen. Alsdann soll also die Summe  $u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$  ein Minimum sein; oder

$$(ag_1 + bh_1 + cl_1 - y_1)^2 + (ag_2 + bh_2 + cl_2 - y_2)^2 + \dots = \text{Min.}$$

Da die Werthe von  $a, b, c$  unabhängig von einander sind, so muß, um vorstehende Quadratsumme möglichst klein zu machen, jede ihrer drei Ableitungen nach  $a, b, c$  für sich Null gesetzt werden. Nimmt man also die Ableitung zuerst nach  $a$ , und setzt sie Null, so erhält man folgende Gleichung:

$$(ag_1 + bh_1 + cl_1 - y)g_1 + (ag_2 + bh_2 + cl_2 - y_2)g_2 + \dots = 0,$$

welche zur Abkürzung folgendermaßen geschrieben werden mag:

$$a \Sigma g^2 + b \Sigma hg + c \Sigma hl = \Sigma gy.$$

Auf dieselbe Weise erhält man noch zwei Gleichungen, indem man die Ableitungen nach  $b$  und  $c$  Null setzt, nämlich:

$$a \Sigma gh + b \Sigma h^2 + c \Sigma hl = \Sigma hy.$$

$$a \Sigma gl + b \Sigma hl + c \Sigma l^2 = \Sigma ly.$$

Aus diesen drei Gleichungen sind die Werthe von  $a, b, c$  zu berechnen, welche sich der Gesammtheit der Beobachtungen am besten anschließen. Will man sich noch überzeugen, daß diese Werthe wirklich die kleinste Quadratsumme liefern, so setze man  $a + \alpha, b + \beta, c + \gamma$  für  $a, b, c$ ; alsdann geht  $u_1$  in  $u_1 + g_1\alpha + h_1\beta + l_1\gamma$ , u. d. Quadratsumme  $u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$  oder  $\Sigma u^2$  in  $\Sigma(u + g\alpha + h\beta + l\gamma)^2$  über. Entwickelt man die-

Dreht man diese Gerade um den festbleibenden Punkt  $a$  so, daß der zweite Durchschnitt  $b$  sich dem ersten immer mehr nähert, so wird derselbe ( $b$ ) endlich mit diesem ( $a$ ) zusammenfallen.

Dabei geht der Quotient  $\frac{y'-y}{x'-x} = \frac{bc}{ac}$  durch eine stetige Folge von Werthen endlich in das Verhältniß der verschwindenden Zunahmen von  $y$  und  $x$ , d. i. in  $\frac{dy}{dx}$  über; und man erhält die folgende Gleichung für diejenige gerade Linie, welche die Richtung der verschwindenden Sehne in  $a$  bezeichnet:

$$v-y = \frac{dy}{dx}(u-x).$$

Diese gerade Linie heißt die Berührungslinie od. Tangente. Die Gleichung einer im Berührungspunkte auf ihr senkrecht stehenden Geraden (der Normale) ergibt sich hieraus sofort:

$$u-x + \frac{dy}{dx}(v-y) = 0.$$

Um das Verhältniß  $\frac{dy}{dx}$  zu finden, braucht man nur die Gleichung  $f=0$  zu differentiiren, und hierauf die Coordinaten des Punktes  $a$  einzusetzen. Schreibt man für  $\frac{dy}{dx}$  seinen Werth, wie

er sich aus der Gleichung  $\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$  ergibt, so erhält

man eine andere Form für die Gleichung der Tangente, nämlich

$$\frac{df}{dx}(u-x) + \frac{df}{dy}(v-y) = 0. \quad \text{Um mithin für jede beliebige}$$

Curve die Gleichung der Tangente zu erhalten, differentiire man

die Gleichung der Curve; dies giebt  $\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy = 0$ ; und

schreibe hierauf  $u-x$  statt  $dx$ , und  $v-y$  statt  $dy$ . — Die Gleichung der Normale läßt sich schreiben:

$$\frac{df}{dy}(u-x) = \frac{df}{dx}(v-y).$$

Es sei  $\alpha$  der Winkel, welchen die Tangente mit der Axe der  $x$  einschließt und der allemal in dem Sinne von der positiven Axe der  $x$  nach der positiven Axe der  $y$  gezählt werden muß, so ist  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$ . Werden also z. B. diejenigen Tangenten verlangt, welche gegen die Axe der  $x$  die gegebene Neigung  $\alpha$  haben, so erhält man zur Bestimmung der sämtlichen Berührungspuncte dieser parallelen Tangenten die beiden Gleichungen

$$f(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

Für diejenigen Puncte insbesondere, wo die Tangente der Abscisse parallel ist, wird  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = 0$ ; da aber, wo sie der Ordinate parallel ist, wird  $\frac{dx}{dy} = \operatorname{cotg} \alpha = 0$ . — Dabei findet z. B.

ein Maximum der Ordinate Statt, wenn, indem  $\frac{dy}{dx} = 0$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$  nicht Null, sondern endlich und negativ ist, ein Minimum, wenn  $\frac{d^2y}{dx^2}$  positiv ist.

Beispiel. Die Gleichung für einen Kegelschnitt,  $y^2 = 2mx + nx^2$ , giebt differentiirt:  $y dy = (m + nx) dx$ ; mithin die Gleichung der Tangente:  $y(v - y) = (m + nx)(u - x)$ , oder  $yv - (m + nx)u = mx$ , weil  $y^2 - nx^2 - mx = mx$  ist; wo  $x$  und  $y$  die Coordinaten des Berührungspunctes,  $u$  und  $v$  die Coordinaten eines beliebigen Punctes der Tangente bedeuten.

41. Unter allen Geraden, welche durch einen Punct  $a$  der vorgelegten Curve gezogen werden können, schließt sich die Tangente am nächsten an die Curve an, so daß sich keine andere Gerade in der Nähe des Berührungspunctes zwischen ihr und der Curve hindurchgehend ziehen läßt. Denn es seien  $x' = x + k$ ,  $y' = y + h$ , die Coordinaten eines dem Berührungspuncte beliebig nahen Punctes der Curve; man denke sich die Gleichung

$f(x, y) = 0$  nach  $y$  aufgelöst, und es sei  $y = \varphi x$  der Ausdruck für den Ast der Curve, in welchem sich  $a$  befindet; d. h.  $y = \varphi x$  stelle diejenige Wurzel der Gleichung  $f(x, y) = 0$  vor, welche, sobald für  $x$  die Abscisse des Punctes  $a$  gesetzt wird, die Ordinate desselben Punctes als den Werth von  $\varphi x$  giebt; — so hat man

$y' = \varphi(x+k) = \varphi x + k\varphi'(x+\Theta k)$ ; ( $\Theta$  zwischen 0 u. 1), vorausgesetzt, daß  $\varphi'x$  für den Punct  $a$  nicht unendlich groß wird. Die Gleichung der Tangente an denselben Puncte ist  $v - y = \varphi'x(u - x)$ , mithin,  $u = x' = x + k$ , und  $v = v'$  gesetzt,  $v' = \varphi x + \varphi'x \cdot k$ . Für eine andere durch  $a$  gehende Gerade sei  $v - y = A(u - x)$ , und wieder,  $u - x = k$ ,  $v - y = v_1$  gesetzt,  $v_1 = \varphi x + Ak$ . Daher beträgt der Unterschied zwischen der Ordinate der Curve und der Tangente, für den Punct, dessen Abscisse  $x' = x + k$  ist,  $y' - v' = [\varphi'(x + \Theta k) - \varphi'x]k$ ; dagegen der Unterschied zwischen der Ordinate der Curve und der Geraden, für dieselbe Abscisse  $x'$ ,  $y' - v_1 = [\varphi'(x + \Theta k) - A]k$ . Indem nun  $k$  sich der Null nähert, nähert sich auch  $\varphi'(x + \Theta k) - \varphi'x$  offenbar der Null, dagegen  $\varphi'(x + \Theta k) - A$  dem von Null verschiedenen Werthe  $\varphi'x - A$ ; daher wird nothwendig für sehr kleine Werthe von  $k$ , der Unterschied  $y' - v_1$ , d. h. die Abweichung der Curve von ihrer Tangente, in der Richtung der Ordinate gemessen, kleiner als die der Curve von der Geraden; folglich kann die Gerade nicht zwischen der Curve und ihrer Tangente hindurchgehen; w. g. b. w.

Anmerkung. Wenn  $\frac{dy}{dx} = \varphi'x$  unendlich groß ist, so findet die obige Gleichung  $y' = \varphi x + \varphi'(x + \Theta k) \cdot k$  nicht Statt; alsdann kann man aber umgekehrt  $x$  als Function von  $y$  betrachten, so daß  $\frac{dx}{dy} = 0$ , und  $x = \psi y$ ,  $x' = \psi y + \psi'(y + \Theta k) \cdot h$  zu setzen ist, worauf der Beweis der nämliche bleibt.

42. Vorausgesetzt, daß  $\frac{dy}{dx} = \varphi'x$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi''x$  reelle und endliche Werthe haben, kann man setzen:

$$y' = \varphi(x+k) = \varphi x + \varphi'x \cdot k + \varphi''(x+\Theta k) \cdot \frac{k^2}{2}.$$

Da nun für die Tangente  $v' = \varphi x + \varphi'x \cdot k$  ist, so drückt  $y' - v' = \varphi''(x+\Theta k) \cdot \frac{k^2}{2}$  den Unterschied zwischen der Ordinate der Curve und der Tangente in der Nähe des Berührungspunctes aus, welcher Unterschied mithin stets gleiches Zeichen mit  $\varphi''(x+\Theta k)$  hat. Man kann  $k$  immer so klein annehmen, daß  $y'$  und  $v'$  gleiche Zeichen haben. Ferner liegt offenbar die Tangente auf der der Abscisse zugekehrten Seite der Curve oder auf der davon abgekehrten, je nachdem der Werth von  $y'$ , abgesehen vom Zeichen, größer oder kleiner ist, als der von  $v'$ . In dem ersten Falle haben  $y'$  und  $y' - v'$  gleiche Zeichen, in dem zweiten Falle (wenn  $y'$  näher an Null ist als  $v'$ ), haben sie verschiedene Zeichen; mithin haben auch  $y'$  und  $\varphi''(x+\Theta k)$  in dem ersten Falle gleiche, im zweiten verschiedene Zeichen, und folglich (da man allemal den Werth von  $k$  so klein nehmen kann, daß  $y$  und  $y'$ ,  $\varphi''x$  und  $\varphi''(x+\Theta k)$  gleiche Zeichen haben), werden auch  $y$  und  $\varphi''x = \frac{d^2y}{dx^2}$  gleiche oder ungleiche Zeichen haben, je nachdem die Tangente auf der der Abscisse zugekehrten oder auf der davon abgekehrten Seite der Curve liegt. Da aber die Tangente sich immer auf der erhabenen Seite der Curve befindet, so erhält man folgenden Satz:

In irgend einem ihrer Puncte kehrt die Curve der Axe  $x$  ihre erhabene oder hohle Seite zu, je nachdem für diesen Punct die Ordinate  $y$  und ihre zweite Ableitung  $\frac{d^2y}{dx^2}$  gleiche oder ungleiche Zeichen haben. — Wenn  $y = \varphi x$  durch Null hindurchgehend sein Zeichen ändert, dabei aber  $\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi''x$  endliche

und von Null verschiedene Werthe von gleichen Zeichen behält; so kehrt die Curve auf der einen Seite ihre hohle, auf der andern ihre erhabene Seite der Abscisse zu, wobei sie in ihrem Laufe gar keine Aenderung erleidet (Fig. 2.).

Wenn aber  $\frac{d^2y}{dx^2}$  Null wird,  $y$  mag gleichfalls verschwinden oder nicht, so schließt die Curve an dieser Stelle sich enger an die Tangente an, mit der sie eine Berührung der zweiten Ordnung hat. Verändert  $\frac{d^2y}{dx^2}$  bei diesem Durchgange durch Null sein Zeichen, so geht die Curve von einer Seite der Tangente auf die andere über; ein solcher Punkt heißt ein Wendepunkt; behält aber  $\frac{d^2y}{dx^2}$  sein Zeichen, so bleibt die Curve auf derselben Seite der Tangente, und es findet nur eine Berührung zweiter Ordnung Statt.

Im Allgemeinen findet überhaupt eine Berührung  $n$ ter Ordnung mit der Tangente Statt, sobald die sämtlichen Ableitungen von  $y = \varphi x$  von der zweiten  $\varphi''x$  bis zur  $n$ ten  $\varphi^n x$  zugleich verschwinden. Dabei wird, wenn weder  $\varphi'x$  noch  $\varphi^{n+1}(x)$  unendlich sind, für die Curve:

$$y' = \varphi x + \varphi'x \cdot k + \varphi^{n+1}(x + \Theta k) \cdot \frac{k^{n+1}}{(n+1)!},$$

und für die Tangente  $v' = \varphi x + \varphi'x \cdot k$ . Hieraus ergibt sich, daß allgemein der Unterschied der Ordinaten

$$y' - v' = \varphi^{n+1}(x + \Theta k) \cdot \frac{k^{n+1}}{(n+1)!}.$$

in der Nachbarschaft des Punktes  $(x, y)$  sein Zeichen ändert, je nachdem  $k^{n+1}$  für sehr kleine Werthe von  $k$ , mit ungleichen Zeichen, entgegengesetzte Zeichen erhält, oder nicht; mithin je nachdem  $n+1$  ungerade oder gerade ist. In dem ersten Falle wird die Curve von der Tangente in dem Berührungspunkte zugleich geschnitten, in dem zweiten nicht. Also

ist überhaupt mit einer Berührung nter Ordnung ein Wendepunct verbunden oder nicht, je nachdem  $n$  gerade oder ungerade, oder je nachdem die erste nicht mehr verschwindende Ableitung (die  $n+1$ te) von ungerader oder gerader Ordnung ist.

Beispiel. Für  $y = x^3$  wird  $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$ ,

$\frac{d^3y}{dx^3} = 6$ . Daher findet für  $x=0$ ,  $y=0$  eine Berührung zweiter Ordnung mit der Axe der Abscissen, und zugleich ein Wendepunct Statt. Uebrigens kehrt die Curve überall ihre erhabene Seite der Abscisse zu (Fig. 3.), weil  $y$  und  $\frac{d^2y}{dx^2}$  überall gleiche Zeichen haben.

Für  $y = x^4$  wird

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 24x, \quad \frac{d^4y}{dx^4} = 24.$$

Daher findet im Anfange der Coordinaten eine Berührung der dritten Ordnung, aber kein Wendepunct Statt (Fig. 4.).

43. Es wird, wie bisher, angenommen, daß die erste Ableitung von  $y$ ,  $\frac{dy}{dx}$ , einen endlichen Werth hat. (Vgl. Anm. zu §. 41.) Alsdann ist ein merkwürdiger Punct angezeigt, wenn die zweite, oder überhaupt eine höhere ( $n$ te) Ableitung unendlich groß wird, indem die vorhergehenden endlich bleiben. — Um die Beschaffenheit eines solchen Punctes mit größerer Klarheit zu bestimmen, soll die Untersuchung auf algebraische Functionen beschränkt werden. Es sei also  $f(x,y)$  eine algebraische, rationale, ganze Function von  $x$  und  $y$ , und  $f(x,y)=0$  die vorgelegte Gleichung der Curve. Es ist klar, daß die sämtlichen partiellen Ableitungen von  $f$  nach  $x$  und  $y$  ebenfalls rationale und ganze Functionen sind. Nun sei  $\lambda$  der größte gemeinschaftliche Factor der beiden Polynome  $\frac{df}{dx}$  und  $\frac{df}{dy}$ , also  $\frac{df}{dx} = \lambda \cdot \varphi$ ,



$\frac{df}{dy} = \lambda \cdot \psi$ , wo  $\lambda$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  drei ganze Functionen von  $x$  und  $y$  sind, von denen die beiden letzten keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Es ist mithin

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{df}{dx} : \frac{df}{dy} = -\varphi : \psi,$$

und man überzeugt sich leicht, daß bei fortgesetzter Differentiation die höheren Ableitungen wie  $\frac{d^n y}{dx^n}$  von der Form  $\frac{P}{Q}$  sein müssen, in welcher  $P$  und  $Q$  zwei ganze Functionen von  $x$  und  $y$  sind,  $Q$  aber nur eine Potenz von  $\psi$  sein kann. Wenn nun für irgend einen endlichen Werth von  $x$  und einen entsprechenden endlichen Werth von  $y$ ,  $\frac{d^n y}{dx^n}$  unendlich groß wird, so muß offen-

bar  $Q$  und mithin  $\psi = 0$  sein. Weil aber  $\frac{\varphi}{\psi}$  für diese Werthe von  $x$  und  $y$ , welche  $\psi$  verschwinden machen, einen endlichen Werth behält, so muß zugleich auch  $\varphi$  verschwinden; mithin muß für solche Werthe zugleich  $\frac{df}{dx} = 0$  und  $\frac{df}{dy} = 0$  sein, also der Werth von  $\frac{dy}{dx}$ , unmittelbar aus der algebraischen rationalen Gleichung  $f(x, y) = 0$  genommen, unter der Form  $\frac{0}{0}$  erscheinen.

44. Dieser Satz darf jedoch nicht umgekehrt werden; d. h. der Werth von  $\frac{dy}{dx}$  kann die unbestimmte Form  $\frac{0}{0}$  erhalten, ohne daß deswegen höhere Ableitungen unendlich groß werden. Um die Bedeutung der Form  $\frac{0}{0}$  festzustellen, seien  $a$  und  $b$  Werthe von  $x$  und  $y$ , für welche zugleich  $f(x, y) = 0$ ,  $\frac{df}{dx} = 0$ ,  $\frac{df}{dy} = 0$  wird. Setzt man zunächst bloß für  $x$  seinen Werth  $a$  diese Gleichungen, so wird der zugehörige Werth  $b$  von  $y$  die

beiden Gleichungen  $f(a,y)=0$  und  $\frac{df}{dy}=0$  zugleich befriedigen.

Wenn aber ein Werth  $b$  von  $y$  irgend ein ganzes Polynom  $\varphi y$  und zugleich seine Ableitung  $\varphi' y$  verschwinden macht, so läßt sich leicht zeigen, daß die Gleichung  $\varphi y=0$  wenigstens zweimal die Wurzel  $y=b$  enthalten, also durch  $(y-b)^n$  theilbar sein muß, wo  $n$  wenigstens gleich 2 ist. Denn nach der Voraussetzung ist  $\varphi y=(y-b)\psi y$ , und zugleich  $\varphi' y=(y-b)F y$ , wo  $\psi$  und  $F$  wieder ganze Polynome sind; mithin, wenn man die Ableitung des Ausdruckes für  $\varphi y$  nimmt, wird  $\varphi' y=(y-b)\psi' y+\psi y=(y-b)F y$ ; daher muß auch  $\psi y$  durch  $y-b$ , also  $\varphi y$  durch  $(y-b)^2$  theilbar sein, w. g. b. w.

Demnach giebt in dem hier besprochenen Falle die Gleichung  $f(x,y)=0$ , für den Werth  $x=a$ , mehrere gleiche Werthe  $b$  von  $y$ , und da jeder Werth von  $y$ , der demselben Werthe von  $x$  entspricht, einem anderen Aste der Curve zugehört, so müssen in dem Punkte  $x=a$ ,  $y=b$  mehrere Äste zusammentreffen; oder der Punkt, wo  $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$  wird, ist ein vielfacher Punkt.

Ein solch vielfacher Punkt kann oft der geometrischen Anschauung und Zeichnung gänzlich entgehen. Z. B. die Gleichung  $y^5=x^3$  giebt 5 Werthe von  $y$ , also eben so viele Äste der Curve, von denen aber nur einer reell ist, während die übrigen vier überall fehlen, außer in dem Anfange der Coordinaten, wo die Gleichung  $y^5=0$  fünf gleiche Wurzeln giebt. Dieser Punkt ist mithin als ein vielfacher Punkt anzusehen. — Aus der Gleichung  $y^5=x^3$  erhält man:  $5y^4 dy=3x^2 dx$ , also  $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$

für  $x=0$ ,  $y=0$ . Setzt man aber  $y=x^{\frac{3}{5}}$ , so kommt  $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$ ,

oder  $\frac{dx}{dy}=\frac{5}{3} \cdot x^{\frac{2}{5}}=\frac{5}{3}y^{\frac{2}{3}}=0$  für  $x=0$ ,  $y=0$ ; ferner

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{10}{9}y^{-\frac{1}{3}}.$$

Daher wechseln in diesem Punkte  $x$  und

$\frac{d^2x}{dy^2}$ , indem ersteres durch Null, letzteres durch  $\infty$  geht, beide zugleich ihre Zeichen, welche für positive  $y$  positiv, für negative  $y$  negativ sind; mithin kehrt die Curve, die Axe der  $y$  zugleich berührend und schneidend, derselben überall ihre erhabene, oder der Axe der  $x$  ihre hohle Seite zu. Der Anfang der Coord. A ist mithin zugleich ein Wendepunct (Fig. 5.).

In anderen Fällen aber zeigt sich ein solcher Punct, für welchen  $\frac{dy}{dx}$  unter der Form  $\frac{0}{0}$  erscheint; wirklich als ein vielfacher Punct, worin sich mehrere Aeste schneiden, die entweder zugleich in demselben abbrechen (eine Spitze), oder durch ihn hindurchgehen (ein Knoten).

Die Gleichung  $y^2 = (x-2)(x-3)^2$  giebt  $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$  für  $x=3$ . Löst man sie aber auf, so kommt

$$y = \pm (x-3)\sqrt{x-2}, \quad \frac{dy}{dx} = \pm \frac{3x-7}{2\sqrt{x-2}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{3x-5}{4\sqrt{x-2}};$$

mithin für  $x=3, y=0, \frac{dy}{dx} = \pm 1, \frac{d^2y}{dx^2} = \pm 1$ . In diesem Puncte P schneiden also die beiden Aeste der Curve BCPD und BEPF einander; es ist ein Knoten (Fig. 6.). Für den Scheitel B ist  $AB=x=2, y=0, \frac{dx}{dy}=0$ . Für die Puncte C und E ist

$$x=\frac{7}{3}, \quad \frac{dy}{dx}=0, \quad y=\mp \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3};$$

die Curve ist also an diesen Stellen der Abscisse parallel und der Werth der Ordinate ein Maximum. Uebrigens behalten die höheren Ableitungen  $\frac{d^3y}{dx^3}$  u. s. f. für  $x=3$ , sämmtlich endliche Werthe.

Die Gleichung  $(y-x^2)^2 = x^5$  giebt differentiiert  $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$  für

$x=0, y=0$ . Wird sie aber aufgelöst, so kommt  $y=x^2 \pm x^{\frac{3}{2}}$ ,  
 $\frac{dy}{dx}=2x \pm \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}=2 \pm \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}$ . Für  $x=0$  wird mithin  
 $\frac{dy}{dx}=0$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}=2$ , dagegen die dritte Ableitung unendlich groß.  
 Hier brechen die beiden Aeste der Curve, indem sie zusammen-  
 treffen, ab, weil  $x$  nicht negativ werden kann, und es entsteht  
 eine Spitze (A, Fig. 7.). Der eine dieser Aeste, AB, für wel-  
 chen in der Gleichung das Zeichen  $+$  gilt, hat fortwährend pos-  
 itive und wachsende Ordinaten, und kehrt seine erhabene Seite  
 gegen die Abscisse. Der andere Ast ADEF ist gegen die Abscisse  
 erhaben bis zu dem Wendepuncte C, wo  $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ ,  $x=\left(\frac{8}{15}\right)^2$ ,  
 $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}\left(\frac{8}{15}\right)^2$  ist, hierauf steigt er bis zu dem Puncte D, wo  
 ein Maximum von  $y$  Statt findet, indem  $\frac{dy}{dx}=0$ ,  $x=\left(\frac{4}{5}\right)^2$ ,  
 $\frac{d^2y}{dx^2}=-1$  ist, und senkt sich sodann, bis er bei E, wo  $x=1$ ,  
 die Abscisse durchschneidet, von welcher er sich dann auf der an-  
 deren Seite immer mehr entfernt.

Die Gleichung  $y^2=x^2-x^4$  giebt  $\frac{dy}{dx}=\frac{x-2x^3}{y}=0$   
 für  $x=0$ . Wird sie aufgelöst, so kommt  $y=\pm\sqrt{x^2-x^4}$ ,  
 $\frac{dy}{dx}=\pm\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}=\pm\frac{(2x^2-3)x}{\sqrt{1-x^2}^3}$ . Im Anfange der  
 Coordinaten ist daher  $\frac{dy}{dx}=\pm 1$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ . Die Curve hat  
 mithin hier einen Knoten, in welchem sich zwei Aeste schneiden,  
 und jeder von diesen zugleich einen Wendepunct. Für  $x=1$   
 wird  $y=0$  und die Tangente der Ordinate parallel. Dagegen  
 für  $x^2=\frac{1}{2}$  wird  $y^2=\frac{1}{4}$  und die Tangente der Abscisse parallel.  
 Uebrigens ist die Curve in einem endlichen Raume enthalten, da

eine Spitze im Anfange A der Coordinaten, bei welcher zugleich ein Minimum der Ordinate Statt findet, von welchem aus die Curve gegen die Asymptote  $y=b$  aufsteigt ( $AB=b$ . Fig. 10.).

### Berührende Curven. Krümmungskreis.

46. Eine Gleichung, die nur zwei Constanten enthält, wie diejenigen der geraden Linie, kann im Allgemeinen nur eine Linie ausdrücken, welche mit einer vorgelegten Curve in irgend einem Punkte eine Berührung erster Ordnung, also für denselben Werth von  $x$ , dieselbe Ordinate  $y$  und denselben Werth der Ableitung  $\frac{dy}{dx}$ , wie die Curve, hat. Enthält aber die Gleichung einer Curve mehr als zwei Constanten, so können dieselben im Allgemeinen so bestimmt werden, daß zwischen ihr und einer vorgelegten Curve eine Berührung höherer Ordnung Statt finde. Es seien  $f(x,y)=0$  und  $\varphi(x,v)=0$  die Gleichungen zweier Curven, in deren erster (A) zur Abscisse  $x$  die Ordinate  $y$ , in der zweiten (B) zu derselben Abscisse  $x$  die Ordinate  $v$  gehört. Alsdann findet zwischen A und B eine Berührung  $n$ ter Ordnung Statt, wenn für dieselbe Abscisse  $x$ ,  $v=y$ ,  $\frac{dv}{dx}=\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{d^2y}{dx^2}$ , ...  $\frac{d^nv}{dx^n}=\frac{d^ny}{dx^n}$  wird. Es sei  $\psi(x,w)=0$  die Gleichung einer dritten Curve C, welche mit A in dem Punkte, dessen Abscisse  $x$  ist, eine Berührung von einer niedrigeren Ordnung als der  $n$ ten habe, so daß  $y=w$ ,  $\frac{dy}{dx}=\frac{dw}{dx}$  ...  $\frac{d^my}{dx^m}=\frac{d^mw}{dx^m}$ , ( $m < n$ ); so wird, wenn  $x$  in  $x'=x+k$ , und mithin  $y, v, w$  in  $y', v', w'$ , übergehen, und zugleich  $y=Fx$ ,  $v=\Phi x$ ,  $w=\Psi x$  gesetzt wird, also  $F'x=\Phi'x=\Psi'x$ , u. s. f., vermöge des Taylorschen Satzes:

$$y'-v'=[F^{n+1}(x+\Theta k)-\Phi^{n+1}(x+\Theta k)]\frac{k^{n+1}}{(n+1)!}$$

von liefert die Hyperbel, welche bekanntlich zwei geradlinigte Asymptoten hat. Solche geradlinigte Asymptoten giebt es aber auch bei vielen anderen Curven, und um sie zu finden, muß man untersuchen, ob, für unendlich entfernte Punkte der Curven, die Tangente eine bestimmte Richtung erhält, ob also die Curve sich überhaupt einer geraden Linie mehr und mehr annähert, oder nicht. Man untersucht also zuerst, ob es zulässig ist, in der Gleichung der Curve eine der Coordinaten  $x$ ,  $y$  unendlich groß zu setzen, und welchen Werth dann die andere erhält. Hierauf ist zu untersuchen, ob die allgemeine Gleichung der Tangente  $v - y = \frac{dy}{dx}(u - x)$  für solche Punkte eine bestimmte Linie giebt,

wozu erforderlich ist, daß in der Gleichung  $v = \frac{dy}{dx}u + y - \frac{dy}{dx} \cdot x$

die Größen  $\frac{dy}{dx}$  und  $y - \frac{dy}{dx}x$  bestimmte endliche Werthe erhalten. Es sei z. B. die Gleichung  $y^3 + yx^2 = bx^2$  gegeben, so erhält man  $(3y^2 + x^2)dy - 2(b - y)x dx = 0$ ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(b - y)x}{3y^2 + x^2},$$

$$\text{und } y - \frac{dy}{dx}x = \frac{3y^3 + 3x^2y - 2bx^2}{3y^2 + x^2} = \frac{bx^2}{3y^2 + x^2}.$$

Setzt man nun  $x$  unendlich, so kann, vermöge der Gleichung  $x^2 = \frac{y^3}{b - y}$ ,  $y$  nur  $= b$  werden, da für  $y = \infty$ ,  $x^2$  negativ werden würde. Die Annahme,  $x = \infty$ ,  $y = b$ , giebt  $\frac{dy}{dx} = 0$ ,

$$y - \frac{dy}{dx}x = \frac{bx^2}{x^2} = b. \text{ Folglich ist } v = b \text{ die Gleichung einer}$$

Asymptote, die mithin der Abscisse parallel ist. — Uebrigens

wird  $\frac{dy}{dx} = 0$  da wo  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Wenn man aber die Gleichung

$(3y^2 + x^2)dy = 2(b - y)x dx$  zum zweitenmale differentiiert, und

hierauf  $x = y = 0$  setzt, so kommt  $\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 0$ . Es ist also

eine Spitze im Anfange A der Coordinaten, bei welcher zugleich ein Minimum der Ordinate Statt findet, von welchem aus die Curve gegen die Asymptote  $y=b$  aufsteigt ( $AB=b$ . Fig. 10.).

### Berührende Curven. Krümmungskreis.

46. Eine Gleichung, die nur zwei Constanten enthält, wie diejenigen der geraden Linie, kann im Allgemeinen nur eine Linie ausdrücken, welche mit einer vorgelegten Curve in irgend einem Punkte eine Berührung erster Ordnung, also für denselben Werth von  $x$ , dieselbe Ordinate  $y$  und denselben Werth der Ableitung  $\frac{dy}{dx}$ , wie die Curve, hat. Enthält aber die Gleichung einer Curve mehr als zwei Constanten, so können dieselben im Allgemeinen so bestimmt werden, daß zwischen ihr und einer vorgelegten Curve eine Berührung höherer Ordnung Statt finde. Es seien  $f(x,y)=0$  und  $\varphi(x,v)=0$  die Gleichungen zweier Curven, in deren erster (A) zur Abscisse  $x$  die Ordinate  $y$ , in der zweiten (B) zu derselben Abscisse  $x$  die Ordinate  $v$  gehört. Alsdann findet zwischen A und B eine Berührung  $n$ ter Ordnung Statt, wenn für dieselbe Abscisse  $x$ ,  $v=y$ ,  $\frac{dv}{dx}=\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{d^2y}{dx^2}$ ,  
 $\dots \frac{d^nv}{dx^n}=\frac{d^ny}{dx^n}$  wird. Es sei  $\psi(x,w)=0$  die Gleichung einer dritten Curve C, welche mit A in dem Punkte, dessen Abscisse  $x$  ist, eine Berührung von einer niedrigeren Ordnung als der  $n$ ten habe, so daß  $y=w$ ,  $\frac{dy}{dx}=\frac{dw}{dx} \dots \frac{d^my}{dx^m}=\frac{d^mw}{dx^m}$ , ( $m < n$ ); so wird, wenn  $x$  in  $x'=x+k$ , und mithin  $y, v, w$  in  $y', v', w'$ , übergehen, und zugleich  $y=Fx$ ,  $v=\Phi x$ ,  $w=\Psi x$  gesetzt wird, also  $F'x=\Phi'x=\Psi'x$ , u. s. f., vermöge des Taylorschen Satzes:

$$y'-v'=[F^{n+1}(x+\Theta k)-\Phi^{n+1}(x+\Theta k)]\frac{k^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$y' - w' = [F^{m+1}(x + \Theta k) - \psi^{m+1}(x + \Theta k)] \frac{k^{m+1}}{(m+1)!},$$

in welchen Formeln  $\Theta$  eine Zahl zwischen 0 und 1, aber nicht überall dieselbe, bezeichnet. — Da  $m$  kleiner als  $n$  angenommen ist, so wird offenbar, wenn  $k$  sehr klein ist,  $y' - v'$  der Null näher kommen, als  $y' - w'$ ; also die Curve B sich näher als die Curve C an A anschließen. Wenn daher die Curven A und B mit einander eine Berührung  $n$ ter Ordnung haben, so kann in der Nähe des Berührungspunctes keine andere Curve C zwischen A und B hindurchgehen, welche mit A eine Berührung von niedrigerer als der  $n$ ten Ordnung hat.

47. Häufig sind die Coordinaten einer Curve A als Functionen einer dritten Veränderlichen  $t$  gegeben, so daß man hat  $x = \varphi t$ ,  $y = \psi t$ . Soll nun eine Curve B, deren Gleichung  $f(x, v) = 0$  sei, mit A eine Berührung  $n$ ter Ordnung haben, so muß wie oben, für dasselbe  $x$ ,

$$v = y, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dx}, \quad \dots \quad \frac{d^n v}{dx^n} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

sein. Betrachtet man  $x$ ,  $y$  und  $v$  sämmtlich als Functionen von  $t$ , so ist  $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ , folglich, wenn man weiter differentiirt, und wieder  $\frac{dy}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{dx}{dt}$  sämmtlich als Functionen von  $t$  betrachtet,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2},$$

$$\frac{d^3 y}{dt^3} = \frac{d^3 y}{dx^3} \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + 3 \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^3 x}{dt^3}, \quad \text{u. s. w.}$$

Eben, so ist

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{d^2 v}{dx^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{dv}{dx} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \text{u. s. w.}$$



49. Wenn man sich an jeden Punkt einer Curve den Krümmungskreis gelegt denkt, so liegen die Mittelpunkte aller dieser Kreise in einer Curve. Um diese zu finden, muß man aus den Ausdrücken für die Coordinaten  $a, b$  dieser Mittelpunkte, mit Hülfe der Gleichung  $f(x, y) = 0$ , die Größen  $x$  und  $y$  eliminiren.

Z. B. für die Parabel erhält man  $x = \frac{a-p}{3}$ ,  $y = -(p^2 b)^{\frac{1}{3}}$ ; setzt man diese Werthe in die Gleichung  $y^2 = 2px$ , so kommt  $\frac{2p(p-a)}{3} = (p^2 b)^{\frac{2}{3}}$ , oder  $8(p-a)^3 = 27pb^2$  als Gleichung für die Curve der Krümmungsmittelpunkte der Parabel.

Allgemein sind offenbar der Halbmesser des Krümmungskreises, und die Coordinaten seines Mittelpunktes, welche durch die Gleichungen 1. 2. 3. §. 48. bestimmt werden, eben sowohl als  $y$ , Functionen von  $x$ , wenn man  $x$  als unabhängig veränderliche Größe betrachtet. Diese Gleichungen müssen für jeden beliebigen Werth von  $x$  identisch bestehen; man kann sie daher nach  $x$  differentiiren, indem man nicht allein  $x$  und  $y$ , sondern auch  $a, b, r$  als veränderlich ansieht. Differentiirt man die Gleichung 1., so kommt  $(x-a)dx + (y-b)dy = (x-a)da + (y-b)db + rdr$ , folglich, wegen 2,

$$(x-a)da + (y-b)db + rdr = 0. \quad 4.$$

Differentiirt man ferner die Gleichung 2., und berücksichtigt die Gleichung 3., so ergibt sich

$$da \cdot dx + db \cdot dy = 0 \quad \text{oder} \quad 1 + \frac{db}{da} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \quad 5.$$

Nun ist  $v - y = \frac{dy}{dx}(u - x)$  die Gleichung der Tangente der

vorgelegten Curve, und  $v - b = \frac{db}{da}(u - a)$  die der Tangente

der zweiten Curve, in welcher die Krümmungsmittelpunkte liegen; beide stehen, wie aus der Gleichung 5. folgt, senkrecht auf einander; also ist die Normale einer Curve zugleich Tangente der Curve ihrer Krümmungsmittelpunkte.

Um dieses anschaulich zu machen, denke man sich (Fig. 11.) in mehreren sehr nahe auf einander folgenden Punkten  $a, b, c, d$  einer Curve die Normalen errichtet; es schneiden sich je zwei auf einander folgende Normalen,  $a$  und  $b$  in  $\alpha$ ,  $b$  und  $c$  in  $\beta$ ,  $c$  und  $d$  in  $\gamma$ , u. s. w.; so bilden die Durchschnittspunkte  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  ein Polygon, dessen Seiten  $\alpha\beta, \beta\gamma$  u. s. f. sind. Je näher nun die Punkte  $a, b, c, d, \dots$  einander gebracht werden, desto genauer fallen die Durchschnitte  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  benachbarter Normalen mit den Krümmungsmittelpunkten, und die unendlich kleinen Seiten  $\alpha\beta, \beta\gamma, \dots$  mit den Tangenten der Curve der Krümmungsmittelpunkte zusammen, in welche das Polygon  $\alpha\beta\gamma \dots$  endlich übergeht. Hieraus ersieht man auch, daß die Curve  $abcd \dots$  sich betrachten läßt als entstanden durch die Abwicklung eines über die Curve der Krümmungsmittelpunkte ( $\alpha\beta\gamma \dots$ ) gespannten Fadens. Die letztere ( $\alpha\beta\gamma$ ) wird daher auch die Evolute der ersteren ( $abcd$ ), diese dagegen die Evolvente von jener genannt. Vgl. noch §. 106.

50. Beispiel. Die Curve, welche von irgend einem Punkte eines Kreises beschrieben wird, der ohne zu gleiten, auf einer geraden Linie fortgewälzt wird, heißt Cycloide. Es sei durch die Drehung des Kreises der beschreibende Punkt  $C$  (Fig. 12.), aus der anfänglichen Lage  $A$ , in die Lage  $C$  gekommen, und  $B$  der tiefste Punkt des Kreises; so ist der Kreisbogen  $CB$  der Länge der Geraden  $AB$  gleich. Sind daher  $AM = x$ ,  $MC = y$  die Coordinaten eines Punktes  $C$  der Cycloide, der dem Drehungswinkel  $CDB = \varphi$  entspricht, und wird der Halbmesser des wälzenden Kreises durch  $a$  bezeichnet, so hat man:

$$x = AB - MB = AB - CK = a\varphi - a \sin \varphi,$$

und 
$$y = DB - BK = a - a \cos \varphi,$$

also  $x = a(\varphi - \sin \varphi)$  und  $y = a(1 - \cos \varphi)$  als Gleichungen der Cycloide. — Differentiirt man dieselben, so kommt:

$$dx = a(1 - \cos \varphi) d\varphi = 2a(\sin \frac{1}{2}\varphi)^2 d\varphi,$$

$$dy = a \sin \varphi d\varphi = 2a \sin \frac{1}{2}\varphi \cos \frac{1}{2}\varphi d\varphi;$$

mithin, als Gleichung der Tangente:

$$v - y = \cotg \frac{1}{2} \varphi (u - x).$$

Ferner für die Sehne CB, von dem beschreibenden Punkte C nach dem Stützpunkte B, erhält man, da  $a\varphi$  und 0 die Coordinaten von B sind,

$$\frac{v - y}{0 - y} = \frac{u - x}{a\varphi - x} \text{ oder weil } \frac{a\varphi - x}{y} = \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi} = \cotg \frac{1}{2} \varphi \text{ ist,}$$

$u - x + \cotg \frac{1}{2} \varphi (v - y) = 0$ . Daher folgt, daß die Sehne CB auf der Tangente in C senkrecht steht, oder daß sie zugleich die Normale in C ist.

Aus den Werthen für  $dx$  und  $dy$  ergibt sich

$$dx^2 + dy^2 = a^2 d\varphi^2 [(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi] = 2a^2 d\varphi^2 (1 - \cos \varphi),$$

$$\text{oder: } dx^2 + dy^2 = 4a^2 (\sin \frac{1}{2} \varphi)^2 d\varphi^2.$$

Ferner, wenn  $\varphi$  als unabhängig veränderliche Größe betrachtet, und mithin  $d^2 \varphi = 0$  gesetzt wird,  $d^2 x = a \sin \varphi d\varphi^2$ ,  $d^2 y = a \cos \varphi d\varphi^2$ , mithin

$$\begin{aligned} dx d^2 y - dy d^2 x &= a^2 d\varphi^3 [(1 - \cos \varphi) \cos \varphi - \sin \varphi \sin \varphi] \\ &= -2a^2 (\sin \frac{1}{2} \varphi)^2 d\varphi^3; \quad \text{also} \quad \frac{dx^2 + dy^2}{dx d^2 y - dy d^2 x} = -\frac{2}{d\varphi}. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in die allgemeinen Ausdrücke zur Bestimmung des Krümmungskreises (§. 48.), so kommt:

$$u = a(\varphi - \sin \varphi) + 2a \sin \varphi = a(\varphi + \sin \varphi);$$

$$v = a(1 - \cos \varphi) - 2a(1 - \cos \varphi) = -a(1 - \cos \varphi);$$

wenn man durch  $u$  und  $v$  die Coordinaten des Krümmungspunctes (d. i.  $a$  und  $b$  in §. 48.) bezeichnet; und für den Krümmungshalbmesser  $r = 4a \sin \frac{1}{2} \varphi$ .

Die beiden Gleichungen  $u = a(\varphi + \sin \varphi)$  und  $v = -a(1 - \cos \varphi)$  bestimmen die Evolute der Cycloide. Man setze  $u' + u = a\pi$ ,  $v' - v = 2a$ , so erhält man:

$$u' = a(\pi - \varphi) - a \sin \varphi \quad \text{und} \quad v' = a + a \cos \varphi,$$

oder, wenn  $\pi - \varphi = \varphi'$  gesetzt wird,

$$u' = a\varphi' - a \sin \varphi', \quad v' = a - a \cos \varphi'.$$

Daher ist die Evolute einer Cycloide wieder eine Cycloide von derselben Gestalt, in der Lage, wie Fig. 13. zeigt. Hier ist ABC eine Cycloide, wie sie durch einmalige Umdrehung des wälzenden Kreises  $a$  entsteht; bei fortgesetzter Wälzung des Kreises entstehen immer wieder gleiche Bogen, wie ABC, welchen Umstand auch die Gleichungen der Curve ausdrücken. Ferner ist  $AC = 2a\pi$ ,  $AD = a\pi$ ,  $BD = DE = 2a$ , und AEC die Evolute oder die Curve der Krümmungsmittelpunkte von ABC, aus zwei cycloidischen Hälften bestehend. — Die Normale an irgend einen Punkt F der Cycloide berührt zugleich die Evolute AEC in einem entsprechenden Punkte G.

## Ueber die Auffindung der Wurzeln algebraischer Gleichungen mit einer unbekannten Grösse.

51: Im Folgenden soll der wesentlichste Theil einer Methode vorgetragen werden, nach welcher der französische Akademiker Fourier, in der 1831, nach seinem Tode, erschienenen Analyse des équations déterminées, die Zahlenwerthe der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen von beliebigen Graden, mit einer verhältnißmäßig sehr großen Leichtigkeit finden gelehrt hat. Die Herleitung dieser Methode wird, wie angemessen ist, rein algebraisch sein; da aber auch gewisse geometrische Constructionen, welche die Resultate sehr anschaulich machen, nicht zu übergehen waren, so mußte die Theorie der ebenen Curven vorausgesetzt werden, und diese Darstellung ihren Platz nach derselben erhalten.

Es sei  $f_x$  ein algebraisches Polynom von  $n$ ten Grade, nämlich:

$$f_x = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + kx + l,$$

dessen höchstes Glied  $x^n$  den Coefficienten 1, dessen übrige Glieder aber gegebene reelle Zahlen zu Coefficienten haben. Jede Zahl  $\alpha$ , welche an die Stelle von  $x$  gesetzt, den Werth von  $f_\alpha$  gleich Null macht, heißt eine Wurzel der Gleichung  $f_x = 0$ . Wenn es eine solche Zahl  $\alpha$  giebt, und das Polynom  $f_x$  mit der Differenz  $x - \alpha$  dividirt wird, so ist der Quotient ein ganzes Polynom vom  $n-1$ ten Grade; denn da  $f_\alpha = 0$  ist, so ist

$$\frac{f_x}{x - \alpha} = \frac{f_x - f_\alpha}{x - \alpha} = \frac{x^n - \alpha^n}{x - \alpha} + a \cdot \frac{x^{n-1} - \alpha^{n-1}}{x - \alpha} + \dots + k,$$

woraus das Behauptete folgt. Setzt man daher  $f_x = (x - \alpha)\psi_x$ , so muß, wenn die Gleichung noch eine zweite Wurzel  $\beta$  hat,

$\psi\beta=0$ , also  $\psi x$  durch  $x-\beta$ , und folglich  $fx$  durch das Product  $(x-\alpha)(x-\beta)$  theilbar sein. Ist  $\beta=\alpha$ , so ist  $fx$  durch  $(x-\alpha)^2$  theilbar, oder die Gleichung hat 2 gleiche Wurzeln  $\alpha$ . Ist überhaupt  $fx$  durch  $(x-\alpha)^m$  theilbar, so hat die Gleichung  $m$  gleiche Wurzeln  $\alpha$ . Ausdann ist  $fx=(x-\alpha)^m\varphi x$ , mithin  $f'x=m(x-\alpha)^{m-1}\varphi x+(x-\alpha)^m\varphi'x$ , u. s. f.; daher ist nicht allein  $f\alpha=0$ , sondern auch  $f'\alpha=0$ ,  $f''\alpha=0$ , ...  $f^{m-1}(\alpha)=0$ , weil alle diese Ableitungen den Factor  $x-\alpha$  enthalten. Dagegen ist die folgende Ableitung  $f^m(x)$  für  $x=\alpha$  nicht mehr Null, vorausgesetzt, daß  $\varphi\alpha$  nicht Null, also  $\varphi x$  nicht durch  $x-\alpha$  theilbar, oder die Wurzel  $\alpha$  nicht mehr als  $m$  mal vorhanden ist; vielmehr ist  $f^m(\alpha)=m!\varphi\alpha$ . Hieraus folgt, daß die Gleichung  $fx=0$ , sobald für  $x=\alpha$  das Polynom  $fx$  und seine  $m-1$  nächstfolgenden Ableitungen Null werden, die folgende  $f^m(\alpha)$  aber nicht,  $m$  gleiche Wurzeln  $\alpha$  haben muß. Denn hätte sie die Wurzel  $\alpha$  mehr als  $m$  mal, so müßte  $f^m(\alpha)$  noch Null werden; und hätte sie dieselbe weniger als  $m$  mal, so könnten nicht alle Ableitungen bis zu  $f^{m-1}(\alpha)$  Null sein; nach dem eben Bewiesenen.

52. Diese Sätze, und noch mehrere andere, deren hier nicht erwähnt werden soll, zeigen, daß bei der Auffuchung der Wurzeln der Gleichung  $fx=0$ , die Kenntniß der Wurzeln ihrer Ableitungen  $f'x$ ,  $f''x$ , u. s. f. von Nutzen sein kann. Nach der Fourierschen Methode muß man in der That, um die Wurzeln der Gleichung  $fx=0$  zu finden, die sämtlichen Ableitungen von  $fx$  in Betracht ziehen.

Man bilde die sämtlichen Ableitungen von

$$X = fx = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + kx + l;$$

$$\text{nämlich: } X_1 = f'x = nx^{n-1} + a(n-1)x^{n-2} + \dots + k,$$

$$X_2 = f''x = n \cdot n-1 \cdot x^{n-2} + \dots$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$X_n = f^n x = n!.$$

Setzt man in alle diese Ableitungen und in die Function  $fx$  ei-

nen sehr großen negativen Werth, oder  $-\infty$ , für  $x$  ein, so sieht man leicht, daß der Werth irgend einer derselben  $f^n(x)$  oder  $X_n$  positiv oder negativ ist, je nachdem der Exponent  $n-m$  des höchsten Gliedes von  $X_n$  gerade oder ungerade ist. Fängt man also von der untersten  $X_n$  an, so ist diese, wie für jeden Werth, positiv, die folgende  $X_{n-1}$  negativ,  $X_{n-2}$  wieder positiv, u. s. f. Schreibt man diese Zeichen, von dem der  $n$ ten Ableitung  $X_n$  anfangend, in eine Reihe, so beginnt diese mit  $+$ , worauf  $-$ , dann wieder  $+$ , u. s. f. abwechselnd folgt; oder die Reihe der Zeichen hat, für  $x=-\infty$ ,  $n$  Zeichenwechsel. — Setzt man dagegen  $x=+\infty$ , so werden alle Ableitungen und die Function positiv, und die Reihe der Zeichen für  $x=+\infty$ , enthält daher  $n$  Zeichenfolgen. Indem also  $x$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  wächst, gehen  $n$  Zeichenwechsel in den Reihen der Zeichen verloren.

Beispiel.  $X=x^3-5x^2-7x-4$ .  $X_1=3x^2-10x-7$ .  
 $X_2=6x-10$ .  $X_3=6$ .

Man bilde folgende Tafel:

	$X_3$	$X_2$	$X_1$	$X$
$x=-\infty$	$+$	$-$	$+$	$-$
$x=+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$

In der ersten Zeichenreihe, für  $x=-\infty$ , wechseln die Zeichen dreimal, in der zweiten, für  $x=+\infty$ , gar nicht, oder alle Zeichenwechsel sind, für  $x=+\infty$ , verloren gegangen.

53. Werden in die Reihe  $X_n, X_{n-1}, \dots, X_2, X_1, X$  zwei Werthe  $a$  und  $b$  von  $x$  gesetzt (von denen  $b$  die untere,  $a$  die obere Grenze des Intervalles  $b-a$  heißen soll, wenn die Differenz  $b-a$  positiv ist), die so beschaffen sind, daß weder für sie noch für irgend einen zwischen ihnen liegenden Werth von  $x$ , die Function  $f_x$  oder eine ihrer Ableitungen Null wird; und werden die den Werthen von  $a$  und  $b$  entsprechenden Zeichenreihen gebildet; so können diese nicht von einander verschieden sein. Wenn sich dagegen bei  $a$  und  $b$  eine Verschiedenheit in den Zeichenreihen findet, so kann sie nur daher rühren, daß zwischen den Gren-

zen des Intervalles wenigstens eine der Functionen  $X, X_1, X_2, \dots X_{n-1}$  ihr Zeichen gewechselt hat, und also für einen gewissen Werth von  $x$  Null geworden ist. Welche Verschiedenheit in den Zeichenreihen bei  $a$  und  $b$  nun auch Statt finden mag, so ist einer der Hauptsätze, auf welche das Verfahren, die Wurzeln zu finden, sich stützt, folgender:

Die Anzahl der Zeichenwechsel an der unteren Grenze  $b$  kann niemals größer sein, als diejenige an der oberen Grenze  $a$ . Denn es werde erstens angenommen, daß zwischen  $a$  und  $b$  die Function  $fx$  einmal verschwinde, für  $x=c$ , außerdem aber in diesem Intervalle weder  $fx$  noch einmal, noch irgend eine Ableitung von  $fx$  Null werde. Medann muß offenbar jede Ableitung in dem Intervalle  $b-a$  ihr Zeichen unverändert behalten, und es kann überhaupt nur bei dem Durchgange von  $fx$  durch  $fc=0$  eine Aenderung der Zeichen eintreten. Bezeichnet man demnach durch  $dc$  eine beliebig kleine positive Größe, und bildet man die Zeichenreihen, welche den Werthen  $c-dc$  und  $c+dc$  entsprechen, so stimmen diese für alle Ableitungen gänzlich überein, und um den Unterschied der Zeichenwechsel zu finden, braucht man nur die Werthe von  $X$  und  $X_1$ , für  $x=c-dc$  und für  $x=c+dc$  in Betracht zu ziehen. Nun ist aber  $fc=0$ , folglich  $f(c+dc)=fc+dcf'c=+dcf'c$ , wenn man die höheren Potenzen von  $dc$  wegläßt, weil  $dc$  beliebig klein, und  $f'c$  nicht Null ist; dagegen  $f(c-dc)=-dc \cdot f'c$ . Man erhält daher folgende Tafel:

	$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$	$X_1$	$X$
$c-dc$	$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$	$f'c$	$-dcf'c$
$c$	$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$	$f'c$	$0$
$c+dc$	$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$	$f'c$	$+dcf'c$

Man denke sich hier statt  $f'c$  und  $dcf'c$  überall bloß die Zeichen dieser Größen gesetzt, so ist augenscheinlich, daß, welches Zeichen auch  $f'c$  haben mag, die beiden Glieder an der oberen Grenze  $c-dc$ , einen Zeichenwechsel, dagegen die an der unteren Grenze  $c+dc$ , eine Zeichenfolge darbieten, und da die übrigen Zeichen



in beiden Reihen dieselben sind, - so bietet die Reihe an der unteren Grenze einen Zeichenwechsel weniger dar, als die an der oberen Grenze; folglich geht, indem  $fx$  Null wird, ein Zeichenwechsel verloren.

54. Man nehme ferner an, die Gleichung habe mehrere gleiche Wurzeln  $c$ , z. B. drei, so ist  $fc=0$ ,  $f'c=0$ ,  $f''c=0$ . Vorausgesetzt nun, daß keine andere Ableitung zugleich noch Null wird, gehen auch immer eben so viele Zeichenwechsel verloren, als gleiche Wurzeln da sind. Es wird hinreichen, dies nur an dem Beispiele von drei gleichen Wurzeln zu zeigen. Man findet

$$f(c+dc) = fc + dcf'c + \frac{dc^2}{2} f''c + \frac{dc^3}{6} f'''c,$$

mit Weglassung der höheren Potenzen; also, weil  $fc=0$ ,  $f'c=0$ ,  $f''c=0$ ,  $f(c+dc) = \frac{+dc^3}{6} f'''c$ , und eben so

$$f(c-dc) = -\frac{dc^3}{6} f'''c; \quad \text{ferner} \quad f'(c+dc) = \frac{dc^2}{2} f'''c,$$

$f'(c-dc) = dcf'''c$ , u. s. w. Hieraus ergibt sich folgende Tafel:

		$X_3$	$X_2$	$X_1$	$X$
$c-dc$	$\cdot \cdot \cdot$	$f'''c$	$-dcf'''c$	$\frac{+dc^2}{2} f'''c$	$\frac{-dc^3}{6} f'''c$
$c$	$\cdot \cdot \cdot$	$f'''c$	0	0	0
$c+dc$	$\cdot \cdot \cdot$	$f'''c$	$+dcf'''c$	$\frac{+dc^2}{2} f'''c$	$\frac{+dc^3}{6} f'''c$

woraus augenscheinlich ist, daß bei  $c-dc$  drei Zeichenwechsel mehr sind, als bei  $c+dc$ , also, wenn drei gleiche Wurzeln vorhanden sind, auch drei Zeichenwechsel verloren gehen, w. z. b. w.

55. Man nehme ferner an, daß für  $x=c$  eine Ableitung verschwinde. Alsdann ist  $f^m(c)=0$ , und  $f^m(c+dc)=dcf^{m+1}(c)$ ,  $f^m(c-dc)=-dcf^{m+1}(c)$ ; daher erhält man folgende Tafel:

	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$X_{m+1}$	$X_m$	$X_{m+1}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$c-dc$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$f^{m+1}(c)$	$-dc f^{m+1}(c)$	$f^{m-1}(c)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$c$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$f^{m+1}(c)$	$0$	$f^{m-1}(c)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$c+dc$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$f^{m+1}(c)$	$+dc f^{m+1}(c)$	$f^{m-1}(c)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Wenn nun  $f^{m+1}(c)$  und  $f^{m-1}(c)$  gleiche Zeichen haben, so entstehen folgende Zeichenreihen, je nachdem die Zeichen beide positiv oder negativ sind:

	$\dots$	$X_{m+1}$	$X_m$	$X_{m-1}$	$\dots$		$\dots$	$X_{m+1}$	$X_m$	$X_{m-1}$	$\dots$
$c-dc$	$\dots$	$+$	$-$	$+$	$\dots$	$c-dc$	$\dots$	$-$	$+$	$-$	$\dots$
$c$	$\dots$	$+$	$0$	$+$	$\dots$	$c$	$\dots$	$-$	$0$	$-$	$\dots$
$c+dc$	$\dots$	$+$	$+$	$+$	$\dots$	$c+dc$	$\dots$	$-$	$-$	$-$	$\dots$

In jedem dieser Fälle ist offenbar, daß die Reihe bei  $c-dc$  zwei Zeichenwechsel mehr hat, als die bei  $c+dc$ , oder daß, indem die Ableitung  $f^m(x)$  Null wird, während die beiden benachbarten gleiche Zeichen haben, zwei Zeichenwechsel verloren gehen.

Haben aber  $f^{m+1}(c)$  und  $f^{m-1}(c)$  ungleiche Zeichen, so entsteht immer eine der beiden folgenden Zeichenreihen:

	$\dots$	$X_{m+1}$	$X_m$	$X_{m-1}$	$\dots$		$\dots$	$X_{m+1}$	$X_m$	$X_{m-1}$	$\dots$
$c-dc$	$\dots$	$+$	$-$	$-$	$\dots$	$c-dc$	$\dots$	$-$	$+$	$+$	$\dots$
$c$	$\dots$	$+$	$0$	$-$	$\dots$	$c$	$\dots$	$-$	$0$	$+$	$\dots$
$c+dc$	$\dots$	$+$	$+$	$-$	$\dots$	$c+dc$	$\dots$	$-$	$-$	$+$	$\dots$

In diesem Falle sind oben so viele Zeichenwechsel als unten, oder es geht kein Zeichenwechsel verloren.

56. Man nehme ferner an, daß mehrere Ableitungen hinter einander verschwinden, die Function  $f_x$  und die übrigen Ableitungen aber nicht. Es sei

$$f^m(c)=0, f^{m-1}(c)=0, f^{m-2}(c)=0, \dots, f^{m-\mu}(c)=0;$$

so hat man offenbar, weil  $f^{m+1}(c)$  nicht mehr Null ist,

$$f^m(c+dc)=dc f^{m+1}(c); f^{m-1}(c+dc)=\frac{dc^2}{2} f^{m+1}(c); \text{ u. s. w.}$$

$$f^{m-\mu}(c+dc)=\frac{(dc)^{\mu+1}}{(\mu+1)!} f^{m+1}(c).$$

Schreibt man in vorstehenden Formeln  $-dc$  statt  $dc$ , so erhält man die Werthe der Ableitungen für  $c-dc$ .

Die für  $x=c$  verschwindenden Ableitungen erhalten also an der oberen Grenze  $c-dc$  abwechselnde, an der unteren  $c+dc$  gleiche Zeichen. Wenn nun die Anzahl  $\mu+1$  dieser verschwindenden Ableitungen gerade ist, so haben  $f^{m-\mu}(c-dc)$  und  $f^{m-\mu}(c+dc)$  gleiche Zeichen; und mithin enthält die Reihe an der oberen Grenze  $\mu+1$  Zeichenwechsel mehr als die an der unteren Grenze, oder es gehen  $\mu+1$ , d. i. eine gerade Anzahl von Z. W. verloren. Wenn aber die Anzahl der verschwindenden Ableitungen ungerade ist, so haben  $f^{m-\mu}(c-dc)$  und  $f^{m-\mu}(c+dc)$  entgegengesetzte Zeichen, und bilden demnach mit der folgenden nicht verschwindenden Ableitung  $f^{m-\mu-1}(c)$ , die eine Zeichenfolge, die andere einen Zeichenwechsel. Befindet sich dieser Zeichenwechsel an der oberen Grenze  $c-dc$ , so entspricht ihm an der unteren Grenze eine Zeichenfolge; und es gehen mithin  $\mu+2$  Zeichenwechsel verloren. Befindet sich dagegen an der oberen Grenze zuletzt eine Zeichenfolge, so entspricht dieser an der unteren Grenze ein Zeichenwechsel, und die Anzahl der Zeichenwechsel, welche im Ganzen verloren gehen, beträgt  $\mu+1-1=\mu$ . Dieselbe ist, wie man sieht, in beiden Fällen gerade. — Wenn endlich der Werth  $x=c$  mehrere Gruppen auf einander folgende Ableitungen in verschiedenen Theilen der Reihe verschwinden macht, so ist klar, daß man, um die Anzahl der Zeichenwechsel zu finden, die im Ganzen an der unteren Grenze verloren gegangen sind, nur die vorstehenden Sätze auf jede einzelne Gruppe verschwindender Ableitungen anzuwenden braucht. Daher folgt allgemein:

1. An der unteren Grenze können nie mehr Zeichenwechsel vorhanden sein, als an der oberen.
2. So oft  $f_x$  Null wird, geht allemal ein Zeichenwechsel verloren.
3. So oft nur Ableitungen Null werden,  $f_x$  aber nicht, geht

immer eine gerade Anzahl von Zeichenwechseln verloren, die auch Null sein kann.

Wenn nun die Gleichung des  $n$ ten Grades  $fx=0$   $n$  reelle Wurzeln hat, so kann kein Zeichenwechsel verloren gehen, ohne daß zugleich  $fx$  Null wird. Denn es gehen überhaupt von  $-\infty$  bis  $+\infty$  nur  $n$  Zeichenwechsel verloren, und so oft  $fx$  Null wird, geht immer ein Z. W. verloren. — Wenn die Gleichung  $n-2$  reelle Wurzeln hat, so müssen zwei Zeichenwechsel verloren gehen, ohne daß  $fx$  Null wird; also müssen dieselben durch das Verschwinden von Ableitungen beide zugleich verloren gehen. — Wenn die Gleichung  $n-4$  reelle Wurzeln hat, so müssen vier Zeichenwechsel durch das Verschwinden von Ableitungen verloren gehen. Ueberhaupt fehlen der Gleichung so viele Paare von Wurzeln, als Paare von Zeichenwechseln durch das Verschwinden von Ableitungen verloren gehen.

57. Diese Regeln sollen wieder auf die obige Gleichung  $x^3-5x^2-7x-4=0$  angewendet werden. Man bilde also die Zeichenreihen, indem man für  $x$  nach und nach steigende Werthe, z. B.  $-\infty, -10, -1, 0, 1$ , u. s. f. einsetzt, wie folgt:

	$X_3$	$X_2$	$X_1$	$X$	
$-\infty$	+	—	+	—	3 Z. W.
$-10$	+	—	+	—	3 Z. W.
$-1$	+	—	+	—	3 Z. W.
$0$	+	—	—	—	1 Z. W.
$1$	+	—	—	—	1 Z. W.
$10$	+	+	+	+	0 Z. W.
					} 2 Z. W. verl.
					} 1 Z. W. verl.

Es geht also zwischen  $-\infty$  und  $-1$  kein Z. W. verloren, dagegen zwei Z. W. zwischen  $-1$  und  $0$  und einer zwischen  $1$  und  $10$ . Da aber bei der Grenze  $10$  alle Zeichenwechsel verschwunden sind, so kann zwischen  $10$  und  $+\infty$  keiner mehr verloren gehen. In einem Intervalle, in welchem kein Z. W. verloren geht, ist auch keine Wurzel zu suchen. Daher kön-

nen sich, der vorstehenden Tafel zufolge, die Wurzeln nur zwischen  $-1$  und  $0$  und zwischen  $1$  und  $10$  befinden. Zwischen  $-1$  und  $0$  gehen zwei Z. W. verloren; man kann also noch nicht wissen, ob dies bloß Folge des Verschwindens einer Ableitung ist, oder ob  $f_x$  in diesem Intervalle zweimal Null wird; ob also die beiden angezeigten Wurzeln fehlen oder vorhanden sind. Zwischen  $1$  und  $10$  geht ein Z. W. verloren, also ist es sicher, daß zwischen diesen Grenzen  $f_x$  einmal Null wird; denn würden nur Ableitungen Null, so müßte eine gerade Anzahl von Z. W. verloren gehen. Mehr als eine Wurzel kann sich aber zwischen den Grenzen  $1$  und  $10$  nicht befinden, so wenig als zwischen  $-1$  und  $0$  mehr als zwei, weil so oft  $f_x$  Null wird, auch allemal ein Zeichenwechsel verloren geht.

Allgemein kann eine Gleichung in keinem Intervalle mehr Wurzeln haben, als in demselben Zeichenwechsel verloren gehen. Ist die Anzahl der verloren gehenden Zeichenwechsel ungerade, so ist eine oder eine ungerade Anzahl von Wurzeln in dem Intervalle vorhanden. Ist aber die Anzahl der verlorenen Zeichenwechsel gerade, so kann sich in dem Intervalle nur eine gerade Anzahl von Wurzeln befinden, die auch Null sein kann.

Die Aufgabe zerfällt somit in zwei andere: Erstens zu entscheiden, ob angezeigte Wurzeln fehlen oder vorhanden sind; zweitens die vorhandenen zu berechnen.

58. Die erste dieser Aufgaben findet gar nicht Statt, wenn in einem Intervalle ein Z. W. verloren geht; denn alsdann ist eine Wurzel in demselben unzweifelhaft vorhanden. Gehen aber in einem Intervalle zwei Z. W. verloren, so können sich entweder zwei Wurzeln darin befinden, oder beide fehlen. In diesem Falle zähle man zuerst, wie viele Wurzeln nicht allein von  $f_x$ , sondern auch von jeder der Ableitungen  $f_x, f'_x, \dots$ , in dem Intervalle angezeigt sind und schreibe die Zahlen oder Zeiger, welche dieses angeben, zwischen die Reihen der Zeichen. Zu dem Ende braucht man nur zu zählen, wie viele Z. W. von  $f''(x)$

bis zu jeder Ableitung an der oberen Grenze mehr sind als an der unteren. In dem obigen Beispiele war

	$X_3$	$X_2$	$X_1$	$X$
$-1$	$+$ $0$	$-$ $0$	$+$ $1$	$-$ $2$
$0$	$+$	$-$	$-$	$-$

Die zweite Ableitung  $X_2$  hat also keine Wurzel zwischen  $-1$  und  $0$ ; dagegen hat die erste eine, weil die Zeichen der Ableitungen  $X_3$ ,  $X_2$ ,  $X_1$  bei  $-1$  einen Wechsel mehr darbieten als bei  $0$ . Ferner sind 2 Wurzeln der Gleichung  $X=0$  angezeigt; daher entsteht die Reihe der Zeiger

$$0 \quad 0 \quad 1 \quad 2.$$

Ueber diese Reihe der Zeiger ist im Allgemeinen zu bemerken, daß zwei auf einander folgende Zeiger nie um mehr als  $\pm 1$  verschieden sein können; oder, wenn  $z$  der Zeiger von  $f^m(x)$  ist, d. h. die Anzahl der in dem Intervalle angezeigten Wurzeln der Gleichung  $f^m(x)=0$ , so ist der Zeiger der nächstfolgenden Ableitung  $f^{m-1}(x)$  entweder wieder  $z$ , oder  $z+1$ , oder  $z-1$ ; denn durch das Hinzutreten der Ableitung  $f^{m-1}(x)$  kann zu den vorigen Zeichenwechseln entweder oben und unten ein Zeichenwechsel oder auch eine Zeichenfolge hinzutreten, wodurch der Zeiger  $z$  nicht geändert wird, oder es kann oben ein Zeichenwechsel, unten eine Zeichenfolge entstehen, wodurch der Zeiger  $z+1$  sich ergibt, oder oben eine Zeichenfolge, unten ein Zeichenwechsel, wodurch der Zeiger  $z-1$  wird. — Also kann z. B. einem Zeiger 2 nicht 0, sondern nur 1 oder 2 oder 3 vorhergehen oder folgen.

Man betrachte zunächst den Fall, in welchem die Reihe der Zeiger sich mit 0, 1, 2 endigt, auf den hernach alle übrigen zurückgeführt werden sollen. Dieser Fall findet, wie man sieht, in dem vorgelegten Beispiele Statt. Die Gleichung  $f'x=0$  hat alsdann keine Wurzel in dem Intervalle; weil der Zeiger von  $X_2$  Null ist; dagegen hat  $fx$  eine Wurzel, die nicht fehlen kann, und von  $fx$  sind zwei Wurzeln angezeigt. In diesem Falle müs-

sen die Reihen der Zeichen an den Grenzen  $a$  und  $b$  des Intervalles sich nothwendig auf eine der beiden folgenden Arten endigen:

1.	$\dots X_2$	$X_1$	$X$	2.	$\dots X_2$	$X_1$	$X$
$a$	$\dots -$	$+$	$-$	$a$	$\dots +$	$-$	$+$
	$0$	$1$	$2$		$0$	$1$	$2$
$b$	$\dots -$	$-$	$-$	$b$	$\dots +$	$+$	$+$

Offenbar nämlich müssen  $f'a$  und  $f'b$  gleiche Zeichen haben, den hätten sie ungleiche Zeichen, so müßte die Function  $X_2$  zwischen diesen Grenzen das Zeichen wechseln, und also Null werden, was nicht der Fall sein kann, weil der Zeiger von  $X_2$  Null ist. Wenn alsdann im Ganzen noch zwei Z. W. verloren gehen sollen, so kann dies nur dadurch geschehen, daß die Folge der drei Glieder  $f'a$ ,  $f'a$ ,  $f'a$  zwei Zeichenwechsel darbietet, dagegen die Folge  $f'b$ ,  $f'b$ ,  $f'b$  gar keinen; woraus hervorgeht, daß die Zeichenreihen entweder wie in 1 oder wie in 2. endigen müssen.

Gesetzt es befinden sich zwei reelle Wurzeln  $\alpha$  und  $\beta$  zwischen  $a$  und  $b$ ; so sei, wofern nicht beide einander gleich sind,  $\beta > \alpha$ ; mithin  $\alpha > a$  und  $b > \beta$ . Man setze  $\alpha = a + u$ ,  $\beta = b - v$ , so sind  $u$  und  $v$  positiv und man hat  $f(a+u)=0$ ,  $f(b-v)=0$ , d. h.

$$fa + uf'(a + \Theta u) = 0, \quad fb - vf'(b - \Theta v) = 0.$$

( $\Theta$  ist nicht in beiden Formeln dieselbe Zahl, aber immer ein positiver ächter Bruch).

Daher folgt

$$u = \frac{-fa}{f'(a + \Theta u)} \quad \text{und} \quad v = \frac{fb}{f'(b - \Theta v)}.$$

Aus den obigen Tafeln 1. und 2. ersieht man sofort, daß  $\frac{-fa}{f'a}$  und  $\frac{fb}{f'b}$  positiv sind, und, da die Werthe von  $u$  und  $v$  es ebenfalls sind, so folgt, daß  $f'a$  und  $f'(a + \Theta u)$ , so wie  $f'b$  und  $f'(b - \Theta v)$  gleiche Zeichen haben. Ferner aber ist zu schließen,

daß  $\frac{-fa}{fa}$  kleiner als  $u$  ist. Denn, wenn der Fall derjenige in Tafel 1. ist, nimmt  $fx$  von  $fa$  bis  $fb$  beständig ab, weil  $f'x$  negativ ist; also ist  $fa$  größer als der ebenfalls positive Werth von  $f(a+0u)$ ; findet aber der Fall 2. Statt, so ist  $-fa$  positiv und größer als der gleichfalls positive Werth von  $-f(a+0u)$ , weil  $-fx$  von  $a$  bis  $b$  abnimmt, indem  $-f'x$  negativ ist; also ist in jedem dieser beiden Fälle  $\frac{-fa}{fa} < u$ .

Auf ähnliche Weise findet man, daß  $\frac{fb}{fb} < v$  ist. Folglich ist

$a + \frac{-fa}{fa} < a + u$ , d. i. kleiner als die Wurzel  $\alpha$ , dagegen

$b - \frac{fb}{fb} > b - v$ , d. i. größer als die Wurzel  $\beta$ ; und mithin sind

$$a' = a - \frac{fa}{fa} \quad \text{und} \quad b' = b - \frac{fb}{fb}$$

die Grenzen eines neuen Intervalles  $b' - a'$ , in welchem die Wurzeln  $\alpha$  und  $\beta$  liegen, und welches kleiner ist, als das vorige  $b - a$ . Man hat also

$$\alpha > a - \frac{fa}{fa}, \quad \beta < b - \frac{fb}{fb};$$

oder 
$$\alpha - a > \frac{-fa}{fa}, \quad b - \beta > \frac{fb}{fb};$$

mithin durch Addition

$$(b - a) - (\beta - \alpha) > \frac{-fa}{fa} + \frac{fb}{fb},$$

oder 
$$b - a > \beta - \alpha + \frac{-fa}{fa} + \frac{fb}{fb}.$$

In dieser Formel ist  $\beta - \alpha$  Null oder positiv, daher um so mehr

$$b - a > \frac{-fa}{fa} + \frac{fb}{fb}.$$

59. Die Bedeutung dieser Formeln läßt sich durch die



Zeichnung derjenigen Curve, deren Gleichung  $y = fx$  ist, sehr anschaulich machen. Es ist klar, daß die Wurzeln der Gleichung  $fx = 0$  den Abscissen derjenigen Punkte entsprechen, in welchen die Axe  $x$  von der Curve geschnitten wird, und die Wurzeln der Ableitung  $f'x$  denjenigen Punkten, in welchen die Tangente der Curve der Abscisse parallel wird. Sobald ferner die Curve einen Wendepunct hat, muß  $f'x = 0$  sein; im Allgemeinen aber kehrt die Curve der Axe  $x$  die erhabene oder hohle Seite zu, je nachdem  $fx$  und  $f'x$  gleiche oder ungleiche Zeichen haben. Betrachtet man nun den Bogen der Curve, welcher sich in dem Intervalle zwischen  $a$  und  $b$  befindet, in welchem  $f'x$  keine,  $fx$  eine,  $fx$  zwei (möglicherweise auch fehlende) Wurzeln hat; so bemerkt man, nach Z. 1. und 2. des §. 58., daß die Curve sowohl bei  $a$  als bei  $b$  gegen die Abscisse erhaben ist, daß die ferner, ohne zwischen diesen Grenzen einen Wendepunct zu haben, in einem Punkte der Abscisse parallel wird. Sind die beiden Wurzeln von  $fx$  in dem Intervalle vorhanden, so wird der Bogen von der Axe  $x$  zweimal geschnitten (Fig. 14.), fehlen sie aber, so liegt derselbe ganz auf einer Seite dieser Axe, ohne von derselben geschnitten oder berührt zu werden (Fig. 15.). Nun lege man in den Punkten  $A$  und  $B$  der Curve, welche den Punkten  $a$  und  $b$  der Axe entsprechen, Tangenten  $Aa'$ ,  $Bb'$ , so ist z. B. die Gleichung der Tangente in  $A$  folgende:

$$y - fa = f'a(x - a).$$

Man findet die Abscisse des Punktes  $a'$ , in welchem die Tangente die Axe  $x$  trifft, indem man  $y = 0$  setzt, nämlich  $x = a - \frac{fa}{f'a}$ , und die Differenz  $x - a = aa' = -\frac{fa}{f'a}$ . (Den Abschnitt  $aa'$  der Axe, zwischen der Ordinate und der Tangente eines Punktes  $A$ , pflegt man auch die Subtangente zu nennen.)

Auf dieselbe Art findet man, vermittelt der Gleichung für die Tangente an  $B$ ,

$$y - fb = f'b(x - b)$$

die Abscisse  $x$  von  $b'$  gleich  $b - \frac{fb}{f'b}$ , und folglich  $b - x = \frac{fb}{f'b} = b'b$ .

Wenn nun die beiden Wurzeln  $\alpha$  und  $\beta$  vorhanden sind, also die Curve von der Aye geschnitten wird (Fig. 14.), so ist augenscheinlich, wie nahe auch  $A$  an  $\alpha$ ,  $B$  an  $\beta$  gelange, so lange  $\alpha$  und  $\beta$  zwischen  $A$  und  $B$  bleiben,

$$aa' + \alpha\beta + b'b < ab,$$

d. h. in algebraischer Form:

$$\frac{-fa}{f'a} + (\beta - \alpha) + \frac{fb}{f'b} < (b - a)$$

und um so mehr  $aa' + b'b < ab$ , d. h.

$$\frac{-fa}{f'a} + \frac{fb}{f'b} < (b - a).$$

Wenn aber die beiden Wurzeln fehlen, oder keine Durchschnittpunkte vorhanden sind, so nähern sich die Werthe von  $f'a$  und  $f'b$  desto mehr der Null, je näher die Punkte  $a$  und  $b$  von beiden Seiten demjenigen Punkte  $c$  kommen (Fig. 15.), in welchem  $fx = 0$ , oder die Tangente der Abscisse parallel wird. Also muß, indem die beiden Grenzen  $a$  und  $b$ , zwischen denen eine Wurzel von  $fx$  sich beständig befindet, einander näher rücken, die Summe der Subtangente  $aa' + b'b$ , d. h.  $\frac{-fa}{f'a} + \frac{fb}{f'b}$  sehr bald dem

Intervalle  $b - a$  gleich kommen, oder dasselbe übertreffen, und wenn dies ist, so folgt, daß die Curve von der Aye nicht geschnitten wird, oder daß die beiden Wurzeln fehlen. Die beiden Tangenten schneiden einander alsdann zwischen der Aye  $x$  und der Curve.

Wenn also in einem Intervalle zwei Zeichenwechsel verloren gehen, und die Reihe der Zeiger sich mit 0, 1, 2 endigt, so berechne man, um zu entscheiden, ob die beiden angezeigten Wurzeln fehlen oder vorhanden sind, die Werthe von  $f'a$ ,  $fa$ ,  $f'b$ ,  $fb$ , und bilde die Summe

$$\frac{-fa}{f'a} + \frac{fb}{f'b}$$

welche, so wie jeder einzelne ihrer Summanden, positiv ist. Findet man, daß diese Summe dem Intervall  $b-a$  gleich ist, oder dasselbe übertrifft, so ist bewiesen, daß die beiden Wurzeln fehlen. Findet man dieselbe aber kleiner als das Intervall, so sind die Grenzen  $a$  und  $b$  einander noch nicht nahe genug, um über die Wurzeln zu entscheiden. Alsdann setze man eine beliebige Zahl  $c$  zwischen  $a$  und  $b$  ein, wodurch das Intervall in zwei kleinere getheilt wird. Auf diesem Wege werden entweder die beiden Wurzeln von einander getrennt, wenn sie vorhanden und ungleich sind, oder man findet bald, daß die nach der obigen Formel berechnete Summe der Subtangente dem entsprechenden Intervalle gleichkommt oder es übertrifft, also die beiden Wurzeln fehlen. Nur wenn die beiden Wurzeln vorhanden und gleich sind, lassen sie sich nicht trennen. Um in dieser Beziehung ein sicheres Verfahren zu haben, kann man, sobald  $\frac{-fa}{f'a} + \frac{fb}{f'b}$

sich noch kleiner findet, als  $b-a$ , also das Vorhandensein der Wurzeln noch unentschieden ist, bevor man engere Grenzen einsetzt, untersuchen, ob  $fx$  und  $f'x$  einen gemeinschaftlichen Factor haben. Findet sich ein solcher, so läßt sich auf ihn die in den bisherigen und noch folgenden §. vorgetragene Methode anwenden, um zu entscheiden, ob er zwischen  $b$  und  $a$  Null wird. Wird er in diesem Intervalle Null, so sind die beiden gleichen Wurzeln gefunden; wird er es aber nicht, so giebt es keine gleichen Wurzeln, und man ist versichert, daß man durch Einsetzung engerer Grenzen entweder die beiden Wurzeln von einander trennt, oder die Bedingung  $\frac{-fa}{f'a} + \frac{fb}{f'b} < b-a$  nicht mehr befriedigt findet, wodurch bewiesen wird, daß die Wurzeln fehlen.

In dem obigen Beispiele waren zwei Wurzeln zwischen  $-1$  und  $0$  angezeigt, und die Reihe der Zeiger endigte mit  $0, 1, 2$ . Man findet

	$X_3$	$X_2$	$X_1$	$X$	
-1	+	-	$\frac{+}{6}$	$\frac{-}{3}$	
0	+	-	$\frac{-}{7}$	$\frac{-}{4}$	$\frac{3}{6} + \frac{4}{7} > 1.$

Die Werthe  $f(-1) = -3$ ,  $f'(-1) = +6$ ,  $f(0) = -4$ ,  $f'(0) = -7$  sind in dieser Tafel beigefügt. Das Intervall  $b-a$  ist  $=1$ , die Summe

$$\frac{-fa}{f'a} + \frac{fb}{f'b} = \frac{3}{6} + \frac{4}{7} > 1;$$

also fehlen die beiden angezeigten Wurzeln.

60. Wenn in einem Intervalle zwei Zeichenwechsel verloren gehen, aber die Reihe der Zeiger sich nicht mit 0, 1, 2 endigt, oder wenn mehr als zwei Zeichenwechsel verloren gehen, so wird man immer wieder auf die vorige Regel zurückgeführt, um zu entscheiden, ob die angezeigten Wurzeln fehlen oder vorhanden sind. Nachdem nämlich die Reihe der Zeiger gebildet ist, gehe man in derselben von der Rechten nach der Linken zurück, bis man zum ersten Male den Zeiger 1 trifft. Alsdann ist der zunächst vorhergehende Zeiger rechts nothwendig 2, weil er nicht größer als 2 und nicht gleich 1, oder gleich Null sein kann; denn wäre er Null, so müßte rechts davon schon einmal der Zeiger 1 vorgekommen sein, was gegen die Annahme ist. Links aber von diesem Zeiger 1 kann entweder der Zeiger 0, oder 1, oder 2 stehen. Ist dieser links folgende Zeiger 0, so hat man unter drei auf einander folgenden Ableitungen  $X_{m+1}$ ,  $X_m$ ,  $X_{m-1}$ , die Folge der Zeiger 0, 1, 2. Also hat alsdann  $X_{m+1}$  in dem Intervalle keine Wurzel, weil sein Zeiger 0 ist,  $X_m$  hat eine Wurzel ( $\gamma$ ) und von  $X_{m-1}$  sind zwei Wurzeln angezeigt, über welche man allemal nach der Regel des vorigen §. entscheiden kann, indem man untersucht, ob die Summe

$$\frac{-f^{m-1}(a)}{f^m(a)} + \frac{f^{m-1}(b)}{f^m(b)}$$

größer ist als das Intervall  $b - a$ , oder ob die beiden Wurzeln der Gleichung  $X_{m-1} = 0$  vorhanden sind. Wenn diese beiden Wurzeln von  $X_{m-1}$  fehlen, so ist bewiesen, daß auch zwei der angezeigten Wurzeln der rechts folgenden Ableitungen  $X_{m-2}, X_{m-3}, \dots X_1$ , so wie der Function  $X$  selbst, fehlen. Denn alsdann gehen, durch das Verschwinden der Ableitung  $f^m(x)$ , für  $x = \gamma$ , zwei Zeichenwechsel zugleich verloren; also fehlen zwei Wurzeln von  $f_x$ . Man ziehe sofort von allen Zeigern unter den Functionen  $X_{m-1}, X_{m-2}, \dots X_1, X$  zwei Einheiten ab, so erhält man eine neue Reihe von Zeigern, in welcher der Zeiger 1 weiter nach der rechten Seite fortgerückt ist, und es ist wieder auf dieselbe Weise zu untersuchen, ob von den noch angezeigten Wurzeln ein zweites Paar fehlt, wenn der letzte Zeiger in der neugebildeten Reihe noch größer als 1 ist.

Wenn aber die beiden Wurzeln von  $X_{m-1}$  vorhanden und ungleich sind, so lassen sie sich auch durch Einsetzung engerer Grenzen von einander oder von den Wurzeln der nachstehenden Ableitungen  $X_{m-2}, X_{m-3}$ , u. s. f. trennen; wodurch unter allen Umständen der Zeiger 1, welcher dem Ende der Zeigerreihe am nächsten kam, weiter nach der rechten Seite fortgerückt wird. Sind dagegen die beiden Wurzeln von  $X_{m-1}$  vorhanden und gleich, so untersuche man, ob diese Wurzeln auch die folgenden Functionen  $X_{m-2}$  u. s. f. bis  $X$  Null machen; man wird dann immer finden, wie viele Zeichenwechsel durch das Verschwinden von Ableitungen verloren gehen, und wie viele gleiche Wurzeln von  $X$  vorhanden sind. Wird keine der Functionen  $X_{m-2}, X_{m-3} \dots X$  mit  $X_{m-1}$  zugleich Null, so gehen durch das gleichzeitige Verschwinden von  $X_{m-1}$  und  $X_m$  zwei Zeichenwechsel verloren, mithin sind zwei Wurzeln als fehlend angezeigt. Alsdann ziehe man wieder, wie vorhin, zwei Einheiten von den Zeigern von  $X_{m-1}, X_{m-2}, \dots X$  ab, und untersuche die dadurch entstehende neue Reihe der Zeiger.

Wenn aber der links von 1 stehende Zeiger nicht Null ist, so kann er 1 oder 2 sein; d. h. während zwei Wurzeln von

$X_{m-1}$  angezeigt sind, und eine von  $X_m$ , so kann auch eine, oder es können zwei Wurzeln von  $X_{m+1}$  angezeigt sein, die aber niemals fehlen können. Wenn nämlich in einem Intervalle so viele Wurzeln von  $X$  vorhanden, als angezeigt sind, so sind nothwendig auch alle in diesem Intervalle angezeigten Wurzeln der Ableitungen von  $X$  vorhanden, weil sonst Zeichenwechsel durch das Verschwinden von Ableitungen verloren gehen, also auch Wurzeln von  $X$  fehlen müßten. Wendet man diese Bemerkung auf den vorliegenden Fall an, wo eine Wurzel von  $X_m$  angezeigt und mithin auch vorhanden ist, so folgt, daß auch die Wurzeln von  $X_{m+1}$ , wenn deren zwei angezeigt sein sollten, nicht fehlen können, wie eben behauptet ist. Ferner können die Wurzeln von  $X_m$  und  $X_{m+1}$  nicht einander gleich sein, weil dies zwei gleiche Wurzeln von  $X_m$  voraussetzen würde, während nur eine Wurzel vorhanden ist. Folglich wird man die Wurzeln von  $X_{m+1}$  und  $X_m$  allemal von einander trennen, oder den Zeiger von  $X_{m+1}$  auf Null bringen können, indem man zwischen die Grenzen des Intervalles neue Werthe einsetzt. Dadurch werden entweder die beiden Wurzeln von  $X_{m-1}$  von einander getrennt, d. h. der dem Ende der Reihe zunächst der Reihe noch näher gebracht, fortgerückt; oder es wird, wenn der Zeiger 0, 1, 2 erhalten, woran zu verfahren ist. Durch diese Mittel entweder die Wurzeln von  $f_x$  von einander zu trennen, oder zu finden, daß Zeichenwechsel durch das Verschwinden von Ableitungen verloren gehen, wodurch allemal eben-so viele Wurzeln, als der verlorenen Z. W. warten, sich als fehlende ergeben.

Bei dem Einsetzen der Werthe von  $x$  kann vorkommen, daß für einen Werth  $c$  von  $x$  einige Ableitungen Null, und mithin ihre Zeichen unbestimmt werden. Man setze dann, wie schon oben mehrmals gesehen, zwei dem  $c$  unendlich nahe Werthe  $c - dc$ ,  $c + dc$  ein, und bestimme hierauf die Anzahl von Zeichenwechseln, welche in diesem unendlich kleinen Intervalle verloren

gehen. Ist  $fc$  nicht Null, so ist diese Anzahl nothwendig Null oder gerade; und es fehlen eben so viele Wurzeln als sie Einheiten enthält. Ist aber zugleich  $fc$  Null, so giebt der Ueberschuß der Anzahl verlorener Zeichenwechsel über die Anzahl der vorhandenen Wurzeln ( $=0$ ), der immer eine gerade Zahl und nie kleiner als Null ist, die Anzahl der in diesem Intervalle fehlenden Wurzeln.

61. Es sei z. B. die Gleichung  $x^5 + x - 1 = X = 0$  vorgelegt; so erhält man

$$X_1 = 5x^4 + 1, X_2 = 20x^3, X_3 = 60x^2, X_4 = 120x, X_5 = 120.$$

	$X_5$	$X_4$	$X_3$	$X_2$	$X_1$	$X$	
-10	+	-	+	-	+	-	
-1	+	-	+	-	+	-	5 Z. W.
0	+	0	0	0	+	-	
1	+	+	+	+	+	+	0 Z. W.

Zufolge dieser Tafel sind die Wurzeln nur zwischen  $-1$  und  $+1$  zu suchen, weil alle Zeichenwechsel in diesem Intervalle verloren gehen. Da aber der Werth  $x=0$  mehrere Ableitungen zugleich verschwinden macht, und mithin ihre Zeichen unbestimmt läßt, so setze man einen unendlich kleinen negativen Werth ( $<0$ ) und einen unendlich kleinen positiven Werth ( $>0$ ) ein; so erhält man folgende vollständigere Tafel:

	$X_5$	$X_4$	$X_3$	$X_2$	$X_1$	$X$	
-1	+	-	+	-	+	-	
$<0$	+	-	+	-	+	-	5 Z. W.
0	+	0	0	0	+	-	
$>0$	+	+	+	+	+	-	1 Z. W.
1	+	+	+	+	+	+	0 Z. W.

In dem unendlich kleinen Intervalle von  $<0$  bis  $>0$  gehen also vier Zeichenwechsel durch das Verschwinden von Ableitungen verloren; mithin fehlen vier Wurzeln. Die fünfte Wurzel aber befindet sich zwischen 0 und 1.

Die vorgelegte Gleichung sei

$$X = x^4 - 8x^3 + 24x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Man findet:

$$X_1 = 4x^3 - 24x^2 + 48x + 2, \quad X_2 = 12x^2 - 48x + 48.$$

$$X_3 = 24x - 48, \quad X_4 = 24.$$

	$X_4$	$X_3$	$X_2$	$X_1$	$X$	
-10	+	-	+	-	+	
-1	+	-	+	-	+	4 3. W.
	0	0	0	1	2	
0	+	-	+	+	+	2 3. W.
1	+	-	+	+	+	2 3. W.
	0	1	2	2	2	
10	+	+	+	+	+	0 3. W.

Zwischen -1 und 0 gehen zwei 3. W. verloren, und zwischen 1 und 10 wieder zwei. Man bilde in beiden Intervallen die Reihen der Zeiger; diejenige zwischen -1 und 0 endigt, wie zu sehen ist, mit 0, 1, 2. Demnach berechne man:

$$f(-1) = 32, \quad f(-1) = 74, \quad f(0) = 1, \quad f(0) = 2,$$

so ergibt sich 
$$\frac{-f(-1)}{f(-1)} + \frac{f(0)}{f(0)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} < 1.$$

Die Grenzen sind demnach noch nicht eng genug, um über die Wurzeln zu entscheiden. Bevor man aber engere Grenzen einsetzt, überzeuge man sich, daß  $f_x$  und  $f'_x$  keinen gemeinschaftlichen Factor haben, und mithin gleiche Wurzeln nicht vorhanden sind. Da dieses in der That der Fall ist, so setze man  $-\frac{1}{2}$  zwischen -1 und 0; es findet sich

	$X_4$	$X_3$	$X_2$	$X_1$	$X$
-1	+	-	+	-	+
		0	0	1	2
$-\frac{1}{2}$	+	-	+	+	+
0	+	-	+	+	+

Die Wurzeln sind demnach zwischen -1 und  $-\frac{1}{2}$  angezeigt.



Zugleich ist das Intervall  $\frac{1}{2}, 1$  ferner

$$f(-\frac{1}{2}) = 7\frac{1}{8}, \quad f(-\frac{1}{2}) = 19\frac{1}{2}, \quad f(-1) = 32, \quad f(-1) = -74;$$

$$\frac{32}{74} + \frac{7\frac{1}{8}}{19\frac{1}{2}} > \frac{1}{4}; \text{ mithin fehlen die beiden Wurzeln.}$$

Es sind noch zwei Wurzeln zwischen 1 und 10 angezeigt. Hier ist die Reihe der Zeiger 0, 1, 2, 2, 2. Man berechne demnach  $f'(1) = 12$ ,  $f''(1) = -24$ ,  $f'(10) = 768$ ,  $f''(10) = 192$ ; so findet man  $\frac{1}{2} + \frac{7}{10} < 9$ . Also sind die Grenzen noch nicht eng genug. Ehe man aber engere Grenzen einsetzt, untersuche man, ob  $X_1$  und  $X_2$  einen gemeinschaftlichen Factor haben, der zwischen 1 und 10 Null wird. Ein solcher ist vorhanden, nämlich  $x-2$ . Man setze also den Werth 2 ein, und zugleich zwei andere ihm unendlich nahe ( $<2$  und  $>2$ ); so ergibt sich

	$X_4$	$X_3$	$X_2$	$X_1$	$X$
$<2$	+	-	+	+	+
$2$	+	0	0	+	+
$>2$	+	+	+	+	+

In dem unendlich kleinen Intervalle (zwischen  $<2$  und  $>2$ ) gehen also 2 Z. W. verloren, ohne daß  $fx$  Null wird; also fehlen die beiden Wurzeln.

Die vorgelegte Gleichung hat mithin gar keine reelle Wurzel.

62. Es sei gegeben:

$$X = x^5 - 3x^4 + 24x^3 + 95x^2 + 46x - 101 = 0.$$

$$X_1 = 5x^4 - 12x^3 - 72x^2 + 190x - 46.$$

$$X_2 = 20x^3 - 36x^2 - 144x + 190.$$

$$X_3 = 60x^2 - 72x - 144.$$

$$X_4 = 120x - 72.$$

$$X_5 = 120.$$

	$X_4$	$X_3/X_4$	$X_2$	$X_1/X_2$	$X_0/X_1$	$\gamma$	$\gamma$
-10	+	-	+	+	-	5.3.	W.
-1	+	-	+	+	+	4	"
0	+	-	+	+	-	3	"
1	+	+	-	+	+	2	"
		0	1	2	2	3	

Es liegt demnach eine Wurzel zwischen -10 und -1, eine zweite zwischen -1 und 0, weil in jedem dieser Intervalle ein Z. W. verloren geht. Ferner sind zwischen 1 und 10 drei Wurzeln angezeigt, von denen eine gewiß vorhanden ist, so daß nur zu entscheiden bleibt, ob die beiden andern ebenfalls vorhanden sind oder fehlen. In der Reihe der Zeiger findet man 1 zum erstenmale, von der Rechten aus, unter  $X_3$ ; unter  $X_2$  steht 2, unter  $X_1$  0 als Zeiger, so daß die Folge 0, 1, 2 vorhanden ist. Man berechne demnach  $f(1)=30$ ,  $f'(1)=-156$ ,  $f(10)=15150$ ,  $f'(10)=5436$  - so findet man

$\frac{30}{156} + \frac{15150}{5436} < 9$ ; man muß also das Intervall atger machen. Vorher überzeuge man sich aber, daß  $X_3$  und  $X_2$  keinen gemeinschaftlichen Factor haben, und mithin die beiden Wurzeln von  $X_3$  nicht gleich sein können. Da es einen solchen nicht giebt, so setze man z. B.  $x=3$  ein, so kommt

	$X_5$	$X_4$	$X_3$	$X_2$	$X_1$	$X_0$	$\gamma$	$\gamma$
1	+	+	-	+	+	-	3.3.	W.
		0	0	1	1	2	2	
3	+	+	+	-	-	-	1	"
10	+	+	+	+	+	+	0	"

Es liegt mithin eine Wurzel zwischen 3 und 10, und zwei sind zwischen 1 und 3 angezeigt. Die Reihe der Zeiger ist 0 0 1 1 2 2, also die Folge 0, 1, 2 nicht vorhanden. Man muß daher durch Einsetzung engerer Grenzen die Wurzel von  $X_3$  von der von  $X_2$  trennen. Man setze  $x=2$  ein, so kommt

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$
1	+	+	-	+	+	+
2	+	+	-	+	+	+
		0	1	0	1	2
3	+	+	+	+	-	+

Der Zeiger 1 ist dadurch von  $X_2$  nach  $X_1$  fortgerückt, und die Reihe der Zeiger zwischen 2 und 3 endigt mit 0 1 2. Man berechne  $f(2) = -21$ ,  $f'(2) = 30$ ,  $f(3) = 32$ ,  $f'(3) = 43$ ;

so kommt  $\frac{21}{30} + \frac{32}{43} > 1$ ; mithin fehlen die beiden Wurzeln.

Die Gleichung hat also drei reelle Wurzeln, die vollständig getrennt sind; eine zwischen  $-10$  und  $-1$ , eine zwischen  $-1$  und  $0$ , eine zwischen  $3$  und  $10$ . Die beiden übrigen Wurzeln fehlen.

Die vorgelegte Gleichung sei

$$X \pm x^4 - x^3 + 4x^2 + x - 4 \pm 0;$$

so kommt

$$X_1 = 4x^3 - 3x^2 + 8x + 1, \quad X_2 = 12x^2 - 6x + 8, \\ X_3 = 24x - 6, \quad X_4 = 24.$$

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X$
-10	+	-	+	-	+
-1	+	-	+	-	+
0	+	-	+	+	-
	0	1	2	2	3
4	+	+	+	+	+

Zwischen  $-1$  und  $0$  liegt eine Wurzel; zwischen  $0$  und  $1$  sind drei angezeigt.

Man findet den Zeiger 1 zum erstenmale, von der Rechten aus, unter  $X_2$ ; rechts davon 2, links 0; also die Folge 0, 1, 2. Man berechne  $f'(0) = 8$ ,  $f''(0) = -6$ ; so ist schon

$$\frac{-f'(0)}{f''(0)} = \frac{8}{6} > 1;$$

also ist es nicht nöthig, noch  $\frac{f'(4)}{f''(1)}$  zu berechnen. Die beiden Wurzeln fehlen. Man gehe von jedem der Zeiger unter  $X_2$ ,  $X_3$ ,  $X$ , 2 Einheiten ab; so erhält man die Zeigerreihe

	$X_4$	$X_3$	$X_2$	$X_1$	$X$	
0		+	-	+	-	01
1			0	0	1	

Zwischen 0 und 1 haben also  $X_2$  und  $X_1$  keine reelle Wurzel,  $X$  aber eine, welche vollständig von den übrigen getrennt ist.

63. Es ist noch übrig zu zeigen, wie eine Wurzel berechnet werden muß, die von allen übrigen getrennt ist. Man habe also ein Intervall, in welchem sich eine einzige reelle Wurzel von  $f(x)$  befindet, also die Reihe der Zeiger sich mit 1 endigt. Alsdann können noch Wurzeln von  $f(x)$  und von  $f'(x)$  in diesem Intervalle vorhanden sein; durch Einsetzung engerer Grenzen werden sich dieselben aber von der Wurzel trennen lassen, wenn nicht gerade der besondere Fall eintritt, daß  $f(x)$  und  $f'(x)$  eine Wurzel in diesem Intervalle gemein haben. Dagegen können  $f(x)$  und  $f'(x)$  nicht dieselbe Wurzel haben, weil sonst zwei gleiche Wurzeln von  $f(x)$  vorhanden wären, gegen die Annahme. Man untersuche also, ob  $f(x)$  und  $f'(x)$  einen gemeinschaftlichen Factor haben, der in dem Intervalle Null wird. Ist ein solcher gefunden, so liefert er auch die Wurzel von  $f(x)$ ; giebt es aber einen solchen nicht, so theile man das Intervall, bis die Wurzel von  $f(x)$  von denen von  $f(x)$  und  $f'(x)$  getrennt ist, also die Reihe der Zeiger sich mit 0, 0, 1 endigt.

In dem Beispiele des §. 57. lag eine Wurzel zwischen 1 und 10, und man hatte:

	$X_3$	$X_2$	$X_1$	$X$
1	+	-	-	-
	0	1	1	1
10	+	+	+	+

Es hat also sowohl  $X_1$  als  $X_2$  noch eine Wurzel zwischen 1

und 10. Setzt man  $x=5$  ein, so kommt

	$X_3$	$X_2$	$X_1$	$X$
1	+	—	—	—
5	+	+	+	—
		0	0	1
10	+	+	+	+

Der Zeichenwechsel geht also zwischen 5 und 10 verloren, und zwischen diesen Grenzen hat  $fx$  eine,  $fx$  und  $f'x$  haben keine Wurzel mehr, oder die Reihe der Zeiger endet mit 0, 0, 1.

Sind die Grenzen  $a$  und  $b$  einander so nahe gerückt, daß die Reihe der Zeiger sich mit 0 0 1 endet, also weder  $fx$  noch  $f'x$  in dem Intervalle Null werden, so müssen  $fa$  und  $fb$ , so wie  $f'a$  und  $f'b$  gleiche Zeichen haben. Da nun die Reihe bei  $a$  einen Zeichenwechsel mehr darbieten muß, als die Reihe bei  $b$ , so können die beiden Zeichenreihen, wenn die drei letzten Zeiger 0 0 1 sein sollen, nur auf eine der vier folgenden Arten enden:

1.	...	$X_2$	$X_1$	$X$
$a$	...	+	+	—
		0	0	1
$b$	...	+	+	+
2.	...	$X_2$	$X_1$	$X$
$a$	...	—	—	+
		0	0	1
$b$	...	—	—	—
3.	...	$X_2$	$X_1$	$X$
$a$	...	+	—	+
		0	0	1
$b$	...	+	—	—
4.	...	$X_2$	$X_1$	$X$
$a$	...	—	+	—
		0	0	1
$b$	...	—	+	+

Man bemerkt, daß in jedem dieser vier Fälle  $fx$  und  $f'x$  an der einen Grenze gleiche, an der anderen Grenze ungleiche Zeichen haben; nämlich in den Fällen 1. und 2. haben  $fb$  und  $f'b$  gleiche,  $fa$  und  $f'a$  ungleiche Zeichen; dagegen sind in den Fällen 3. und 4. die Zeichen von  $fa$  und  $f'a$  gleich, und die von  $fb$  und  $f'b$  verschieden. Zeichnet man den Bogen der Curve  $y=fx$ , welcher sich von  $x=a$  bis  $x=b$  erstreckt, so hat derselbe weder einen Wendepunkt, noch wird er der Hgt an einer Stelle parallel; ferner kehrt er der Hgt an der einen Grenze,

von  $f_x$  und  $f'_x$  gleiche Zeichen haben,  $f_x$  erhebt, an der anderen Grenze, wo sie ungleiche Zeichen haben, seine hohle Seite zu. Die Grenze, bei welcher er gegen die Axe erhaben ist, heiße die äußere, die, bei welcher er gegen die Axe hohl ist, die innere Grenze. In den Fällen 1. 2. ist also die obere Grenze zugleich die innere, die untere zugleich die äußere; in den Fällen 3. 4. ist die obere Grenze zugleich die äußere, die untere zugleich die innere. Diesen Fällen entsprechen der Reihe nach die Figuren 18. a. b. c. d. e. f. g. h. i. j. k. l. m. n. o. p. q. r. s. t. u. v. w. x. y. z. aa. ab. ac. ad. ae. af. ag. ah. ai. aj. ak. al. am. an. ao. ap. aq. ar. as. at. au. av. aw. ax. ay. az. ba. bb. bc. bd. be. bf. bg. bh. bi. bj. bk. bl. bm. bn. bo. bp. bq. br. bs. bt. bu. bv. bw. bx. by. bz. ca. cb. cc. cd. ce. cf. cg. ch. ci. cj. ck. cl. cm. cn. co. cp. cq. cr. cs. ct. cu. cv. cw. cx. cy. cz. da. db. dc. dd. de. df. dg. dh. di. dj. dk. dl. dm. dn. do. dp. dq. dr. ds. dt. du. dv. dw. dx. dy. dz. ea. eb. ec. ed. ee. ef. eg. eh. ei. ej. ek. el. em. en. eo. ep. eq. er. es. et. eu. ev. ew. ex. ey. ez. fa. fb. fc. fd. fe. ff. fg. fh. fi. fj. fk. fl. fm. fn. fo. fp. fq. fr. fs. ft. fu. fv. fw. fx. fy. fz. ga. gb. gc. gd. ge. gf. gg. gh. gi. gj. gk. gl. gm. gn. go. gp. gq. gr. gs. gt. gu. gv. gw. gx. gy. gz. ha. hb. hc. hd. he. hf. hg. hh. hi. hj. hk. hl. hm. hn. ho. hp. hq. hr. hs. ht. hu. hv. hw. hx. hy. hz. ia. ib. ic. id. ie. if. ig. ih. ii. ij. ik. il. im. in. io. ip. iq. ir. is. it. iu. iv. iw. ix. iy. iz. ja. jb. jc. jd. je. jf. jg. jh. ji. jj. jk. jl. jm. jn. jo. jp. jq. jr. js. jt. ju. jv. jw. jx. jy. jz. ka. kb. kc. kd. ke. kf. kg. kh. ki. kj. kk. kl. km. kn. ko. kp. kq. kr. ks. kt. ku. kv. kw. kx. ky. kz. la. lb. lc. ld. le. lf. lg. lh. li. lj. lk. ll. lm. ln. lo. lp. lq. lr. ls. lt. lu. lv. lw. lx. ly. lz. ma. mb. mc. md. me. mf. mg. mh. mi. mj. mk. ml. mm. mn. mo. mp. mq. mr. ms. mt. mu. mv. mw. mx. my. mz. na. nb. nc. nd. ne. nf. ng. nh. ni. nj. nk. nl. nm. nn. no. np. nq. nr. ns. nt. nu. nv. nw. nx. ny. nz. oa. ob. oc. od. oe. of. og. oh. oi. oj. ok. ol. om. on. oo. op. oq. or. os. ot. ou. ov. ow. ox. oy. oz. pa. pb. pc. pd. pe. pf. pg. ph. pi. pj. pk. pl. pm. pn. po. pp. pq. pr. ps. pt. pu. pv. pw. px. py. pz. qa. qb. qc. qd. qe. qf. qg. qh. qi. qj. qk. ql. qm. qn. qo. qp. qq. qr. qs. qt. qu. qv. qw. qx. qy. qz. ra. rb. rc. rd. re. rf. rg. rh. ri. rj. rk. rl. rm. rn. ro. rp. rq. rr. rs. rt. ru. rv. rw. rx. ry. rz. sa. sb. sc. sd. se. sf. sg. sh. si. sj. sk. sl. sm. sn. so. sp. sq. sr. ss. st. su. sv. sw. sx. sy. sz. ta. tb. tc. td. te. tf. tg. th. ti. tj. tk. tl. tm. tn. to. tp. tq. tr. ts. tt. tu. tv. tw. tx. ty. tz. ua. ub. uc. ud. ue. uf. ug. uh. ui. uj. uk. ul. um. un. uo. up. uq. ur. us. ut. uu. uv. uw. ux. uy. uz. va. vb. vc. vd. ve. vf. vg. vh. vi. vj. vk. vl. vm. vn. vo. vp. vq. vr. vs. vt. vu. vv. vw. vx. vy. vz. wa. wb. wc. wd. we. wf. wg. wh. wi. wj. wk. wl. wm. wn. wo. wp. wq. wr. ws. wt. wu. wv. ww. wx. wy. wz. xa. xb. xc. xd. xe. xf. xg. xh. xi. xj. xk. xl. xm. xn. xo. xp. xq. xr. xs. xt. xu. xv. xw. xx. xy. xz. ya. yb. yc. yd. ye. yf. yg. yh. yi. yj. yk. yl. ym. yn. yo. yp. yq. yr. ys. yt. yu. yv. yw. yx. yy. yz. za. zb. zc. zd. ze. zf. zg. zh. zi. zj. zk. zl. zm. zn. zo. zp. zq. zr. zs. zt. zu. zv. zw. zx. zy. zz. aa. ab. ac. ad. ae. af. ag. ah. ai. aj. ak. al. am. an. ao. ap. aq. ar. as. at. au. av. aw. ax. ay. az. ba. bb. bc. bd. be. bf. bg. bh. bi. bj. bk. bl. bm. bn. bo. bp. bq. br. bs. bt. bu. bv. bw. bx. by. bz. ca. cb. cc. cd. ce. cf. cg. ch. ci. cj. ck. cl. cm. cn. co. cp. cq. cr. cs. ct. cu. cv. cw. cx. cy. cz. da. db. dc. dd. de. df. dg. dh. di. dj. dk. dl. dm. dn. do. dp. dq. dr. ds. dt. du. dv. dw. dx. dy. dz. ea. eb. ec. ed. ee. ef. eg. eh. ei. ej. ek. el. em. en. eo. ep. eq. er. es. et. eu. ev. ew. ex. ey. ez. fa. fb. fc. fd. fe. ff. fg. fh. fi. fj. fk. fl. fm. fn. fo. fp. fq. fr. fs. ft. fu. fv. fw. fx. fy. fz. ga. gb. gc. gd. ge. gf. gg. gh. gi. gj. gk. gl. gm. gn. go. gp. gq. gr. gs. gt. gu. gv. gw. gx. gy. gz. ha. hb. hc. hd. he. hf. hg. hh. hi. hj. hk. hl. hm. hn. ho. hp. hq. hr. hs. ht. hu. hv. hw. hx. hy. hz. ia. ib. ic. id. ie. if. ig. ih. ii. ij. ik. il. im. in. io. ip. iq. ir. is. it. iu. iv. iw. ix. iy. iz. ja. jb. jc. jd. je. jf. jg. jh. ji. jj. jk. jl. jm. jn. jo. jp. jq. jr. js. jt. ju. jv. jw. jx. jy. jz. ka. kb. kc. kd. ke. kf. kg. kh. ki. kj. kk. kl. km. kn. ko. kp. kq. kr. ks. kt. ku. kv. kw. kx. ky. kz. la. lb. lc. ld. le. lf. lg. lh. li. lj. lk. ll. lm. ln. lo. lp. lq. lr. ls. lt. lu. lv. lw. lx. ly. lz. ma. mb. mc. md. me. mf. mg. mh. mi. mj. mk. ml. mm. mn. mo. mp. mq. mr. ms. mt. mu. mv. mw. mx. my. mz. na. nb. nc. nd. ne. nf. ng. nh. ni. nj. nk. nl. nm. nn. no. np. nq. nr. ns. nt. nu. nv. nw. nx. ny. nz. oa. ob. oc. od. oe. of. og. oh. oi. oj. ok. ol. om. on. oo. op. oq. or. os. ot. ou. ov. ow. ox. oy. oz. pa. pb. pc. pd. pe. pf. pg. ph. pi. pj. pk. pl. pm. pn. po. pp. pq. pr. ps. pt. pu. pv. pw. px. py. pz. qa. qb. qc. qd. qe. qf. qg. qh. qi. qj. qk. ql. qm. qn. qo. qp. qq. qr. qs. qt. qu. qv. qw. qx. qy. qz. ra. rb. rc. rd. re. rf. rg. rh. ri. rj. rk. rl. rm. rn. ro. rp. rq. rr. rs. rt. ru. rv. rw. rx. ry. rz. sa. sb. sc. sd. se. sf. sg. sh. si. sj. sk. sl. sm. sn. so. sp. sq. sr. ss. st. su. sv. sw. sx. sy. sz. ta. tb. tc. td. te. tf. tg. th. ti. tj. tk. tl. tm. tn. to. tp. tq. tr. ts. tt. tu. tv. tw. tx. ty. tz. ua. ub. uc. ud. ue. uf. ug. uh. ui. uj. uk. ul. um. un. uo. up. uq. ur. us. ut. uu. uv. uw. ux. uy. uz. va. vb. vc. vd. ve. vf. vg. vh. vi. vj. vk. vl. vm. vn. vo. vp. vq. vr. vs. vt. vu. vv. vw. vx. vy. vz. wa. wb. wc. wd. we. wf. wg. wh. wi. wj. wk. wl. wm. wn. wo. wp. wq. wr. ws. wt. wu. wv. ww. wx. wy. wz. xa. xb. xc. xd. xe. xf. xg. xh. xi. xj. xk. xl. xm. xn. xo. xp. xq. xr. xs. xt. xu. xv. xw. xx. xy. xz. ya. yb. yc. yd. ye. yf. yg. yh. yi. yj. yk. yl. ym. yn. yo. yp. yq. yr. ys. yt. yu. yv. yw. yx. yy. yz. za. zb. zc. zd. ze. zf. zg. zh. zi. zj. zk. zl. zm. zn. zo. zp. zq. zr. zs. zt. zu. zv. zw. zx. zy. zz.

§4. Man kann sich der Wurzel sowohl von der äußeren, als von der inneren Grenze aus nähern, aber auf verschiedene Arten. Es sei die untere Grenze  $b$  zugleich die äußere, die obere  $a$  die innere, wie in 1. und 2. Man bezeichne die Wurzel  $x$  durch  $b - \beta$ , so ist  $\beta$  positiv, und, weil  $f(b - \beta) = 0$ ,  $\beta = \frac{fb}{f(b - \beta)}$ . Findet nun der Fall 1. Statt, so ist  $f_x$  positiv, und wächst von  $fa$  bis  $fb$ , weil  $f'_x$  positiv ist; folglich ist  $fb > f(b - \beta)$ . Ist aber der Fall 2. eingetreten, so ist  $-fb$  positiv und  $-f_x$  wächst von  $-fa$  bis  $-fb$ , weil  $-f'_x$  positiv ist, also ist  $-fb > -f(b - \beta)$ . In beiden Fällen ist

$$\frac{fb}{fb} \text{ positiv und kleiner als } \beta = \frac{fb}{f(b - \beta)};$$

folglich ist  $b' = b - \frac{fb}{fb}$  kleiner als  $b$ , aber größer als  $b - \beta$ ; daher stellt  $b'$  eine neue untere Grenze der Wurzel dar, die der Wurzel näher ist als die Grenze  $b$ , und diese Grenze  $b'$  ist zugleich wieder eine äußere.

Man gehe sodann von der oberen und inneren Grenze  $a$  aus. Der Werth der Wurzel sei  $a + \alpha$ , so ist  $\alpha$  positiv, und  $\alpha = \frac{-fa}{f(a + \alpha)}$ . Findet nun der Fall 1. Statt, so ist  $f_x$  positiv, und wächst von  $fa$  bis  $fb$ , weil  $f'_x$  positiv ist; also ist  $fb > f(a + \alpha)$ . Findet dagegen der Fall 2. Statt, so ist

und  $f' a$  positiv, und  $\frac{f a}{f b}$  positiv, weil  $-f' a$  positiv ist, also ist  $-f b > -f(a + \Theta \alpha)$ . In beiden Fällen  $\frac{f a}{f b}$  positiv und kleiner als  $\alpha$ ; daher ist  $a' = a - \frac{f a}{f b}$  eine neue obere und innere Grenze, welche der Wurzel  $a + \alpha$  näher ist, als die vorige Grenze  $a$ .

Es sei ferner die obere Grenze  $a$  zugleich die äußere, wie in 3. und 4. In beiden Fällen sieht man leicht, daß der positive Werth von  $f a$  größer ist, als alle andere Werthe, welche  $f x$  im Intervalle von  $a$  bis  $b$  erhält. Wird daher die Wurzel wieder mit  $a + \alpha$  bezeichnet, so ist  $\alpha$  positiv, und  $a + \alpha = a - \frac{f a}{f(a + \Theta \alpha)}$ ; zugleich aber  $\frac{f a}{f a}$  positiv und kleiner als  $\alpha = \frac{f a}{f(a + \Theta \alpha)}$ ; daher stellt  $a' = a - \frac{f a}{f a}$  eine neue obere und äußere Grenze dar, welche der Wurzel näher ist, als die Grenze  $a$ .

Geht man endlich von der unteren und inneren Grenze  $b$  aus, und setzt wieder die Wurzel gleich  $b - \beta$ , so ist auch  $\beta$  wieder positiv und gleich  $\frac{f b}{f(b - \Theta \beta)}$ . Ferner ist der Quotient  $\frac{f b}{f a}$  positiv und kleiner als  $\beta$ , weil der positive Werth von  $f a$  größer ist als der positive Werth von  $f(b - \Theta \beta)$ ; daher ist  $b' = b - \frac{f b}{f a}$  eine neue untere und innere Grenze, welche der Wurzel näher liegt, als die Grenze  $b$ .

Wenn also überhaupt  $e$  die äußere,  $i$  die innere Grenze bezeichnet, gleichviel, welche von beiden die obere oder die untere sei, so erhält man zwei neue engere Grenzen durch die Formeln

$$e' = e - \frac{f e}{f e}, \quad i' = i - \frac{f i}{f e}.$$

von denen  $e'$  wieder eine äußere,  $i'$  wieder eine innere ist.

Man berechne zugleich die Zahlenwerthe von  $f_x$  und seinen Ableitungen für  $x=6$ ,  $x=7$ , z. B.  $f(6)=-10$ ,  $f'(6)=41$ , u. s. f., die hier untergeschrieben sind. Da der größte Werth von  $f'_x$  gleich 32, und der kleinste Werth von  $f_x$  gleich 41 ist, also  $g=32$ ,  $h=41$ , so wird  $q=\frac{g}{2h}=\frac{16}{41}$ , also  $q<1$ . Daher wird bei jeder folgenden Annäherung das neue Intervall  $\delta'$  kleiner als das Quadrat des vorigen, oder  $\delta'<\delta^2$ . Um engere Grenzen zu erhalten, berechne man nach den Formeln

$$a'=a-\frac{fa}{fb}, \quad b'=b-\frac{fb}{fb}$$

die Werthe  $a'=6+\frac{10}{70}=\frac{43}{7}$ ,  $b'=7-\frac{45}{70}=\frac{89}{14}$ ,

also  $a'>6,1$  und  $b'<6,4$ . Um aber sofort ein noch kleineres Intervall zu erhalten, setze man 6,2 und 6,3 ein. Man findet

$$f(6,2)=f(6)+0,2 \cdot f'(6)+\frac{(0,2)^2}{2}f''(6)+\frac{(0,2)^3}{6}f'''(6)=-1,272,$$

dagegen, auf die nämliche Weise,  $f(6,3)=+3,497$ ; also liegt die Wurzel zwischen  $a=6,2$  und  $b=6,3$ . Man berechne noch  $f'(6,3)$ ; der Werth ist 49,07; und man erhält

$$a'=6,2+\frac{1,272}{49,07}=6,22 \dots$$

Da  $\delta=0,1$  war, so ist nunmehr  $\delta'<0,01$ ; daher braucht man nur die beiden ersten Stellen von  $a'$  zu berechnen, und die Wurzel liegt zwischen 6,22 und 6,23... Man berechne

$$f(6,23)=f(6,22)+0,01 \cdot f'(6,22)+\dots$$

Nun war  $f(6,2)=-1,272$ ;  $f'(6,2)=46,32$ ;  $f''(6,2)=27,2$ ;

folglich  $f(6,22)=f(6,2)+0,02 \cdot f'(6,2)+\dots=-0,340152$ ,

ferner  $f'(6,22)=46,8652$ ;  $f''(6,22)=27,32$ ;

daher ist  $f(6,23)=f(6,22)+0,01 \cdot f'(6,22)+\dots$

$$=-0,3401\dots+0,4686\dots+\dots$$

offenbar positiv; also liegt die Wurzel zwischen 6,22 und 6,23.

Man berechne noch

$$f'(6,23)=46,8652+0,01 \cdot 27,32+(0,01)^2 \cdot 3=47,1387,$$



so kommt  $a' = 6,22 + \frac{0,340152}{47,1387} = 6,2272..$

Das Intervall  $\delta$  war 0,01, also  $\delta' < 0,0001$ ; daher nur 4 Stellen berechnet sind. Ferner findet man

$$\begin{aligned} f(6,2272) &= f(6,22) + 0,0072 \cdot f'(6,22) + \dots \\ &= -0,340152 + 0,0072 \cdot 46,8652 + (0,0072)^2 \cdot 13,66 + (0,0072)^3 \\ &= -0,002014052352. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dagegen ist } f(6,2273) &= f(6,2272) + 0,0001 \cdot f'(6,2272) + \dots \\ &= -0,0020.. + 0,0047.. + \dots \end{aligned}$$

offenbar positiv, also liegt die Wurzel zwischen 6,2272 und 6,2273. Man hat noch  $f(6,2273) = 47,06479587$ ; also die neue untere Grenze

$$a' = 6,2272 + \frac{0,002014052352}{47,06479587} = 6,2272 + 0,00004279..$$

und zugleich  $\delta' < 0,00000001$ ; also ist die Wurzel größer als 6,22724279, aber kleiner als 6,22724280...

Man findet aber den Werth von

$$\begin{aligned} f(6,22724280) &= -0,0020140... + 0,00004280 \cdot 47,062... + \dots \\ &= -0,0020140... + 0,0020142... + \dots \end{aligned}$$

offenbar positiv; mithin ist die Wurzel, bis auf 8 Stellen berechnet, folgende:

$$x = 6,22724279.$$

Der vortrefflichen Methoden, welche Fourier angiebt, um bei beliebiger Fortsetzung der Annäherung die Decimalstellen auf dem kürzesten Wege, mit Vermeidung aller entbehrlichen Rechnung, zu erhalten, kann hier nicht weiter erwähnt werden.

## Curven im Raume und Flächen.

67. Man denke sich drei auf einander senkrechte Ebenen, und nehme ihre Durchschnittslinien zu Azen senkrechter Coordinaten  $x, y, z$  an. Ist nun irgend eine Gleichung zwischen  $x, y, z$  gegeben, welche durch  $f(x, y, z) = 0$  oder auch durch  $F = 0$  bezeichnet werde, so liegen alle Punkte, deren Coordinaten der Bedingung  $F = 0$  genügen, auf einer Fläche. Sind aber zwei Gleichungen der Art zugleich gegeben, wie  $f(x, y, z) = 0$  und  $\varphi(x, y, z) = 0$ ; so liegen die Punkte, deren Coordinaten ihnen beiden genügen, in dem Durchschnitte zweier Flächen, oder in einer Curve, welche, wenn sie nicht ganz in eine Ebene fällt, doppelt gekrümmt genannt wird.

Insbesondere wird eine Ebene durch eine Gleichung von der Form  $ax + by + cz = k$  ausgedrückt. Dividirt man diese Gleichung mit der Wurzel aus der Quadratsumme der drei Coefficienten  $a, b, c$ , d. i. mit  $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = m$ , so kann man drei Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  bestimmen durch die Gleichungen

$$\cos \alpha = \frac{a}{m}, \quad \cos \beta = \frac{b}{m}, \quad \cos \gamma = \frac{c}{m}, \quad \text{welche zugleich}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad \text{ergeben. Die Gleichung}$$

der Ebene wird  $\cos \alpha \cdot x + \cos \beta \cdot y + \cos \gamma \cdot z = \frac{k}{m},$

und in dieser Form bedeuten die Coefficienten von  $x, y, z$  der Reihe nach die Cosinus der Neigungen der Ebene gegen die Ebenen  $yz, xz, xy$ ; ferner  $\frac{k}{m}$  den senkrechten Abstand der Ebene vom Anfange der Coordinaten. Hat man die Gleichungen zweier

Ebenen  $ax + by + cz = k$ ,  $a'x + b'y + c'z = k'$   
 so wird ihre gegenseitige Neigung  $i$  durch die Formel

$$\cos i = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

bestimmt, oder wenn  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ,  $a = \cos \alpha$ ,  $b = \cos \beta$ ,  $c = \cos \gamma$ , und eben so  $a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1$ ,  $a' = \cos \alpha'$ ,  $b' = \cos \beta'$ ,  $c' = \cos \gamma'$  ist, so wird

$$\cos i = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma'.$$

Diese Formeln, von welchen man häufig Gebrauch zu machen Gelegenheit hat, sind hier nur in Erinnerung gebracht, werden aber aus der analytischen Trigonometrie als bekannt voraus gesetzt. — Als ein zweites Beispiel von besonderer Wichtigkeit dient die Gleichung  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ , welche eine Kugel bedrückt;  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sind die Coordinaten ihres Mittelpunktes, und  $r$  der Halbmesser.

Oft ist es vortheilhaft, die Coordinaten der Punkte einer Fläche als Functionen zweier Veränderlichen  $p$ ,  $q$  auszudrücken. Hat man nämlich  $x = f(p, q)$ ,  $y = \varphi(p, q)$ ,  $z = \psi(p, q)$ , so kann man zwischen diesen drei Gleichungen  $p$  und  $q$  eliminiren, um die Gleichung der Fläche zu erhalten. Es sei z. B.

$x - a = A \cos p \cos q$ ,  $y - b = B \cos p \sin q$ ,  $z - c = C \sin p$ ,  
 so ergiebt sich durch Elimination

$$\frac{(x-a)^2}{A^2} + \frac{(y-b)^2}{B^2} + \frac{(z-c)^2}{C^2} = 1,$$

die Gleichung eines Ellipsoides.

68. Wenn man aus den beiden Gleichungen für eine Curve,  $f(x, y, z) = 0$ ,  $\varphi(x, y, z) = 0$ , das eine Mal z. B.  $z$ , das andere Mal  $y$  eliminirt, so erhält man zwei andere Gleichungen, die eine zwischen  $x$  und  $y$ , die andere zwischen  $x$  und  $z$ . Diese drücken die senkrechten Projectionen der Curve auf die Ebenen  $xy$ ,  $xz$  aus. — Ferner kann man auch die Coordinaten der Punkte einer Curve als Functionen einer neuen Veränderlichen

$t$  darstellen, so daß  $x=ft$ ,  $y=gt$ ,  $z=ht$  ebenfalls eine Form der Gleichungen einer Curve ist, indem man durch Elimination von  $t$  zwei Gleichungen zwischen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  erhält. Ein einfaches Beispiel liefern die Gleichungen:

$$x=at+\alpha, \quad y=bt+\beta, \quad z=ct+\gamma,$$

die offenbar eine gerade Linie ausdrücken. Die Elimination von  $t$

gibt

$$\frac{x-\alpha}{a} = \frac{y-\beta}{b} = \frac{z-\gamma}{c},$$

eine gewöhnliche Form der Gleichungen der geraden Linie im Raume. Setzt man wieder  $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=m$ , und

$$\cos \lambda = \frac{a}{m}, \quad \cos \mu = \frac{b}{m}, \quad \cos \nu = \frac{c}{m},$$

so sind  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  die Neigungen der Geraden gegen die Axen  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , wovon die analytische Trigonometrie nähere Rechenschaft giebt. Hat man für eine gerade Linie den Ausdruck:

$$\frac{x-\alpha}{a} = \frac{y-\beta}{b} = \frac{z-\gamma}{c},$$

und für eine Ebene  $ax+by+cz=k$ , so stehen die Linie und die Ebene auf einander senkrecht.

69. Es sei eine Curve im Raume vorgelegt. Zieht man durch zwei beliebige Punkte  $a$  und  $b$  derselben, deren Coordinaten  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  heißen mögen, eine Sehne, so erhält man folgende Gleichungen dieser Geraden

$$\frac{u-x}{x'-x} = \frac{v-y}{y'-y} = \frac{w-z}{z'-z}.$$

Indem man sich wieder den Punkt  $a$  fest denkt, während die Richtung der Sehne ab so geändert wird, daß  $b$  auf der Curve bleibend dem  $a$  immer näher rückt, und endlich mit ihm zusammenfällt, so gehen, bei dem Zusammenfallen, die Verhältnisse  $x'-x : y'-y : z'-z$  in die Differentialverhältnisse  $dx : dy : dz$  über, und man erhält für die Tangente im Punkte  $a$ :

$$\frac{u-x}{dx} = \frac{v-y}{dy} = \frac{w-z}{dz}.$$

Die Verhältnisse  $dx : dy : dz$  findet man durch Differentiation der Gleichungen der Curve. Ist z. B.  $x = ft$ ,  $y = \varphi t$ ,  $z = \psi t$  gegeben, so wird  $dx : dy : dz = f : \varphi' : \psi'$ ; also

$$\frac{u-ft}{f} = \frac{v-\varphi t}{\varphi'} = \frac{w-\psi t}{\psi'}$$

für die Tangente.

Eine auf die Tangente senkrechte, durch den Berührungspunct gelegte Ebene heißt die Normal-Ebene, und ihre Gleichung ist:  $(u-x)dx + (v-y)dy + (w-z)dz = 0$ .

70. Durch je drei Punkte einer Curve, welche nicht in einer Geraden liegen, kann man einen Kreis legen. Je näher die drei Punkte einander liegen, desto mehr nähert sich dieser Kreis einem Kreise, welcher mit der Curve eine Berührung zweiter Ordnung hat. Ein solcher Kreis heißt der Krümmungskreis, wie bei den ebenen Curven, und seine Ebene die sich der Curve anschließende Ebene. Sie bleibt beständig dieselbe, wenn die Curve eben ist, wechselt aber von einem Punkte zum anderen, bei Curven doppelter Krümmung.

Um den Krümmungskreis zu finden, setze man folgende zwei Gleichungen:

$$(u-a)^2 + (v-b)^2 + (w-c)^2 = \rho^2. \quad 1.$$

$$A(u-a) + B(v-b) + C(w-c) = 0. \quad 2.$$

Die erstere bezeichnet eine Kugel vom Halbmesser  $\rho$ , die zweite eine durch den Mittelpunkt der Kugel gelegte Ebene; also beide zusammen einen Kreis in dieser Ebene, der zugleich ein größter Kreis der Kugel ist. Es sind mithin 6 Größen zu bestimmen, nämlich die Coordinaten  $a, b, c$  des Mittelpunctes, der Halbmesser  $\rho$  des Krümmungskreises, und die Verhältnisse  $A : B : C$ , von welchen die Lage seiner Ebene abhängt.

Damit erstens der Kreis durch den Punct  $x, y, z$  gehe,

muß sein:  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \rho^2.$  3.

$A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = 0.$  4.

Ferner müssen dieselben Werthe der ersten und zweiten Ableitungen von  $x, y, z$  sowohl dem Kreise als der Curve zukommen. Man darf daher nur die beiden Gleichungen 3. u. 4. jede zweimal differentiiren, so erhält man die noch nöthigen Gleichungen,

nämlich:  $(x-a)dx + (y-b)dy + (z-c)dz = 0.$  5.

$A dx + B dy + C dz = 0.$  6.

$(x-a)d^2x + (y-b)d^2y + (z-c)d^2z + dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0.$  7.

$A d^2x + B d^2y + C d^2z = 0.$  8.

Subtrahirt man die Gleichung 4. von 2., so kommt die Gleichung der anschließenden Ebene:

$A(u-x) + B(v-y) + C(w-z) = 0,$  9.

Aus 6. und 8. findet man sofort:

$A = dy d^2z - dz d^2y, \quad B = dz d^2x - dx d^2z,$

$C = dx d^2y - dy d^2x.$

(Man sieht, daß es nur auf die Verhältnisse  $A:B:C$  ankommt). Werden ferner aus 5. und 7.  $x-a, y-b, z-c$  der Reihe nach weggelassen, so kommt:

$B(z-c) - C(y-b) = dx(dx^2 + dy^2 + dz^2),$  10.

$C(x-a) - A(z-c) = dy(dx^2 + dy^2 + dz^2),$  11.

$A(y-b) - B(x-a) = dz(dx^2 + dy^2 + dz^2),$  12.

von welchen Gleichungen jede eine Folge der beiden anderen ist. Multiplicirt man 4. mit  $A$ , und setzt für  $A(y-b)$  u.  $A(z-c)$  ihre Werthe aus 11. und 12., so kommt:

$(A^2 + B^2 + C^2)(x-a) = (C dy - B dz)(dx^2 + dy^2 + dz^2),$

Desgleichen ist:

$(A^2 + B^2 + C^2)(y-b) = (A dz - C dx)(dx^2 + dy^2 + dz^2),$

$(A^2 + B^2 + C^2)(z-c) = (B dx - A dy)(dx^2 + dy^2 + dz^2).$  13.

Addirt man die Quadrate dieser Gleichungen, und bemerkt, daß

$(Cdy - Bdz)^2 + (Adz - Cdx)^2 + (Bdx - Ady)^2 =$   
 $(A^2 + B^2 + C^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (Adx + Bdy + Cdz)^2,$   
 ferner  $Adx + Bdy + Cdz = 0$  ist, so kommt, mit Rücksicht auf 3.

$$(A^2 + B^2 + C^2)\rho^2 = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^2.$$

Demnach erhält man folgenden Ausdruck für den Krümmungshalbmesser  $\rho$ :

$$\rho = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{[(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2]}}.$$

Der Nenner dieses Ausdruckes läßt sich auch, wenn man die Quadrate entwickelt, auf folgende Form bringen:

$$\sqrt{[(dx^2 + dy^2 + dz^2)(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) - (dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z)^2]}.$$

Anm. In der Folge wird zuweilen von dem umgekehrten Werthe von  $\rho$ , nämlich  $\frac{1}{\rho}$ , als dem Maße der Krümmung, oder schlechthin der Krümmung der Curve, in irgend einem Punkte, die Rede sein.

71. Beispiel. Die drei Gleichungen  $x = m \cos \varphi$ ,  $y = m \sin \varphi$ ,  $z = n\varphi$  drücken eine Schraubenlinie aus, die sich auf einem geraden Cylinder befindet, dessen Grundfläche ein Kreis vom Halbmesser  $m$  ist. Betrachtet man  $\varphi$  als unabhängige Größe, so wird  $dx = -m \sin \varphi d\varphi = -y d\varphi$ ,  $dy = m \cos \varphi d\varphi = x d\varphi$ ,  $dz = n d\varphi$ ,  $d^2x = -x d\varphi^2$ ,  $d^2y = -y d\varphi^2$ ,  $d^2z = 0$ , weil  $d^2\varphi = 0$ ; mithin erhält man:  $dx:dy:dz = -y:x:n$ ; also für die Tangente:

$$\frac{u-x}{-y} = \frac{v-y}{x} = \frac{w-z}{n}$$

und für die Normalebene:  $-y(u-x) + x(v-y) + n(w-z) = 0$ , oder  $uy - vx - n(w-z) = 0$ . Sind  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  die Neigungen der Normalebene gegen die Ebenen  $yz$ ,  $xz$ ,  $xy$ , oder, was dasselbe ist, die Neigungen der Tangente gegen die Axen  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , so findet man, mit Rücksicht auf die Gleichung  $x^2 + y^2 = m^2$ ,

$$\cos \alpha = \frac{-y}{\sqrt{n^2 + m^2}}, \quad \cos \beta = \frac{x}{\sqrt{n^2 + m^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{n}{\sqrt{n^2 + m^2}}.$$

Sämmtliche Normalebenen haben also gegen die Ebene  $xy$ , oder sämmtliche Tangenten gegen die Axe der  $z$ , gleiche Neigungen, weil der Werth von  $\cos \gamma$  für alle Punkte der Curve derselbe ist.

Man erhält ferner  $A = dy d^2z - dz d^2y = ny d\varphi^2$ ,

$$B = -nxd\varphi^2, \quad C = (x^2 + y^2)d\varphi^2 = m^2 d\varphi^2,$$

sodann  $Cdy - Bdz = (n^2 + m^2)xd\varphi^4$ ,

$$Adz - Cdx = (n^2 + m^2)y d\varphi^4, \quad Bdx - A dy = 0,$$

und  $dx^2 + dy^2 + dz^2 = (n^2 + x^2 + y^2)d\varphi^2 = (n^2 + m^2)d\varphi^2$ ;

mithin entsteht folgende Gleichung der anschließenden Ebene:

$$ny(u-x) - nx(v-y) + m^2(w-z) = 0,$$

oder:  $nyu - nxv + m^2(w-z) = 0$ .

Diese Ebene ist also gegen  $(xy)$  unter dem beständigen Winkel,

dessen Cosinus  $\frac{m^2}{\sqrt{[n^2 y^2 + n^2 x^2 + m^4]}}$ , d. i.  $\frac{m}{\sqrt{n^2 + m^2}}$ ,

geneigt. Ferner erhält man  $A^2 + B^2 + C^2 = m^2(n^2 + m^2)d\varphi^4$  und hieraus den Krümmungshalbmesser  $\rho$  und die Coordinaten  $a, b, c$  seines Mittelpunctes, wie folgt:

$$x - a = \frac{(n^2 + m^2)x}{m^2}, \quad y - b = \frac{(n^2 + m^2)y}{m^2}, \quad z - c = 0,$$

oder:  $a = -\frac{n^2 x}{m^2}, \quad b = -\frac{n^2 y}{m^2}, \quad c = z; \quad \rho = \frac{n^2 + m^2}{m}$ .

Setzt man in die Werthe von  $a, b, c$  statt  $x, y, z$  wieder  $m \cos \varphi, m \sin \varphi, n\varphi$ , so kommt:

$$a = -\frac{n^2 \cos \varphi}{m}, \quad b = -\frac{n^2 \sin \varphi}{m}, \quad c = n\varphi.$$

Die Krümmungsmittelpuncte liegen dennoch wieder in einer Schraubenlinie, die sich auf einem Cylinder vom Halbmesser  $\frac{n^2}{m}$  befindet, dessen Axe mit der des vorigen Cylinders vom Halbmesser  $m$  einerlei ist.



## § 1 d e n.

72. Eine Fläche werde durch eine beliebige Ebene geschnitten; man sucht die Gleichungen der Tangente an einen Punkt  $(x, y, z)$  der Curve des Schnittes. — Nach dem Vorigen ist für die Tangente an einer Curve allgemein:

$$\frac{u-x}{dx} = \frac{v-y}{dy} = \frac{w-z}{dz}. \quad 1.$$

Die Gleichungen der Fläche  $f(x, y, z) = 0$  und der schneidenden Ebene  $\alpha x + \beta y + \gamma z = k$  geben differenziert:

$$\frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dz} dz = 0. \quad 2.$$

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0. \quad 3.$$

Hieraus erhält man

$$dx:dy:dz = \gamma \frac{df}{dy} - \beta \frac{df}{dz} : \alpha \frac{df}{dz} - \gamma \frac{df}{dx} : \beta \frac{df}{dx} - \alpha \frac{df}{dy},$$

welche Verhältnisse in den Ausdruck für die Tangente (1) eingesetzt werden können. Statt aber dieses zu thun, setze man die

Werthe  $\frac{dy}{dx} = \frac{v-y}{u-x}$ ,  $\frac{dz}{dx} = \frac{w-z}{u-x}$  aus 1, in 2. und 3, so er-

hält man die Gleichung zweier Ebenen, deren Durchschnitt die Tangente ist, nämlich:

$$\frac{df}{dx}(u-x) + \frac{df}{dy}(v-y) + \frac{df}{dz}(w-z) = 0. \quad 4.$$

$$\alpha(u-x) + \beta(v-y) + \gamma(w-z) = 0. \quad 5.$$

Die Gleichung 5. drückt offenbar die Ebene des durch  $(x, y, z)$  gelegten Schnittes aus. Die Gleichung 4. dagegen stellt eine Ebene dar, welche ebenfalls durch den Punkt  $(x, y, z)$  geht; übrigens aber von der Lage des Schnittes ganz unabhängig ist. Wie daher auch die Ebene des durch  $(x, y, z)$  gehenden Schnittes liegen möge, so liegt die Tangente desselben, für diesen Punkt, immer in der Ebene 4., oder diese Ebene ist der Ort der Tangenten, welche sich an beliebige ebene Schnitte, die durch densel-

ben Punkt der Fläche gelegt werden, in diesem Punkte stehen lassen. Sie heiße die Berührungsebene der Fläche.

Die auf der Berührungsebene im Berührungspunkte senkrecht errichtete Linie heißt Normale, und ihre Gleichungen sind:

$$\frac{u-x}{\frac{df}{dx}} = \frac{v-y}{\frac{df}{dy}} = \frac{w-z}{\frac{df}{dz}}.$$

Wird  $z$  als Function von  $x$  und  $y$  angesehen, und werden seine partiellen Ableitungen  $\left(\frac{dz}{dx}\right)$  mit  $p$ ,  $\left(\frac{dz}{dy}\right)$  mit  $q$  bezeichnet, so ist

$$dz = p dx + q dy, \quad \text{und} \quad \frac{df}{dx} + p \cdot \frac{df}{dz} = 0, \quad \text{so wie}$$

$$\frac{df}{dy} + q \frac{df}{dz} = 0. \quad \text{Unter dieser Voraussetzung erhält man für die}$$

Berührungsebene die Gleichung

$$w-z = p(u-x) + q(v-y),$$

und für die Normale:

$$\frac{u-x}{p} = \frac{v-y}{q} = -(w-z),$$

$$\text{oder auch } u-x + p(w-z) = 0, \quad v-y + q(w-z) = 0.$$

73. Als Gleichung für irgend eine beliebig durch die Normale gelegte Ebene sei angenommen

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = k,$$

so sieht man leicht, daß  $\gamma = \alpha p + \beta q$  sein muß, damit der Schnitt ein Normalschnitt sei, d. h. durch die Normale gehe.

Es soll jetzt die Krümmung  $\left(\frac{1}{\rho}\right)$  dieses Schnittes, in dem Punkte  $x, y, z$ , bestimmt werden.

Der allgemeine Ausdruck für das Quadrat des Krümmungsmaßes, ist nach §. 70., folgender:

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{(dy d^2z - d^2y dz)^2 + d^2y^2 + d^2z^2}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^3},$$

wenn  $d^2x = 0$  gesetzt wird. Die Gleichungen des vorgelegten Schnittes sind die der Fläche  $f(x, y, z) = 0$  und der schneiden-

den Ebene  $\alpha x + \beta y + \gamma z = k$ . Durch Differentiirung derselben erhält man:  $dz = p dx + q dy$ ,  $\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0$ ,

$$d^2 z = r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2 + q d^2 y,$$

$$\left( r = \frac{d^2 z}{dx^2}, s = \frac{d^2 z}{dx dy}, t = \frac{d^2 z}{dy^2} \right)$$

$$\beta d^2 y + \gamma d^2 z = 0.$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha + p\gamma}{\beta + q\gamma}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{p\beta - q\alpha}{\beta + q\gamma},$$

und wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$r + 2s \frac{dy}{dx} + t \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = h,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-h\gamma}{\beta + q\gamma}, \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{h\beta}{\beta + q\gamma}.$$

In den vorstehenden Ausdrücken muß man sich die Werthe eingesetzt denken, welche  $p, q, r, s, t$  in dem vorgelegten Punkte erhalten. Da die schneidende Ebene zugleich durch die Normale dieses Punktes geht, so muß auch

$$\gamma = \alpha p + \beta q$$

gesetzt werden, wie oben schon bemerkt ist. Hierdurch erhält man:

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dx^2} = \frac{(\beta + q\gamma)^2 + (\alpha + p\gamma)^2 + (p\beta - q\alpha)^2}{(\beta + q\gamma)^2}.$$

Wird der Zähler auf der rechten Seite entwickelt, und der obige Werth von  $\gamma$  berücksichtigt, so findet man denselben

$$\begin{aligned} &= \alpha^2(1 + q^2) + \beta^2(1 + p^2) + 2(\alpha p + \beta q)\gamma + (p^2 + q^2)\gamma^2 - 2pq\alpha\beta \\ &= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(1 + p^2 + q^2) - \alpha^2 p^2 - \beta^2 q^2 - 2pq\alpha\beta + \gamma^2 \\ &= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(1 + p^2 + q^2) = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)l^2, \end{aligned}$$

wenn noch  $1 + p^2 + q^2 = l^2$  gesetzt wird. Daher

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dx^2} = \frac{l^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{(\beta + q\gamma)^2},$$

A.

Ferner erhält man

$$Q = \frac{dy d^2 z - dz d^2 y}{dx^3} = \frac{-\beta(\alpha + p\gamma) + \gamma(p\beta - q\alpha)}{(\beta + q\gamma)^2} h = -\frac{\alpha h}{\beta + q\gamma},$$

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\gamma h}{\beta + q\gamma}, \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{\beta h}{\beta + q\gamma};$$

woraus  $Q^2 + \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)^2 = \frac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)h^2}{(\beta + q\gamma)^2},$  B.

und, mit Hülfe der Gleichungen A. und B.

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{h^2(\beta + q\gamma)^4}{l^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2}$$

oder  $\frac{1}{\rho} = \frac{h(\beta + q\gamma)^2}{l^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$  C.

gefunden wird. Multiplicirt man jedes Glied der Gleichung A. mit dem auf der nämlichen Seite befindlichen von C., und entwickelt  $\frac{1}{\rho}$ , so kommt

$$\frac{1}{\rho} = \frac{h dx^2}{l(dx^2 + dy^2 + dz^2)}.$$

Man schreibe zur Abkürzung  $s$  für  $\frac{dy}{dx}$ , und setze für  $dz$  seinen Werth  $pdx + qdy$  oder  $(p + qs)dx$ , und  $r + 2ss + ts^2$  für  $h$ , so kommt

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r + 2ss + ts^2}{l(1 + s^2 + (p + qs)^2)},$$
 D.

der Ausdruck für die Krümmung irgend eines Normalschnittes. Die sämtlichen Normalschnitte unterscheiden sich von einander durch die verschiedenen Werthe, welche das Verhältniß  $\beta : \alpha$  für jeden derselben erlangt. Da aber  $s = \frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha + p\gamma}{\beta + q\gamma}$ ,  $\gamma = \alpha p + \beta q$ , so sieht man, daß sich  $s$  nach den verschiedenen Lagen des Normalschnittes mit dem Verhältnisse  $\beta : \alpha$  zugleich ändert. Man kann demnach diejenigen Normalschnitte suchen, welchen die größte oder kleinste Krümmung zukommt, oder vielmehr, genauer zu reden, diejenigen, in welchen ein Wechsel der

Ab- und Zunahme der Krümmung, in Hinsicht auf die benachbarten Normalschnitte eintritt. Diese Normalschnitte sollen in der Folge Hauptschnitte genannt werden. Um sie zu finden, darf man nur aus D., die Ableitung von  $\frac{1}{\rho}$  nach  $\varepsilon$  nehmen und gleich Null setzen. Es war

$$\rho(r+2s\varepsilon+ts^2)=l(1+\varepsilon^2+(p+q\varepsilon)^2).$$

Wird diese Gleichung nach  $\rho$  und  $\varepsilon$  differentiiert,  $d\rho$  aber Null gesetzt, so erhält man sofort:

$$\rho(s+te)=l(\varepsilon+(p+q\varepsilon)q),$$

und folglich, wenn aus den beiden vorstehenden Gleichungen  $\rho$  eliminiert wird:

$$\frac{r+2s\varepsilon+ts^2}{s+te}=\frac{1+\varepsilon^2+(p+q\varepsilon)^2}{pq+\varepsilon(1+q^2)}.$$

Entwickelt man diese Gleichung nach Potenzen von  $\varepsilon$ , so kommt, indem sich die höchsten Glieder aufheben:

$$[s(1+q^2)-tpq]\varepsilon^2+[r(1+q^2)-l(1+p^2)]\varepsilon+pqr-s(1+p^2)=0.$$

74. Diese Rechnung setzt offenbar voraus, daß die Ableitungen  $p, q, r, s, t$  in dem gewählten Punkte sämmtlich bestimmte Werthe haben, indem mehrere Schlüsse ungünstig würden, wenn ein besonderer Punkt der Fläche vorhanden und gewählt wäre, für welchen diese Annahme nicht Statt fände. Im Allgemeinen also giebt es zwei Hauptschnitte, wie vorstehende quadratische Gleichung lehrt. Man kann ferner beweisen, daß die Ebenen dieser Hauptschnitte immer senkrecht auf einander stehen. Denn man denke sich den vorgelegten Punkt zum Anfange der Coordinaten, und die Berührungsebene daran zur Ebene der  $x, y$  oder  $u, v$  gewählt. Die allgemeine Gleichung der Berührungsebene an einen Punkt  $x, y, z$  ist  $w-z=p(u-x)+q(v-y)$ ; in dem angenommenen Falle ist sie aber die Ebene  $u, v$ , also ihre Gleichung  $w=0$ ; so daß nicht allein  $x=0, y=0, z=0$ , sondern auch  $p=0, q=0$  ist.

Wird in der obigen Gleichung für  $\varepsilon$ , in Folge der erwähnten Annahme der Coordinaten,  $p=0$ ,  $q=0$  gesetzt, so kommt:

$$\varepsilon^2 + \frac{r-t}{s} \cdot \varepsilon - 1 = 0,$$

welche Gleichung offenbar immer zwei reelle Wurzeln hat.

Nun war  $\varepsilon = \frac{dy}{dx}$ ; es sei ferner  $y = x \operatorname{tg} \mu$  die Gleichung

eines der beiden gesuchten Hauptschnitte, so wird  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \mu$ .

Für den zweiten Hauptschnitt sei  $y = x \cdot \operatorname{tg} \mu'$ ; so sind  $\operatorname{tg} \mu$  und  $\operatorname{tg} \mu'$  die beiden Werthe von  $\varepsilon$ , welche sich aus der vorstehenden Gleichung ergeben, und man hat:

$$\operatorname{tg} \mu + \operatorname{tg} \mu' = \frac{t-r}{s}, \quad \operatorname{tg} \mu \operatorname{tg} \mu' = -1.$$

Die letzte dieser Gleichungen giebt  $\cos \mu \cos \mu' + \sin \mu \sin \mu' = 0$ , oder  $\cos(\mu - \mu') = 0$ , also  $\mu - \mu' = \pm \frac{1}{2}\pi$ , woraus hervorgeht, daß die beiden Hauptschnitte senkrecht auf einander stehen, w. z. b. w.

75. Es ist noch übrig, die Krümmungsmaasse der Hauptschnitte allgemein auszudrücken, zu welchem Zwecke  $s$  aus den beiden Gleichungen:

$$\rho(r + 2s\varepsilon + t\varepsilon^2) = l(1 + \varepsilon^2 + (p + q\varepsilon)^2)$$

$$\rho(s + t\varepsilon) = l(pq + (1 + q^2)s)$$

zu eliminiren ist. Zur Vereinfachung setze man noch  $\rho = \lambda l$ , so hat man

$$\lambda(r + 2s\varepsilon + t\varepsilon^2) = 1 + p^2 + 2pq\varepsilon + (1 + q^2)s^2,$$

$$\lambda(s + t\varepsilon) = pq + (1 + q^2)s.$$

Nimmt man den Werth von  $s$  aus der zweiten Gleichung und setzt ihn in die erste, so kommt:

$$\begin{aligned} \lambda[r(1 + q^2 - \lambda t)^2 + 2s(1 + q^2 - \lambda t)(\lambda s - pq) + t(s\lambda - pq)^2] = \\ (1 + p^2)(1 + q^2 - \lambda t)^2 + 2pq(1 + q^2 - \lambda t)(\lambda s - pq) \\ + (1 + q^2)(\lambda s - pq)^2. \end{aligned}$$

Diese Gleichung bringe man auf Null, und bemerke, daß alsdann  $1+q^2-\lambda t$  ein gemeinsamer Factor aller Glieder wird, der offenbar im Allgemeinen nicht Null sein kann, weil sonst der Werth von  $\varepsilon = \frac{\lambda s - pq}{1+q^2-\lambda t}$  entweder unendlich groß sein, oder der Zähler  $\lambda s - pq$  mit dem Nenner zugleich verschwinden müßte, was allgemein nicht der Fall ist; so erhält man, indem man den anderen Factor gleich Null setzt:

$$(1+p^2-\lambda r)(1+q^2-\lambda t) - (pq-\lambda s)^2 = 0,$$

mithin:

$$(rt-s^2)\lambda^2 - [r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)]\lambda + 1+p^2+q^2 = 0,$$

oder, wenn wieder für  $\lambda$ ,  $\frac{\rho}{l}$  eingeführt wird, wo

$$l = \sqrt{1+p^2+q^2} \text{ ist,}$$

$$(rt-s^2)\rho^2 - [r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)]l\rho + l^4 = 0.$$

Durch diese quadratische Gleichung werden also die Krümmungshalbmesser der Hauptschnitte bestimmt. Nennt man den einen dieser beiden Krümmungshalbmesser  $\rho'$ , den andern  $\rho''$ , so ist:

$$\rho' + \rho'' = \frac{[r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)]l}{rt-s^2}, \quad \rho'\rho'' = \frac{l^4}{rt-s^2}.$$

76. Da die Ebenen der beiden Hauptschnitte senkrecht auf einander stehen, so kann man sie, die Ebene  $xy$  wieder als Berührungsebene genommen, zu Ebenen der  $xz$  und  $yz$  wählen. Alsdann wird nicht allein  $p=0$ ,  $q=0$ , sondern auch  $s=0$ . Um dies einzusehen, darf man nur auf die Gleichung

$s^2 + \frac{r-t}{s} \cdot s - 1 = 0$  zurückgehen, von welcher  $\operatorname{tg} \mu$  und  $\operatorname{tg} \mu'$  die beiden Wurzeln waren. Man hatte  $\operatorname{tg} \mu + \operatorname{tg} \mu' = \frac{r-t}{s}$ . Nach der jetzt geschehenen Wahl der Coordinaten muß aber  $\mu=0$ ,  $\mu'=\frac{1}{2}\pi$ , also  $\operatorname{tg} \mu'$  unendlich groß,

und mithin, wenigstens sofern  $r, t$  endliche Werthe haben,  $s=0$  sein. Durch diese Annahme verwandelt sich der allgemeine Ausdruck der Krümmung  $\frac{1}{\rho}$  in  $\frac{r+ts^2}{1+s^2}$  (§. 73. D.); oder, wenn  $s=\operatorname{tg} \nu$  gesetzt wird, also  $\nu$  die Neigung der Ebene eines Normalschnittes gegen die Ebene  $xz$  ausdrückt, erhält man:

$$\frac{1}{\rho} = r \cos^2 \nu + t \sin^2 \nu.$$

Für die Hauptschnitte wird  $\nu=0, \nu=\frac{1}{2}\pi$ ; mithin  $\rho' = \frac{1}{r}$ ,  
 $\rho'' = \frac{1}{t}$ ; also:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{(\sin \nu)^2}{\rho'} + \frac{(\cos \nu)^2}{\rho''}.$$

Durch diese Formel findet man die Krümmung eines beliebigen Normalschnittes (der mit dem Hauptschnitte, dessen Krümmung  $\frac{1}{\rho'}$  ist, den Winkel  $\nu$  einschließt), wenn man die Krümmungen  $\frac{1}{\rho'}$  und  $\frac{1}{\rho''}$  der beiden Hauptschnitte kennt.

Für einen auf dem vorigen senkrechten Normalschnitt verwandelt sich  $\nu$  in  $\nu + \frac{1}{2}\pi$ , also  $(\cos \nu)^2$  in  $(\sin \nu)^2$ , und  $(\sin \nu)^2$  in  $(\cos \nu)^2$ , und wenn sein Krümmungshalbmesser  $\rho_1$  ist, so kommt:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{(\cos \nu)^2}{\rho'} + \frac{(\sin \nu)^2}{\rho''};$$

woraus sofort folgt:  $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''}$ ; d. i. die Summe der Krümmungsmaasse zweier auf einander senkrechten Normalschnitte ist, für einen bestimmten Punkt der Fläche, beständig dieselbe.

77. Endlich ist noch zu zeigen, wie sich hieraus die Krümmungen anderer Schnitte finden lassen, die gegen die Normal-



Diese Gleichung bringe man auf Null, und bemerke, daß alsdann  $1+q^2-\lambda t$  ein gemeinsamer Factor aller Glieder wird, der offenbar im Allgemeinen nicht Null sein kann, weil sonst der Werth von  $\varepsilon = \frac{\lambda s - pq}{1+q^2-\lambda t}$  entweder unendlich groß sein, oder der Zähler  $\lambda s - pq$  mit dem Nenner zugleich verschwinden müßte, was allgemein nicht der Fall ist; so erhält man, indem man den anderen Factor gleich Null setzt:

$$(1+p^2-\lambda r)(1+q^2-\lambda t) - (pq-\lambda s)^2 = 0,$$

mithin:

$$(rt-s^2)\lambda^2 - [r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)]\lambda + 1+p^2+q^2 = 0,$$

oder, wenn wieder für  $\lambda$ ,  $\frac{\rho}{l}$  eingeführt wird, wo

$l = \sqrt{1+p^2+q^2}$  ist,

$$(rt-s^2)\rho^2 - [r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)]l\rho + l^4 = 0.$$

Durch diese quadratische Gleichung werden also die Krümmungshalbmesser der Hauptschnitte bestimmt. Nennt man den einen dieser beiden Krümmungshalbmesser  $\rho'$ , den andern  $\rho''$ , so ist:

$$\rho' + \rho'' = \frac{[r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)]l}{rt-s^2}, \quad \rho'\rho'' = \frac{l^4}{rt-s^2}.$$

76. Da die Ebenen der beiden Hauptschnitte senkrecht auf einander stehen, so kann man sie, die Ebene  $xy$  wieder als Berührungsebene genommen, zu Ebenen der  $xz$  und  $yz$  wählen. Alsdann wird nicht allein  $p=0$ ,  $q=0$ , sondern auch  $s=0$ . Um dies einzusehen, darf man nur auf die Gleichung

$s^2 + \frac{r-t}{s} \cdot s - 1 = 0$  zurückgehen, von welcher  $\operatorname{tg} \mu$

und  $\operatorname{tg} \mu'$  die beiden Wurzeln waren. Man hatte

$\operatorname{tg} \mu + \operatorname{tg} \mu' = \frac{r-t}{s}$ . Nach der jetzt geschehenen Wahl der Coor-

dinaten muß aber  $\mu=0$ ,  $\mu'=\frac{1}{2}\pi$ , also  $\operatorname{tg} \mu'$  unendlich groß,

mungsmaaß der Fläche, so ist dieses, für die eben erwähnte Art von Flächen, Null. Nun ist aber, nach §. 75., das Krümmungsmaaß einer Fläche  $\frac{1}{\rho'\rho''}$ , allgemein gleich  $\frac{rt-s^2}{I^3}$ ; folglich muß, für die Flächen, deren Krümmungsmaaß Null ist,

$$rt-s^2=0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} - \left( \frac{d^2z}{dxdy} \right)^2 = 0 \quad \text{sein.}$$

Dies ist eine sehr bemerkenswerthe Gleichung zwischen den partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von  $z$ , welcher die Gleichungen der erwähnten Flächen sämtlich Genüge thun müssen.

79. Man kann aber auch eine allgemeine Form für alle diese Gleichungen finden. Es sei zu dem Ende an einen Punct  $(x, y, z)$  einer solchen Fläche eine Berührungsebene gelegt, deren Gleichung

$$w-z=p(u-x)+q(v-y)$$

$$\text{oder} \quad w-pu-qv=z-px-qy$$

sein wird. Man kann nun auf der Fläche so fortgehen, daß man zugleich auf der Berührungsebene bleibt, weil, nach der Voraussetzung, die Fläche von dieser Ebene in einer geraden Linie berührt wird; also können die Werthe von  $x, y, z$  so geändert werden, daß die Gleichung der berührenden Ebene dieselbe bleibt, oder  $p, q, z-px-qy$  ungeändert bleiben. Damit dies in jedem beliebigen Puncte der Fläche möglich sei, muß nothwendig die Gleichung der Fläche so beschaffen sein, daß zwei der Größen  $p, q, z-px-qy$  Functionen der dritten sind, also z. B.

$$q=\varphi p, \quad z-px-qy=\psi p;$$

wo  $\varphi$  und  $\psi$  zwei ganz beliebige Functionen von  $p$  bezeichnen. Die Gleichung für die Berührungsebene der Fläche, an irgend einem beliebigen Puncte, ist demnach

$$w-pu-\varphi p \cdot v=\psi p.$$

Um die Gleichung der Geraden zu finden, in welcher dieselbe die Fläche berührt, denke man sich diese Gerade als die Grenze,

ebene beliebig geneigt sind. Man denke sich einen schiefen Schnitt E, nehme seine Tangente, d. i. seinen Durchschnitt mit der Berührungsebene zur Axe der  $x$ , und die Normale der Fläche zur Axe der  $z$ . Der Krümmungshalbmesser des Normalschnittes  $xz$  wird

nach §. 48. durch  $\frac{(dx^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2 z}$  ausgedrückt. Da aber die

Axe der  $x$  zugleich Tangente an die Curve des Normalschnittes ist, so wird, für den Anfang der Coordinaten,  $\frac{dz}{dx} = 0$ , also ist

$\rho = \frac{dx^2}{d^2 z}$  der Krümmungshalbmesser des Normalschnittes. Nimmt

man ferner eine zweite Axe  $z'$  ebenfalls senkrecht auf  $x$  in der Ebene E an, so wird der Krümmungshalbmesser  $\rho'$  des Schnittes E

durch  $\rho' = \frac{(dx^2 + dz'^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2 z'}$  ausgedrückt, oder weil  $\frac{dz'}{dx}$  ebenfalls

Null ist, durch  $\frac{dx^2}{d^2 z'}$ . Es kommt also nur darauf an, das Ver-

hältniß der Werthe von  $\frac{d^2 z}{dx^2}$  und  $\frac{d^2 z'}{dx^2}$  für den Anfang der

Coordinaten zu finden. Zu dem Ende bezeichne man mit  $i$  die Neigung der Ebenen  $xz$  und E, oder der Axen  $z$  und  $z'$  gegen einander; so ist  $y = 0$  die Gleichung der Ebene  $xz$ , und  $y = z \tan i$  die der Ebene E. Jede dieser Gleichungen ist mit der Gleichung  $f(x, y, z) = 0$  der Fläche zu verbinden, um die Curve des Schnittes zu erhalten. Wird nun vorausgesetzt, daß der vorgelegte Punkt der Fläche kein besonderer Punkt ist, für welchen die Ableitungen aufhören, endliche und reelle Werthe zu haben, so läßt sich  $z$  als Function von  $x$  und  $y$  nach Potenzen dieser Größen entwickeln, so daß

$$z = \left(\frac{dz}{dx}\right) x + \left(\frac{dz}{dy}\right) y + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) x^2 + \dots,$$

oder weil  $\frac{dz}{dx} = p = 0$ ,  $\frac{dz}{dy} = q = 0$ ,  $\frac{d^2 z}{dx^2} = r$ , u. f. f.,

$$z = \frac{1}{2} (rx^2 + 2sxy + ty^2),$$

wenn man alle Glieder, die in Bezug auf  $x$  und  $y$  von höherer als der zweiten Ordnung sind, wegläßt, weil sie, wie man aus der folgenden Rechnung deutlich ersehen wird, keinen Einfluß auf das Resultat haben können. Betrachtet man nun erstens den Normalschnitt  $xz$ , für welchen  $y=0$  ist, so wird für denselben  $z=\frac{1}{2}rx^2$ , also  $\frac{d^2z}{dx^2}=r$ , für  $x=0$ . Für den schiefen Schnitt

E ist  $y=z \operatorname{tg} i$ , oder, wenn man  $z'=\sqrt{y^2+z^2}$  einführt, so ist  $y=z' \sin i$ , und  $z=z' \cos i$ . Werden vorstehende Werthe von  $y$  und  $z$  in den obigen für  $z$  gesetzt, so kommt:

$$2z' \cos i = rx^2 + 2\sin i xz' + z'^2 \sin^2 i.$$

Differentiirt man diese Gleichung zweimal, indem man  $z'$  als Function von  $x$  betrachtet, und setzt hierauf  $x=0$ ,  $z'=0$ ,  $\frac{dz'}{dx}=0$ , so erhält man den Werth, welchen  $\frac{d^2z'}{dx^2}$  für den Anfang der Coordinaten erlangt, nämlich:

$$\frac{d^2z'}{dx^2} \cdot \cos i = r.$$

Folglich ist  $\frac{d^2z'}{dx^2} \cdot \cos i = \frac{d^2z}{dx^2}$ , und mithin, da  $\rho' = \frac{dx^2}{d^2z'}$ ,

$\rho = \frac{dx^2}{d^2z}$  war,  $\rho' = \rho \cos i$ , d. h. der Krümmungshalbmesser  $\rho'$

des schiefen Schnittes E ist die Projection des Krümmungshalbm. des durch die Tangente von E gelegten Normalschnittes. — Diese Sätze enthalten Alles, was nöthig ist, um die Krümmung eines beliebigen Schnittes einer Fläche, in einem gegebenen Punkte zu finden, unter der Voraussetzung, daß die Ableitungen  $p, q, r, s, t$  für diesen Punkt nur endliche und bestimmte Werthe haben. Auf besondere Punkte aber, für welche die Ableitungen unendlich oder unbestimmt werden, sind sie nicht auszudehnen.

78. Wenn in einem Punkte der Fläche die Krümmungsmaasse  $\frac{1}{\rho}$  und  $\frac{1}{\rho'}$  der beiden Hauptschnitte gleiche Zeichen haben,

so folgt aus der Formel des §. 76.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sin \nu^2}{\rho'} + \frac{\cos \nu^2}{\rho''},$$

daß auch das Krümmungsmaaß jedes beliebigen Normalschnittes dasselbe Zeichen hat. Alsdann sind, in diesem Punkte, alle Normalschnitte nach derselben Seite hohl, oder die Berührungsebene liegt ganz auf einer Seite der Fläche. Wenn aber die Krümmungsmaasse der Hauptschnitte entgegengesetzte Zeichen haben, so kehrt der eine die hohle, der andere die erhabene Seite nach derselben Richtung hin, und das Krümmungsmaaß wechselt, für einen zwischen den beiden Hauptschnitten befindlichen Normalschnitt, indem es durch Null geht, sein Zeichen. Alsdann liegt die Berührungsebene nicht ganz auf einer Seite der Fläche, sondern schneidet diese, und zwar in dem Normalschnitte, dessen Krümmungsmaaß Null ist. Solche (concau-conuexe) Flächen entstehen z. B. durch Umdrehung einer Curve, wenn dieselbe der Drehungsaxe ihre erhabene Seite zukehrt.

Zwischen den Flächen, die überall concau-concau, und denen, die überall concau-conuex sind, liegen, als eine Mittelgattung, diejenigen Flächen, von denen der eine Hauptschnitt, in jedem Punkte, das Krümmungsmaaß Null hat. Geht man von irgend einem Punkte einer solchen Fläche in der Richtung dieses Hauptschnittes zu einem unendlich nahen Punkte fort, und von da zu einem zweiten, u. s. w., so erhält man eine Linie in der Fläche, deren Krümmungsmaaß überall Null ist, und die mithin nur eine gerade Linie sein kann. Da nun die Berührungsebene zugleich die Tangente jedes Normalschnittes enthält, so muß sie auch diesen geradlinigten Hauptschnitt berühren, und die in Rede stehenden Flächen haben mithin die Eigenschaft, von der Berührungsebene überall nicht bloß in einem Punkte, sondern in allen Punkten einer geraden Linie berührt zu werden.

Nennt man, (nach Gauß) das Product aus den Krümmungsmaassen  $\frac{1}{\rho'}$ ,  $\frac{1}{\rho''}$  der beiden Hauptschnitte das Krüm-

mungsmaaß der Fläche, so ist dieses, für die eben erwähnte Art von Flächen, Null. Nun ist aber, nach §. 75., das Krümmungsmaaß einer Fläche  $\frac{1}{\rho' \rho''}$ , allgemein gleich  $\frac{rt-s^2}{I^3}$ ; folglich muß, für die Flächen, deren Krümmungsmaaß Null ist,

$$rt-s^2=0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} - \left( \frac{d^2z}{dx dy} \right)^2 = 0 \quad \text{sein.}$$

Dies ist eine sehr bemerkenswerthe Gleichung zwischen den partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von  $z$ , welcher die Gleichungen der erwähnten Flächen sämtlich Genüge thun müssen.

79. Man kann aber auch eine allgemeine Form für alle diese Gleichungen finden. Es sei zu dem Ende an einen Punkt  $(x, y, z)$  einer solchen Fläche eine Berührungsebene gelegt, deren Gleichung

$$w-z=p(u-x)+q(v-y)$$

oder

$$w-pu-qv=z-px-qy$$

sein wird. Man kann nun auf der Fläche so fortgehen, daß man zugleich auf der Berührungsebene bleibt, weil, nach der Voraussetzung, die Fläche von dieser Ebene in einer geraden Linie berührt wird; also können die Werthe von  $x, y, z$  so geändert werden, daß die Gleichung der berührenden Ebene dieselbe bleibt, oder  $p, q, z-px-qy$  ungeändert bleiben. Damit dies in jedem beliebigen Punkte der Fläche möglich sei, muß nothwendig die Gleichung der Fläche so beschaffen sein, daß zwei der Größen  $p, q, z-px-qy$  Functionen der dritten sind, also z. B.

$$q=\varphi p, \quad z-px-qy=\psi p;$$

wo  $\varphi$  und  $\psi$  zwei ganz beliebige Functionen von  $p$  bezeichnen. Die Gleichung für die Berührungsebene der Fläche, an irgend einem beliebigen Punkte, ist demnach

$$w-pu-\varphi p \cdot v=\psi p.$$

Um die Gleichung der Geraden zu finden, in welcher dieselbe die Fläche berührt, denke man sich diese Gerade als die Grenze,

welcher der Durchschnitt zweier in benachbarten Punkten gelegter Berührungsebenen desto näher kommt, je mehr diese Punkte sich dem Zusammenfallen nähern. Es muß demnach für diesen Durchschnitt nicht allein die obige Gleichung gelten, sondern auch diejenige, welche man erhält, wenn man von ihr die Ableitung nach  $p$  nimmt,  $u, v, w$  aber ungeändert läßt. Diese ist

$$u + \varphi'p \cdot v + \psi'p = 0.$$

Giebt man der Größe  $p$  irgend einen beliebigen Werth, so erhält man aus den beiden vorstehenden Gleichungen eine der in der Fläche befindlichen Geraden. Eliminiert man aber  $p$  aus beiden, so erhält man eine Gleichung zwischen den Coordinaten  $u, v, w$ , welche den Ort aller dieser Geraden, d. h. die verlangte Fläche ausdrückt.

Man schreibe  $x, y, z$  statt  $u, v, w$  und  $\alpha$  statt  $p$ , und betrachte in den Gleichungen für die Fläche, nämlich:

$$z - \alpha x - \varphi\alpha \cdot y = \psi\alpha \quad \text{und} \quad x + y\varphi'\alpha + \psi'\alpha = 0,$$

$x$  und  $y$  als unabhängig veränderliche Größen, mithin  $z$  und  $\alpha$  als Functionen derselben. Man nehme nun die partielle Ableitung nach  $x$ , so kommt:

$$\frac{dz}{dx} - \alpha = (x + y\varphi'\alpha + \psi'\alpha) \frac{d\alpha}{dx},$$

oder weil  $x + y\varphi'\alpha + \psi'\alpha = 0$ ;  $\frac{dz}{dx} = \alpha.$

Wird ferner die Ableitung nach  $y$  genommen, so erhält man  $\frac{dz}{dy} - \varphi\alpha = 0$ ; also ist  $\frac{dz}{dy} = \varphi\left(\frac{dz}{dx}\right)$ , oder, nach den früheren Bezeichnungen  $q = \varphi p$ . Nimmt man von dieser Gleichung wieder die Ableitungen nach  $x$  und  $y$ , so kommt:

$$\frac{d^2z}{dx dy} = \varphi' \left( \frac{dz}{dx} \right) \cdot \frac{d^2z}{dx^2}$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \varphi' \left( \frac{dz}{dx} \right) \cdot \frac{d^2z}{dx dy};$$

oder, kürzer bezeichnet,  $s = \varphi'p \cdot r$ ,  $t = \varphi'p \cdot s$ , mithin, durch Elimination von  $\varphi'p$ :

$$rt - s^2 = 0.$$

Die in den Gleichungen  $z - \alpha x - \varphi\alpha \cdot y = \psi\alpha$  und  $x + y\varphi'\alpha + \psi'\alpha = 0$  enthaltenen Flächen genügen, also sämtlich der oben gefundenen Gleichung  $rt - s^2 = 0$ , oder haben das Krümmungsmaaß Null.

80. Man stelle sich im Raume ein beliebiges geradlinigtes, aber nicht in einer Ebene enthaltenes Polygon ABCDE vor (Fig. 18.). Werden die Seiten über die Spitzen hinaus verlängert, und durch je zwei auf einander folgende Seiten Ebenen gelegt, so entsteht ein Polypeder, dessen Grenzflächen in der Figur durch GBH, HCK, KDE dargestellt werden. Denkt man sich nun die erste dieser Grenzflächen, GBH, fest, und dreht den benachbarten Theil der Polypederfläche um die Kante BH, bis die nächste Grenzfläche HCK in die Ebene der vorigen GBH fällt; dreht hierauf den folgenden Theil der Polypederfläche um die Kante DK, bis die Grenzfläche KDE wieder mit den beiden vorigen in einer Ebene liegt, u. s. f.; so wird die ganze Polypederfläche in eine Ebene ausgebreitet oder abgewickelt. Dieses gilt, wie klein auch die Seiten des gegebenen Polygons ABCDE werden mögen, und besteht also auch noch, wenn das Polygon in eine Curve übergeht. Alsdann verwandeln sich die Verlängerungen der Seiten des Polygons in die Tangenten der Curve, und das ganze Polypeder in eine abwickelbare Fläche, von welcher die Grenzflächen des Polypeders berührende Ebenen werden. Um die Gleichung dieser Fläche zu finden, seien  $y = fx$ ,  $z = Fx$  die Gleichungen der Curve, so sind

$$u - x = \frac{v - y}{f'x} = \frac{w - z}{F'x}$$

die Gleichungen ihrer Tangente, welche sich auch schreiben lassen, wie folgt:



$$w - uF'x = Fx - xF'x$$

$$v - uf'x = fx - xf'x.$$

Wird  $x$  aus diesen beiden Gleichungen eliminirt, so erhält man die Gleichung der abwickelbaren Fläche, zwischen den Coordinaten  $u, v, w$ .

Man schreibe wieder  $x, y, z$  statt  $u, v, w$  und  $\beta$  statt  $x$ , so kommt:

$$z - xF'\beta = F\beta - \beta F'\beta.$$

$$y - xf'\beta = f\beta - \beta f'\beta. \quad /$$

Diese Gleichungen sind zwar von den im vorigen §. gefundenen, nämlich:  $z - \alpha x - \varphi\alpha \cdot y = \psi\alpha$  und  $x + y\varphi'\alpha + \psi'\alpha = 0$

der Form nach verschieden, drücken aber wesentlich nur dieselben Flächen aus. Nimmt man nämlich die Ableitungen derselben nach  $x$  und nach  $y$ , so kommt

$$p - F'\beta = (x - \beta)F''\beta \cdot \frac{d\beta}{dx}, \quad q = (x - \beta)F''\beta \cdot \frac{d\beta}{dy};$$

$$-f'\beta = (x - \beta)f''\beta \cdot \frac{d\beta}{dx}, \quad 1 = (x - \beta)f''\beta \cdot \frac{d\beta}{dy};$$

folglich durch Division

$$\frac{p - F'\beta}{-f'\beta} = \frac{F''\beta}{f''\beta}, \text{ oder } p = \frac{F'\beta f''\beta - f'\beta F''\beta}{f'\beta \cdot f''\beta}, \text{ und } q = \frac{F''\beta}{f''\beta},$$

woraus, durch Elimination von  $\beta$ , nichts weiter folgt, als daß  $q$  eine Function von  $p$  ist, wie vorhin.

81. Man kann aber auch die Gleichung der abwickelbaren Flächen sofort in der Gestalt der in §. 79. erhaltenen Gleichungen finden, wenn man von der Berührungsebene derselben ausgeht. Diese Berührungsebene ist nämlich keine andere, als die anschließende Ebene der Curve  $y = fx, z = Fx$ , deren Tangenten die Fläche erzeugen.

Die Gleichung für die anschließende Ebene ergibt sich nach §. 70:

$$(F'_x \cdot f'_x - f_x \cdot F''_x)(u - x) + F''_x(v - f_x) - f'_x(w - F_x) = 0.$$

Man setze  $F'_x \cdot f'_x - f_x \cdot F''_x = f'_x \cdot \alpha$ ,  $F''_x = f'_x \cdot \varphi \alpha$ ,

$$-(F'_x \cdot f'_x - f_x F''_x)x - F''_x f_x + f'_x F_x = f'_x \cdot \psi \alpha;$$

und schreibe  $x, y, z$  statt  $u, v, w$ , so erhält die Gleichung der anschließenden Ebene die Form:

$$z - \alpha x - \varphi \alpha \cdot y = \psi \alpha,$$

in welcher  $\varphi \alpha$  und  $\psi \alpha$  zwei Functionen von  $\alpha$  sind, deren Form, nach Beschaffenheit der Gleichungen der Curve,  $y = f_x$ ,  $z = F_x$ , verschieden sein wird. Nimmt man von vorstehender Gleichung wieder die Ableitung bloß nach  $\alpha$ , so erhält man die Gleichung für irgend eine Tangente der Curve, nämlich

$$x + y \varphi' \alpha + \psi' \alpha = 0,$$

und durch Elimination von  $\alpha$  die der Fläche, wie oben.

Umgekehrt kann man auch, wenn die Gleichungen einer abwickelbaren Fläche

$$z - \alpha x - \varphi \alpha \cdot y = \psi \alpha \text{ und } x + y \varphi' \alpha + \psi' \alpha = 0$$

gegeben sind, die Gleichungen der Curve finden, durch deren Tangenten sie erzeugt wird. Denn die beiden vorstehenden Gleichungen drücken, für irgend einen Werth von  $\alpha$ , eine dieser Tangenten aus, und man erhält mithin die Coordinaten eines Punktes der verlangten Curve, wenn man den Durchschnitt zweier auf einander folgenden Tangenten sucht, d. h. von den beiden vorstehenden wieder die Ableitung nach  $\alpha$  nimmt. Nun ist aber die zweite schon die Ableitung der ersten, nach  $\alpha$ ; also kommt nur noch die Ableitung der zweiten hinzu, nämlich:

$$y \varphi'' \alpha + \psi'' \alpha = 0.$$

Wird aus diesen drei Gleichungen  $\alpha$  eliminiert, so erhält man zwei Gleichungen zwischen  $x, y, z$ , welche die Curve liefern, deren Tangenten die abwickelbare Fläche erzeugen.

Um noch eine andere Entstehungsweise der abwickelbaren Flächen anzugeben, denke man sich auf einer beliebigen Fläche eine Curve beschrie-

ben. Die Berührungsebene der Fläche, an einen Punkt dieser Curve gelegt, hat die Gleichung

$$w - z = p(u - x) + q(v - y).$$

In dieser Gleichung sind, vermöge der Gleichungen der Curve,  $y, z, p, q$  sämtlich Functionen von  $x$ ; sie ist also von der Form  $w - \alpha u - \varphi \alpha \cdot v = \psi \alpha$ , wo  $\alpha, \varphi \alpha, \psi \alpha$  Functionen von  $x$  sind. Denkt man sich nun in sämtlichen Punkten der Curve die Berührungsebenen an die Fläche gelegt, so bilden die Durchschnitte derselben eine abwickelbare Fläche, deren Gleichung man erhält, wenn man von der vorstehenden die Ableitung nach  $x$ , oder nach  $\alpha$ , nimmt, d. i.  $u + v \varphi' \alpha + \psi' \alpha = 0$  setzt, und hierauf  $\alpha$  eliminirt.

82. Eine cylindrische Fläche entsteht, wenn eine gerade Linie, einer gegebenen Geraden beständig parallel bleibend, an einer Curve fortbewegt wird. — Die Gleichungen der Geraden seien  $y - ax = \alpha, z - bx = \beta$ ; so sind  $a$  und  $b$  gegebene beständige,  $\alpha$  und  $\beta$  veränderliche Größen. Nun seien  $x', y', z'$  die Coordinaten eines Punktes, in welchem die Curve von der Geraden getroffen wird, so muß, indem  $y'$  und  $z'$  Functionen von  $x'$  sind, zugleich auch

$$y' - ax' = \alpha, z' - bx' = \beta$$

sein; mithin sind  $\alpha$  und  $\beta$  ebenfalls Functionen von  $x'$  und also  $\beta$  eine Function von  $\alpha, \beta = \varphi \alpha$ . Folglich muß auch  $z - bx = \beta$  eine Function von  $y - ax = \alpha$  sein, also ist

$$z - bx = \varphi(y - ax)$$

die Gleichung einer beliebigen Cylinderfläche. — Nimmt man von derselben die Ableitungen nach  $x$  und  $y$ , so kann man die Function  $\varphi$  eliminiren; nämlich weil

$$p - b = -\varphi'(y - ax) \cdot a, q = \varphi'(y - ax);$$

so folgt:  $p - b + aq = 0$ , oder  $p + aq = b$ .

Dies ist eine partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung, welcher jede Gleichung genügen muß, die eine Cylinderfläche dar-

stellt. — Diese Gleichung genügt auch der Bedingung  $rt - s^2 = 0$ , d. h. alle Cylindrerflächen sind abwickelbar. (Man erinnere sich, daß  $\frac{dp}{dx} = r$ ,  $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = s$ ,  $\frac{dq}{dy} = t$  ist.) Nimmt man nämlich von der Gleichung  $p + aq = b$  die Ableitungen nach  $x$  und  $y$ , so kommt:

$$r + as = 0, s + at = 0, \text{ also } rt = s^2, \text{ w. j. b. w.}$$

Die geometrische Bedeutung der Gleichung  $p + aq = b$  ist keine andere, als daß jede Berührungsebene der Cylindrerfläche einer geraden Linie parallel ist, von welcher  $y = ax$ ,  $z = bx$  die Gleichungen sind.

83. Wenn eine Gerade, indem sie an eine Curve sich lehrend vorrückt, zugleich immer durch einen festen Punct geht, so beschreibt sie eine Regelfläche.

Es seien  $a, b, c$  die Coordinaten des festen Punctes, und die Gleichungen der Geraden:

$$y - b = \alpha(x - a), z - c = \beta(x - a).$$

Setzt man für  $x, y, z$  Werthe, die zugleich der Curve angehören, so ergeben sich  $\alpha$  und  $\beta$  als Functionen von  $x$ , weil  $y$  und  $z$  es sind; also ist  $\beta = \varphi\alpha$ , mithin

$$\frac{z - c}{x - a} = \varphi \left( \frac{y - b}{x - a} \right)$$

die Gleichung aller Regelflächen. — Nimmt man die Ableitungen nach  $x$ , so kommt:

$$\frac{(x - a)p - (z - c)}{(x - a)^2} = -\varphi' \left( \frac{y - b}{x - a} \right) \cdot \frac{y - b}{(x - a)^2}$$

oder  $(x - a)p = z - c - (y - b)\varphi' \left( \frac{y - b}{x - a} \right),$

und, wenn man die Ableitung nach  $y$  nimmt,  $q = \varphi' \left( \frac{y - b}{x - a} \right);$

mithin ist  $p(x - a) + q(y - b) = z - c$

die partielle Differentialgleichung aller Regelflächen. Sie bedeu-

tet, daß sämtliche Berührungsebenen der Fläche durch den Punkt  $(a, b, c)$  gehen.

Alle Regelflächen sind abwickelbar. Denn nimmt man von vorstehender Gleichung die Ableitungen nach  $x$  und  $y$ , so kommt:

$$s(y-b) + r(x-a) = 0,$$

$$s(x-a) + t(y-b) = 0;$$

mithin  $s^2 = rt$ , w. g. b. w.

Anmerkung. In den vorstehenden Beispielen der Cylinder- und Regel-Flächen wurde eine ganz willkürliche Function von  $x$  und  $y$ , welche sich in der ursprünglichen Gleichung befand, nach Entwicklung der Ausdrücke für die partiellen Ableitungen von  $z$ , nach  $x$  und  $y$ , eliminirt, und man kam dadurch auf Gleichungen zwischen den partiellen ersten Ableitungen  $p$  und  $q$  von  $z$ , welche man partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung nennt. Dagegen enthält die Gleichung der abwickelbaren Flächen nicht eine, sondern zwei willkürliche Functionen, und um diese zu eliminiren, mußte man bis auf die partiellen Ableitungen der zweiten Ordnung von  $z$ , nach  $x$  und  $y$ , zurückgehen, wodurch die Elimination der willkürlichen Functionen, in diesem besonderen Falle, gelang, und man eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, ohne willkürliche Functionen, erhielt. Obige Beispiele geben eine Vorstellung von der vielumfassenden geometrischen Bedeutung, deren die partiellen Differentialgleichungen fähig sind.

---

# **Integral - Rechnung.**

---



## Integral-Rechnung.

84. **Lehrsatz.** Zwei Functionen  $f_x$  und  $\varphi_x$ , welche dieselbe Ableitung  $f'_x$  haben, können nur um eine beständige Größe von einander verschieden sein.

Denn man setze  $f_x - \varphi_x = F_x$ , und nehme die Ableitung, so ist  $f'_x - \varphi'_x = F'_x = 0$ , für jeden Werth von  $x$ , weil  $f'_x = \varphi'_x$ ; mithin ist auch  $F(x + \Theta k) = F_x + k F'(x + \Theta k) = F_x$ , weil  $F'(x + \Theta k)$  Null ist; d. h. die Function  $F_x$  ändert ihren Werth nicht, wenn  $x$  den seinigen ändert, oder  $F_x$  ist eine von  $x$  unabhängige, mithin beständige Größe; w. z. b. w.

Folglich ist, wenn  $C$  eine beliebige Constante bedeutet, allemal

$$f_x = \varphi_x + C,$$

sobald, für jeden Werth von  $x$ ,  $f'_x = \varphi'_x$  ist.

Eine Function  $\psi_x$ , deren Ableitung die gegebene Function  $f_x$ , oder deren Differential  $f_x dx$  ist, heißt das Integral dieses Differentials (oder auch die Stammgröße dieser Ableitung), und wird durch Vorsetzung des Buchstabens  $\int$  bezeichnet, so daß, wenn

$$d\psi_x = f_x \cdot dx,$$

$$\psi_x = \int f_x dx$$

ist. Die Operation des Integrirens, welche durch  $\int$  angedeutet wird, ist also die umgekehrte des Differentiirens, indem sie durch diese aufgehoben wird. Der Ursprung des Zeichens  $\int$ , welches eine Summe andeuten soll, wird nachher angegeben werden. — Wenn irgend eine Function  $\psi_x$  gefunden ist, welche die Ableitung  $f_x$  hat, so stellt  $\psi_x + C$  ( $C$  eine beliebige Constante) die Form vor, in welcher jede Function enthalten ist, die  $f_x$  zur Ab-



leitung hat. Diese Form heißt das allgemeine oder auch das vollständige Integral von  $fx$ ; aus ihm kann man so viele besondere Integrale erhalten, als man will, indem man der Constante beliebige Werthe beilegt.

Ein constanter Factor  $a$  der Ableitung hat auf die Operation des Integrirens keinen Einfluß, und kann mithin außerhalb des Integral-Zeichens gesetzt werden, d. h. man hat

$$\int a f x dx = a \int f x dx.$$

Ferner ist  $\int (fx + \phi x) dx = \int f x dx + \int \phi x dx$ , wie leicht einzusehen. In diesen Ausdrücken muß man sich die willkürliche Constante als in der Bezeichnung des Integrals enthalten denken, wie auch zuweilen im Folgenden.

Kennt man das Differential einer Function, so hat man in der letzteren auch sofort das Integral jenes Differentials; z. B. da  $d \cdot x^n = nx^{n-1} dx$  ist, so folgt

$$\int nx^{n-1} dx = x^n + C; \text{ oder auch } \int x^{n-1} dx = \frac{1}{n} x^n + C.$$

Eben so ist

$$\int \frac{dx}{x} = \log nat x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log nata} + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x^2} = \operatorname{tg} x + C. \quad \text{u. s. w.}$$

Durch Differentiation überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der vorstehenden Formeln.

85. Wenn allgemein  $\int f x dx = \psi x + C$  gesetzt ist, so kann man die Constante  $C$  einer beliebigen Bedingung unterwerfen, die sich in der Regel aus der Beschaffenheit der Aufgabe von selbst ergibt.

Vorausgesetzt, daß die Function  $\psi x$  von  $x = a$  bis zu irgend einem Werthe von  $x$  endlich und stetig bleibt, so kann man verlangen, daß das Integral für  $x = a$  verschwinde, oder von

$x=a$  anfangen. Damit dies der Fall sei, muß die Constante  $C$  aus der Bedingung

$$C + \psi a = 0$$

bestimmt werden, welche  $C = -\psi a$  giebt. Um auszudrücken, daß ein Integral von  $x=a$  anfangen soll, fügt man dem Zeichen  $\int$  den Buchstaben  $a$  unten bei; und wenn man noch den Werth angeben will, welchen  $x$  nach vollendeter Integration erhalten soll, so schreibt man auch diesen noch oben hinzu, und zwar in folgender Weise:

$$\int_a^{x_1} f x \, dx = \psi x_1 - \psi a;$$

d. h. das Integral  $\int f x \, dx$ , so genommen, daß es für  $x=a$  verschwinde, und bis zu dem Werthe  $x_1$  ausgedehnt, oder das Integral  $\int f x \, dx$ , genommen zwischen den Grenzen  $x=a$  und  $x=x_1$ , wird durch  $\int_a^{x_1} f x \, dx$  bezeichnet, und ist gleich  $\psi x_1 - \psi a$ .

Dieses Integral erhält einen bestimmten Werth, sobald die Grenzen  $a$ , und  $x_1$  bestimmte Werthe erhalten, und wird dann ein bestimmtes Integral, oder ein Integralwerth genannt. Man hat z. B.

$$\int x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3 + C;$$

also ist  $\int_0^x x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3$ , und  $\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$ ; u. dgl. m.

Es seien  $x_0, x_1, x_2$  drei Werthe von  $x$ , zwischen denen  $\psi x$  beständig endlich und stetig bleibt, und nach dem Vorigen:

$$\int_{x_0}^{x_1} f x \, dx = \psi x_1 - \psi x_0, \quad \int_{x_1}^{x_2} f x \, dx = \psi x_2 - \psi x_1,$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f x \, dx = \psi x_2 - \psi x_0;$$

so folgt  $\int_{x_0}^{x_2} f x \, dx = \int_{x_0}^{x_1} f x \, dx + \int_{x_1}^{x_2} f x \, dx.$

Wenn man also das Intervall der Grenzen, zwischen welchen ein Integral genommen werden soll, in beliebige Theile theilt, so kann man das ganze Integral als die Summe der diesen Theilen entsprechenden Integralwerthe ansehen.

Es war:  $\int_{x_0}^{x_1} f x \, dx = \psi x_1 - \psi x_0.$

Der Quotient  $\frac{\psi x_1 - \psi x_0}{x_1 - x_0}$  wird bekanntlich, wenn, wie vorausgesetzt ist,  $\psi x$  immer endlich und stetig bleibt, desto genauer gleich der Ableitung von  $\psi x$ , für  $x = x_0$ , je kleiner  $x_1 - x_0$  ist. Wenn folglich  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  beliebige auf einander folgende Werthe von  $x$  sind, so ist

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f x \, dx &= \int_{x_0}^{x_1} f x \, dx + \int_{x_1}^{x_2} f x \, dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f x \, dx = \\ &= (x_1 - x_0) \cdot \frac{\psi x_1 - \psi x_0}{x_1 - x_0} + \dots + (x_n - x_{n-1}) \cdot \frac{\psi x_n - \psi x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, \end{aligned}$$

und diese Summe nähert sich der folgenden:

$$(x_1 - x_0) f x_0 + (x_2 - x_1) f x_1 + \dots + (x_n - x_{n-1}) f x_{n-1}$$

desto mehr, je kleiner die Differenzen  $x_1 - x_0, x_2 - x_1$ , u. s. f. genommen werden, weil mit der Abnahme z. B. von  $x_1 - x_0$  der Quotient  $\frac{\psi x_1 - \psi x_0}{x_1 - x_0}$  sich der Ableitung von  $\psi x$ , für  $x = x_0$ , d. h. dem Werthe  $f x_0$  nähert.

86. Umgekehrt läßt sich beweisen, daß, wenn  $f x$  endlich und stetig bleibt, die Summe

$$\int_0^n = (x_1 - x_0) f x_0 + (x_2 - x_1) f x_1 + \dots + (x_n - x_{n-1}) f x_{n-1}$$

sich einer bestimmten endlichen Grenze nähert, wenn die Intervalle  $x_1 - x_0, x_2 - x_1$ , u. s. f., welche zwischen den äußersten Werthen  $x_0$  und  $x_n$  liegen, immer kleiner werden. — Es wird angenommen, daß die Werthe  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  der Größe nach auf einander folgen, also die Differenzen  $x_1 - x_0, x_2 - x_1$ , u. s. f. sämmtlich gleiche Zeichen haben, die man sich, der Einfachheit wegen, positiv denken kann.

Unter einem Mittelwerthe von  $f x$  soll ein Werth verstanden werden, welcher zwischen dem größten und dem kleinsten der Werthe liegt, die  $f x$  in einem gegebenen Intervalle, z. B. von

$x_0$  bis  $x_n$  erhält. Ein solcher läßt sich immer durch  $f(x_0 + \Theta(x_n - x_0))$  bezeichnen, wenn  $\Theta$  eine Zahl ist, die nicht außerhalb der Grenzen 0 und 1 liegt. — Der aufgestellte Satz läßt sich nun folgendermaßen beweisen:

Die Summe  $\int_0^n$  liegt offenbar zwischen den beiden Producten, die man erhält, wenn man die Summe aller Differenzen  $x_1 - x_0, x_2 - x_1$ , u. s. f., d. i.  $x_n - x_0$  mit dem größten, und wenn man sie mit dem kleinsten unter allen Werthen von  $fx_0, fx_1, \dots, fx_{n-1}$  multiplicirt. Folglich ist  $\int_0^n$  gleich einem Producte aus einem Mittelwerthe von  $fx$  in  $x_n - x_0$ , d. i.

$$\int_0^n = (x_n - x_0) f(x_0 + \Theta(x_n - x_0)).$$

Nun theile man jedes der Intervalle von  $x_0$  bis  $x_1$ ,  $x_1$  bis  $x_2$ , u. s. f. wieder in kleinere Intervalle, und bilde die Summen  $\int_0^1, \int_1^2$ , u. s. f., nach demselben Gesetze, nach welchem  $\int_0^n$  gebildet war; so erhält man wieder:

$$\int_0^1 = (x_1 - x_0) f(x_0 + \Theta_1(x_1 - x_0))$$

$$\int_1^2 = (x_2 - x_1) f(x_1 + \Theta_2(x_2 - x_1)); \text{ u. s. f.}$$

Man setze ferner

$$f(x_0 + \Theta_1(x_1 - x_0)) = fx_0 + \varepsilon_0, \quad f(x_1 + \Theta_2(x_2 - x_1)) = fx_1 + \varepsilon_1, \\ \text{u. s. f.}; \text{ so erhält man:}$$

$$\int_0^1 + \int_1^2 + \dots + \int_{n-1}^n = \int_0^n + \varepsilon_0(x_1 - x_0) + \varepsilon_1(x_2 - x_1) + \dots \\ + \varepsilon_{n-1}(x_n - x_{n-1}).$$

Die Summe der mit  $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ , u. s. f. multiplicirten Glieder ist wieder gleich dem Producte aus der Summe der Intervalle, d. i. aus  $x_n - x_0$  in einen Mittelwerth  $\varepsilon$  von  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ ; mit-

hin ist 
$$\int_0^1 + \int_1^2 + \dots + \int_{n-1}^n = \int_0^n + \varepsilon(x_n - x_0).$$

Je kleiner nun sämtliche Intervalle  $x_1 - x_0, x_2 - x_1$  u. s. f. genommen werden, desto mehr nähern sich  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots$  der Null, also desto genauer wird auch  $\varepsilon = 0$ , und

$$\int_0^1 + \int_1^2 + \dots + \int_{n-1}^n = \int_0^n.$$

Hiermit ist bewiesen, daß, wenn jedes der Intervalle  $x_1 - x_0$ ,  $x_2 - x_1, \dots$  wieder in beliebige kleinere getheilt, und die Summe der Producte aus den Intervallen in die entsprechenden Werthe von  $fx$  genommen wird, diese Product-Summe der vorigen  $\int_0^n$  desto näher kommt, je kleiner die Intervalle  $x_1 - x_0$ ,  $x_2 - x_1, \dots$  waren. Nun denke man sich eine beliebige andere Eintheilung des Intervalles  $x_n - x_0$ , und bilde die ihr zukommende Product-Summe, welche mit  $\Sigma_0^n$  bezeichnet werden mag, so kann man eine dritte Eintheilung annehmen, welche sowohl von der ersten, als von der zweiten Eintheilung eine Untereintheilung ist; die Product-Summen  $\int_0^n$ ,  $\Sigma_0^n$  nähern sich alsdann beide der zu dieser dritten Eintheilung gehörigen Product-Summe; also nähern sie sich einander; w. z. b. w.

87. Das Integral  $\int_{x_0}^{x_n} fx \, dx$  ist also gleich dem Werthe, welchem sich die Summe  $\int_0^n$  nähert, indem die Differenzen  $x_1 - x_0$ ,  $x_2 - x_1, \dots$  sich der Null nähern. So lange  $fx$  endlich und stetig bleibt, und wenn das Intervall  $x_n - x_0$  endlich ist, ist dieser Werth ebenfalls ein bestimmter und endlicher, und zwar gleich dem Producte aus einem Mittelwerthe von  $fx$  in das Intervall  $x_n - x_0$ ; daher ist auch das Integral

$$\int_{x_0}^{x_n} fx \, dx = (x_n - x_0) f(x_0 + \Theta(x_n - x_0)).$$

Wenn die Function  $fx$  innerhalb der Grenzen  $x_0$  und  $x_n$  nicht überall endlich und stetig ist, oder auch wenn das Intervall  $x_n - x_0$  unendlich groß ist; so wird der Werth des Integrals  $\int_{x_0}^{x_n} fx \, dx$  in manchen Fällen unendlich groß, in andern gänzlich unbestimmt, in noch anderen endlich und bestimmt. Kennt man einen allgemeinen Ausdruck  $\psi x$  des Integrals  $\int fx \, dx$ , so erhält

man den Integralwerth  $\int_{x_0}^{x_1} f x dx$ , so lange  $\psi x$  endlich und stetig bleibt, allemal durch die Formel:

$$\int_{x_0}^{x_1} f x dx = \psi x_1 - \psi x_0.$$

Sobald hingegen für einen Werth  $a$  von  $x$ , zwischen  $x_0$  und  $x_1$ , die Function  $\psi x$  nicht zugleich endlich und stetig ist, so würde man häufig fehlerhafte Resultate aus der Anwendung der vorstehenden Formel erhalten. Es werde z. B. das Integral  $\int \frac{dx}{x}$  von  $x_0 = -m$  bis  $x_1 = n$  verlangt, wo  $m$  und  $n$  positiv sind.

Man hat allgemein  $\int \frac{dx}{x} = \log x$ ; also  $\psi x = \log x$ ,  $\psi(n) = \log(n)$ ,  $\psi(-m) = \log(-m)$ ; woraus

$$\int_{-m}^n \frac{dx}{x} = \log\left(\frac{n}{-m}\right)$$

folgen würde; ein imaginärer Werth, der offenbar falsch ist. — In solchen Fällen muß man bei der Bestimmung der Constanten denjenigen Werth  $a$  von  $x$  beachten, bei welchem die Unterbrechung der Stetigkeit der Function  $\psi x$  Statt findet. Zu dem Ende suche man die Werthe der Integrale  $\int f x dx$  von  $x = x_0$  bis  $x = a - u$ , und von  $x = a + v$  bis  $x = x_1$ ;  $u$  und  $v$  bedeuten zwei beliebig kleine positive Größen, und es ist angenommen, daß  $x_1 > x_0$  ist. Der Werth des Integrals  $\int_{x_0}^{x_1} f x dx$  ist alsdann derjenige, welchen die Summe

$$\int_{x_0}^{a-u} f x dx + \int_{a+v}^{x_1} f x dx = \psi x_1 - \psi(a+v) + \psi(a-u) - \psi(x_0)$$

für  $u=0$ ,  $v=0$  erhält.

Um z. B. über den Werth von  $\int_{-m}^n \frac{dx}{x}$  zu entscheiden, welches Integral oben angeführt wurde, suche man, da für  $x=a=0$ ,  $\log x = -\infty$  wird, die Summe

$$\int_{-m}^{-u} \frac{dx}{x} + \int_v^n \frac{dx}{x},$$

welche gleich

$$\log(-u) - \log(-m) + \log(n) - \log(v) =$$

$$\log\left(\frac{u}{m}\right) + \log\left(\frac{n}{v}\right) = \log\left(\frac{n}{m}\right) + \log\left(\frac{u}{v}\right)$$

ist. Da für  $u=0$ ,  $v=0$ , dieser Werth unbestimmt ist, so ist auch der des vorgelegten Integrales unbestimmt.

Man hat  $\int \frac{dx}{x^2} = \text{Const.} - \frac{1}{x};$

also ist  $\int_v^n \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{v} - \frac{1}{n}, \quad \int_{-m}^{-u} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{u} - \frac{1}{m};$

folglich  $\int_{-m}^n \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} - \frac{1}{n} - \frac{1}{m}$  für  $u=0$ ,  $v=0$ ; mithin ist dieses Integral unendlich groß ( $u$ ,  $v$ ,  $n$ ,  $m$  sind als positiv zu denken, wie vorhin).

Ein lehrreiches Beispiel ist noch folgendes: Man hat

$$d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{dx}{1+x^2}; \quad \text{folglich}$$

$$\int_a^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} a,$$

ein Werth, der für jedes beliebige  $x$  und  $a$  gilt, weil die Function  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$  (die übrigens immer zwischen  $+\frac{1}{2}\pi$  und  $-\frac{1}{2}\pi$  zu nehmen ist, §. 21.) von  $x=-\infty$  bis  $x=+\infty$  stetig bleibt.

Differentiirt man aber den Ausdruck  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x-a}{1+ax}$ , so erhält

man das Differential  $\frac{dx}{1+x^2}$ , indem  $a$  herausfällt, wie man

durch die Rechnung finden wird. Da nun  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x-a}{1+ax}$  für  $x=a$  Null wird, so könnte man allgemein setzen:

$$\int_a^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x-a}{1+ax}.$$

Dieser Werth ist aber nur so lange richtig, und mit dem obigen  $\arctg x - \arctg a$  übereinstimmend, als die Function  $\arctg \frac{x-a}{1+ax}$  stetig bleibt. Betrachtet man den Gang dieser Function näher, so wird man finden, daß, indem  $x$  von  $-\infty$  bis  $-\frac{1}{a}$  wächst, die Function von  $\arctg \frac{1}{a}$  bis  $+\frac{1}{2}\pi$  wächst; daß dieselbe aber, für  $x = -\frac{1}{a}$ , von dem Werthe  $+\frac{1}{2}\pi$  zu dem Werthe  $-\frac{1}{2}\pi$  plötzlich übergeht, und hierauf, indem  $x$  von  $-\frac{1}{a}$  bis  $+\infty$  wächst, von  $-\frac{1}{2}\pi$  bis  $\arctg \frac{1}{a}$  wächst. Nämlich man setze  $x = -\frac{1}{a} - u$  ( $u$  positiv gedacht), so wird

$$\arctg \frac{x-a}{1+ax} = \arctg \frac{1 + \frac{1}{a^2} - \frac{u}{a}}{u} = +\frac{1}{2}\pi \quad \text{für} \quad u=0;$$

ist aber  $x = -\frac{1}{a} + v$ ,  $v$  wieder positiv gedacht, so wird:

$$\arctg \frac{x-a}{1+ax} = \arctg \frac{-\left(1 + \frac{1}{a^2}\right) + \frac{v}{a}}{v} = -\frac{1}{2}\pi, \quad \text{für} \quad v=0;$$

da bekanntlich  $\arctg(+\infty) = +\frac{1}{2}\pi$ ,  $\arctg(-\infty) = -\frac{1}{2}\pi$  ist.

Wenn nun der Nenner  $1+ax$  zwischen den Grenzen der Integration nicht Null wird, so ist das obige Integral richtig. Für die erste Grenze ( $a$ ) des Integrals ist aber  $1+ax = 1+a^2$  positiv; also ist das obige Integral richtig, wenn  $1+ax$  für den Werth von  $x$  an der zweiten Grenze des Integrals, positiv ist.

Wenn aber der Bruch  $\frac{x-a}{1+ax}$  zwischen den Grenzen der Integration sein Zeichen wechselt, indem er durch das Unendliche geht, was geschieht, wenn der Nenner  $1+ax$  durch Null aus dem Positiven in das Negative übergeht, so bleibt die obige Formel nicht mehr den richtigen Werth des Integrals.



Indessen ist derselbe immer in der Formel  $\arctg \frac{x-a}{1-ax} + \text{Const.}$  enthalten, wenn man die Constante gehörig bestimmt. Man findet, wenn  $-\frac{1}{a}$  zwischen  $a$  und  $x$  liegt,

$$\int_a^x \frac{dx}{1+x^2} = \arctg \frac{x-a}{1+ax} \pm \pi.$$

Das obere Zeichen gilt, wenn  $a$  negativ, das untere, wenn  $a$  positiv ist.

Diese Werthe ergeben sich, wenn man das Integral theilt, und von  $x=a$  bis  $x=-\frac{1}{a}$ , hierauf von  $x=-\frac{1}{a}$  bis  $x=x$  berechnet; da aber die andere Form  $\arctg x - \arctg a$  immer den richtigen Werth giebt, so ist es nicht nöthig, bei diesem Beispiele länger zu verweilen. Bei der Bestimmung der Constanten der Integration, oder der Werthe von Integrale zwischen gegebenen Grenzen, sind die Bemerkungen dieses §. zu beachten.

Integration rationaler Functionen, und einiger anderer, die sich auf solche zurückführen lassen.

88. Jede rationale Function von  $x$  läßt sich, vermittelst der algebraischen Division, in zwei Theile zerlegen, von denen der eine ein ganzes Polynom, der andere ein algebraischer Bruch ist, d. h. ein Quotient aus zwei Polynomen, dessen Nenner von höherem Grade ist, als der Zähler. Die Integration des ganzen Polynoms geschieht sofort nach der Formel

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad \text{z. B.}$$

$$\int (ax^2 + bx + c) dx = \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx + \text{Const.}$$

Dagegen bedarf es zur Integration des gebrochenen Theiles einer Vorbereitung. Nämlich es sei  $\frac{fx}{\varphi x}$  ein algebraischer Bruch

Bruch, dessen Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Factor haben; so muß vorausgesetzt werden, daß der Nenner  $\varphi x$  in reelle Factoren des ersten und zweiten Grades zerlegt sei; welche Zerlegung, wie die Algebra zu beweisen hat, immer möglich ist.

Alsdann kann man den Bruch  $\frac{fx}{\varphi x}$  in eine Summe einfacher Brüche zerlegen, wie folgt:

Es sei erstens  $\varphi x = (x-a)\psi x$ ;  $\psi x$  ein Polynom, welches durch  $x-a$  nicht mehr theilbar ist; so ist der vorgelegte Bruch  $\frac{fx}{\varphi x} = \frac{fx}{(x-a)\psi x}$ . Man setze  $\frac{fx-fa}{x-a} = U$ ,  $\frac{\psi x-\psi a}{x-a} = V$ , so sind  $U$  und  $V$  ganze Polynome, und man hat:

$$fx = U(x-a) + fa, \quad \psi x = V(x-a) + \psi a;$$

mithin, wenn  $A$  eine noch unbestimmte Zahl anzeigt,

$$fx - A\psi x = (U - AV)(x-a) + fa - A\psi a.$$

Nun bestimme man  $A$  so, daß  $fa - A\psi a = 0$  sei; so wird  $fx - A\psi x$  durch  $x-a$  theilbar, oder

$$fx = A\psi x + (U - AV)(x-a)$$

sein, mithin, wenn man durch  $\varphi x = (x-a)\psi x$  dividirt,

$$\frac{fx}{\varphi x} = \frac{A}{x-a} + \frac{U - AV}{\psi x}.$$

Da  $\varphi x = (x-a)\psi x$ , so ist  $\varphi'x = (x-a)\psi'x + \psi x$ , mithin  $\psi a = \varphi'a$ ; folglich  $A = \frac{fa}{\psi a} = \frac{fa}{\varphi'a}$ ; und man kann demnach setzen:

$$\frac{fx}{\varphi x} = \frac{fa}{\varphi'a \cdot (x-a)} + \frac{Q}{\psi x} \quad 1.$$

wo  $Q$  ein algebraisches Polynom von niedrigerem Grade als  $\psi x$  ist.

Es sei  $\varphi x = (x-a)^n \psi x$ ,  $\psi x$  nicht mehr durch  $x-a$  theilbar, und  $n$  gleich 2 oder größer als 2. Man setze  $x-a=y$ , so wird  $\varphi x = \varphi(a+y)$ ,  $\psi x = \psi(a+y)$ ,  $\varphi(a+y) = y^n \psi(a+y)$ .

Entwickelt man den Ausdruck  $\frac{f(a+y)}{\psi(a+y)}$  durch algebraische Division nach steigenden Potenzen von  $y$ , und bezeichnet die  $n$  ersten Glieder des Quotienten mit  $U$ , so erhält man

$$\frac{f(a+y)}{\psi(a+y)} = U + \frac{Qy^n}{\psi(a+y)}.$$

Der Rest muß durch  $y^n$  theilbar sein; deshalb ist er durch  $Qy^n$  bezeichnet. Man hat demnach

$$\frac{fx}{\varphi x} = \frac{f(a+y)}{\varphi(a+y)} = \frac{U}{y^n} + \frac{Q}{\psi(a+y)},$$

oder 
$$\frac{fx}{\varphi x} = \frac{U}{(x-a)^n} + \frac{Q}{\psi x}; \quad 2.$$

$U$  und  $Q$  sind ganze Polynome, und zwar ist  $U$  von  $n-1$ ten Grade. Wenn also der Nenner  $\psi x$  gleiche Factoren enthält, so läßt sich der Bruch  $\frac{fx}{\varphi x}$  nach vorstehender Formel, mit Hülfe einer bloßen algebraischen Division, zerlegen.

89. Es sei ferner  $P = (x-\alpha)^2 + \beta^2$  ein in reelle Factoren nicht mehr zerlegbarer Factor des zweiten Grades von  $\varphi x$ ; und  $\varphi x = P \cdot \psi x$ ,  $\psi x$  durch  $P$  nicht mehr theilbar. Man setze  $U = A + B(x-\alpha)$ , so kann man immer die beiden reellen Zahlen  $A$  und  $B$  so bestimmen, daß

$$fx - U\psi x$$

durch  $P$  theilbar werde.

Denn man dividire das Polynom  $fx - U\psi x$  durch  $P$ , es sei  $Q$  der Quotient, und  $m + n(x-\alpha)$  der Rest der Division, ( $m$  und  $n$  sind zwei reelle Zahlen, und unabhängig von  $x$ ); so ist

$$fx - U\psi x = QP + m + n(x-\alpha).$$

Man bestimme nun die Coefficienten  $A$  und  $B$  so, daß mit  $P=0$  zugleich  $fx - U\psi x = 0$  wird; d. h. da  $P = (x-\alpha)^2 + \beta^2 = 0$  gesetzt,  $x = \alpha + \beta i$  giebt, ( $i = \pm \sqrt{-1}$ ), so, daß

$$f(\alpha + \beta i) - (A + B\beta i)\psi(\alpha + \beta i) = 0$$

sei. Entwickelt man diesen Ausdruck, indem man den Quotienten

$$\frac{f(\alpha + \beta i)}{\psi(\alpha + \beta i)}$$

auf die Form  $M + Ni$  bringt, in welcher  $M$  und  $N$  reelle Zahlen sind, so erhält man

$$A + B\beta i = M + Ni;$$

mithin  $A = M, B = \frac{N}{\beta}.$  3.

Da nun für  $x = \alpha + \beta i$ ,  $fx - U\psi x = 0$ ,  $P = 0$ , so folgt, daß auch

$$m + n\beta i = 0$$

sein muß, und mithin  $m = 0$ ,  $n = 0$  ist. Also ist, wenn die Coefficienten  $A$  und  $B$  auf die angegebene Weise bestimmt sind,  $fx - U\psi x$  durch  $P$  theilbar, und man hat, indem  $Q$ , wie oben, den Quotienten der Division bedeutet,

$$fx - U\psi x = QP, \quad U = A + B(x - \alpha);$$

mithin, da  $P \cdot \psi x = \varphi x$ ,

$$\frac{fx}{\varphi x} = \frac{U}{P} + \frac{Q}{\psi x}. \quad 4.$$

90. Wenn der Nenner  $\varphi x$  einen unzerlegbaren Factor des zweiten Grades  $P = (x - \alpha)^2 + \beta^2$  auf einer höheren als der ersten Potenz enthält; so sei  $\varphi x = P^n \cdot \psi x$ ,  $\psi x$  durch  $P$  nicht theilbar. Alsdann kann man immer ein Polynom  $U$  vom  $2n - 1$ ten Grade finden, welches so beschaffen ist, daß

$$fx - U\psi x$$

durch  $P^n$  theilbar ist. Nämlich jedes Polynom vom  $2n - 1$ ten Grade läßt sich durch fortgesetzte Division mit dem Polynome des zweiten Grades  $P$  auf folgende Form bringen:

$$U = A + B(x - \alpha) + [A_1 + B_1(x - \alpha)]P + [A_2 + B_2(x - \alpha)]P^2 + \dots + [A_{n-1} + B_{n-1}(x - \alpha)]P^{n-1}.$$

Um nun die  $2n$  Coefficienten  $A, B, A_1, B_1$ , u. s. f. so zu bestimmen, daß  $fx - U\psi x$  durch  $P^n$  theilbar werde, berechne man

zuerst  $A$  und  $B$  nach 3. so, daß

$$fx - [A + B(x-a)]\psi x$$

durch  $P$  theilbar werde; der Quotient sei  $Fx$ , so ist

$$\frac{fx - U\psi x}{P} = Fx - [A_1 + B_1(x-a) + (A_2 + B_2(x-a))P + \dots]\psi x.$$

Bestimmt man sodann  $A_1$  und  $B_1$  wieder so, daß

$$Fx - [A_1 + B_1(x-a)]\psi x$$

durch  $P$  theilbar wird, so sei  $F_1x$  der Quotient dieser Division. Man erhält:

$$\frac{fx - U\psi x}{P^2} = F_1x - [A_2 + B_2(x-a) + [A_3 + B_3(x-a)]P + \dots]\psi x;$$

also ist  $fx - U\psi x$  durch  $P^2$  theilbar gemacht. Werden ferner  $A_2$  und  $B_2$  so bestimmt, daß

$$F_1x - [A_2 + B_2(x-a)]\psi x$$

durch  $P$  theilbar wird, so wird  $fx - U\psi x$  durch  $P^3$  theilbar. Auf diese Weise fortfahrend, bestimmt man alle Coefficienten von  $U$  so, daß  $fx - U\psi x$  durch  $P^n$  theilbar wird. Demnach erhält man  $fx - U\psi x = Q \cdot P^n$ , und weil  $\varphi x = P^n \cdot \psi x$ ,

$$\frac{fx}{\varphi x} = \frac{U}{P^n} + \frac{Q}{\psi x} \quad \text{oder}$$

$$\frac{fx}{\varphi x} = \frac{A + B(x-a)}{P^n} + \frac{A_1 + B_1(x-a)}{P^{n-1}} + \frac{A_2 + B_2(x-a)}{P^{n-2}} + \dots + \frac{A_{n-1} + B_{n-1}(x-a)}{P} + \frac{Q}{\psi x}. \quad 5.$$

Indem man die nämlichen Regeln auf den noch unzerlegten letzten Bruch  $\frac{Q}{\psi x}$  anwendet, muß man dahin gelangen, den

Bruch  $\frac{fx}{\varphi x}$  in eine Summe von Brüchen zu zerlegen, deren einzelne Glieder keine andere Form haben können, als

$$\frac{A}{(x-a)^n} \quad \text{oder} \quad \frac{A + B(x-a)}{[(x-a)^2 + \beta^2]^n}. \quad (n \text{ eine pos. ganze Zahl.})$$

Es sei insbesondere der Nenner

$$\varphi x = (x-a)(x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_n)$$

ein Product aus lauter ungleichen Factoren des ersten Grades, so folgt, daß der Bruch  $\frac{fx}{\varphi x}$  in eine Summe von folgender Form zerlegbar sein muß:

$$\frac{fx}{\varphi x} = \frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{x-a_1} + \cdots + \frac{A_\mu}{x-a_\mu} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n}.$$

Man vereinige sämtliche Brüche auf der rechten Seite, mit Ausnahme eines einzigen, in eine Summe, welche durch  $\frac{Q}{\psi x}$  bezeichnet werde, so daß sei:

$$\frac{fx}{\varphi x} = \frac{A_\mu}{x-a_\mu} + \frac{Q}{\psi x}$$

und  $\varphi x = (x-a_\mu)\psi x$ . Aus der vorstehenden Gleichung folgt

$$fx = A_\mu \psi x + Q(x-a_\mu),$$

welche Gleichung für jeden Werth von  $x$  identisch bestehen muß, weil die Zerlegung, wie bewiesen, möglich ist. Setzt man nun  $x = a_\mu$ , so folgt

$$fa = A_\mu \cdot \psi a_\mu,$$

oder, weil  $\psi a_\mu = \varphi' a_\mu$ ,  $A_\mu = \frac{fa_\mu}{\varphi' a_\mu}$ .

Demnach erhält man folgende Zerlegung des Bruches  $\frac{fx}{\varphi x}$ , in dem angenommenen Falle:

$$\frac{fx}{\varphi x} = \frac{fa}{\varphi' a(x-a)} + \frac{fa_1}{\varphi' a_1(x-a_1)} + \cdots + \frac{fa_n}{\varphi' a_n(x-a_n)}. \quad 6.$$

91. Beispiele. 1. Es sei

$$fx = 2x^2 - 7x + 3, \quad \varphi x = (x-2)(x-1)(x+3) = x^3 - 7x + 6, \quad \varphi' x = 3x^2 - 7.$$

Man berechne die Werthe von  $fx$  und  $\varphi' x$  für  $x=2$ ,  $x=1$ ,  $x=-3$ , und führe dieselben in die Formel 6. des §. 90. ein,

so erhält man:

$$\frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - 7x + 6} = \frac{-3}{5(x-2)} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{21}{10(x+3)}.$$

2.  $f_x = 2x^2 - 3x + 4$ .  $\varphi_x = x^3 - x^2 - 7x + 3$   
 $= (x-3)(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2}).$

$$\frac{f_x}{\varphi_x} = \frac{13}{14(x-3)} + \frac{15+19\sqrt{2}}{28(x+1+\sqrt{2})} + \frac{15-19\sqrt{2}}{28(x+1-\sqrt{2})}.$$

3.  $f_x = x^3 - 2x + 3$ .  $\varphi_x = (x-2)^2(x^2-1)$ . Man setze  $x-2=y$ ,  $\psi_x = x^2-1$ , so folgt:

$$f_x = f(2+y) = 3+2y+y^2, \quad \psi_x = \psi(2+y) = 3+4y+y^2;$$

woraus durch Division:

$$\frac{f(2+y)}{\psi(2+y)} = 1 - \frac{2}{3}y + \frac{5}{9}y^2 - \frac{(26+8y)y^2}{9\psi(2+y)}$$

folgt. (Vgl. §. 88. Formel 2.)

Also ist

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - 2x + 3}{(x-2)^2(x^2-1)} &= \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{10+8x}{9(x^2-1)} \\ &= \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}. \end{aligned}$$

4.  $f_x = 2x^2 - 3x + 4$ .  $\varphi_x = [(x+1)^2+2][(x-2)^2+3]$ . (§. 89.)

$$\frac{f_x}{\varphi_x} = \frac{A+B(x+1)}{(x+1)^2+2} + \frac{A'+B'(x-2)}{(x-2)^2+3},$$

Es muß demnach  $f_x - [A+B(x+1)]\psi_x = 0$  werden für

$$x = -1 + \sqrt{-2}, \quad \psi_x = (x-2)^2 + 3.$$

Man erhält

$$f(-1+\sqrt{-2}) = 5-7\sqrt{-2}, \quad \psi(-1+\sqrt{-2}) = 10-6\sqrt{-2}.$$

$$A+B\sqrt{-2} = \frac{5-7\sqrt{-2}}{10-6\sqrt{-2}} = \frac{67-20\sqrt{-2}}{86}; \quad A = \frac{67}{86}, \quad B = \frac{-20}{86}.$$

Auf ähnliche Weise, oder auch durch Division, findet man

$$A' = \frac{45}{86}, \quad B' = \frac{20}{86}; \quad \text{mithin}$$

$$\frac{2x^2 - 3x + 4}{(x^2 + 2x + 3)(x^2 - 4x + 7)} = \frac{67 - 20(x+1)}{86((x+1)^2 + 2)} + \frac{45 + 20(x-2)}{86((x-2)^2 + 3)}.$$

5.  $fx = x^2 + 1$ .  $\varphi x = (x^2 + 4x + 5)^2(x^2 + 2)$ . — Man setze:

$$x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 = P,$$

$$U = A + B(x+2) + (A_1 + B_1(x+2))P + (A_2 + B_2(x+2))P^2;$$

so sind die Coefficienten in U aus der Bedingung zu bestimmen,

$$\text{daß} \quad fx - U(x^2 + 2)$$

durch  $P^2$  theilbar sei. Demnach ist (§. 90.) zu setzen:

$$fx - [A + B(x+2)][x^2 + 2] = 0 \text{ für } x = -2 + i, \text{ woraus folgt:}$$

$$A + Bi = \frac{4 - 4i}{5 - 4i} = \frac{36 - 4i}{41}, \quad A = \frac{36}{41}, \quad B = -\frac{4}{41}.$$

Dividirt man

$$fx - \frac{[36 - 4(x+2)][x^2 + 2]}{41} = \frac{4x^2 + 13x^2 + 8x - 15}{41}$$

durch P, so kommt  $Fx = \frac{4x - 3}{41}$ . Man mache ferner

$$Fx - [A_1 + B_1(x+2)][x^2 + 2] = 0 \text{ für } x = -2 + i,$$

$$\text{so kommt } A_1 + B_1 i = \frac{-11 + 4i}{41(5 - 4i)} = \frac{-71 - 24i}{41 \cdot 41};$$

$$A_1 = \frac{-71}{41 \cdot 41}, \quad B_1 = \frac{-24}{41 \cdot 41}.$$

Hieraus findet man weiter  $F_1 x = \frac{24x + 23}{41 \cdot 41}$ , und, indem man

$$F_1 x - [A_2 + B_2(x+2)][x^2 + 2] = 0$$

$$\text{setzt für } x = -2 + i, \quad A_2 = \frac{-221}{41^2}, \quad B_2 = \frac{20}{41^2}.$$

Man findet endlich

$$F_1 x - [A_2 + B_2(x+2)][x^2 + 2] = \frac{P(261 - 20x)}{41 \cdot 41 \cdot 41},$$



woraus sich folgende Zerlegung ergibt:

$$\frac{x^2+1}{[x^2+4x+5]^2(x^2+2)} = \frac{36-4(x+2)}{41(x^2+4x+5)^2} - \frac{71+24(x+2)}{41 \cdot 41 \cdot (x^2+4x+5)^2} \\ - \frac{221-20(x+2)}{41 \cdot 41 \cdot 41 \cdot (x^2+4x+5)} + \frac{261-20x}{41 \cdot 41 \cdot 41 \cdot (x^2+2)}.$$

92. Nach Zerlegung des Bruches  $\frac{fx}{\varphi x}$  hat man nur noch Functionen von der Form:

$$\frac{A}{(x-a)^n} \quad \text{und} \quad \frac{A+B(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^n}$$

zu integrieren. Ist  $n=1$ , so erhält man

$$\int \frac{dx}{x-a} = \log \text{nat} (x-a);$$

ist aber  $n$  verschieden von 1, so ist

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}}.$$

Um das Integral des zweiten Ausdrucks zu finden, betrachte man jeden seiner Theile besonders, nämlich

$$\frac{A}{[(x-a)^2+b^2]^n} \quad \text{und} \quad \frac{B(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^n}.$$

Das Integral des letzten dieser beiden Ausdrücke findet man am leichtesten. Man setze  $x-a=y$ ,  $dx=dy$ , so wird

$$\int \frac{(x-a)dx}{[(x-a)^2+b^2]^n} = \int \frac{y dy}{(y^2+b^2)^n}.$$

Setzt man nun noch  $y^2+b^2=z$ , so wird  $y dy = \frac{1}{2} dz$ , und

$$\int \frac{y dy}{(y^2+b^2)^n} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^n} = -\frac{1}{2n-2} \cdot \frac{1}{z^{n-1}},$$

oder, wenn wieder für  $z$  sein Werth  $(x-a)^2+b^2$  gesetzt wird:

$$\int \frac{(x-a)dx}{[(x-a)^2+b^2]^n} = \text{Const.} - \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{1}{[(x-a)^2+b^2]^{n-1}}.$$

Es bleibt also noch das Integral  $\int \frac{dx}{[(x-a)^2 + b^2]^n}$  zu finden. Es sei zuerst  $n=1$ , so ist  $\int \frac{dx}{(x-a)^2 + b^2}$  das vorgelegte Integral. Setzt man  $x-a=by$ ,  $dx=b dy$ , so kommt

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2 + b^2} = \frac{1}{b} \int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{b} \operatorname{arc} \operatorname{tg} y + \operatorname{Const.} =$$

$$\frac{1}{b} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{x-a}{b} \right) + \operatorname{Const.}$$

Allgemein ist, wenn  $x-a=by$ ,

$$\int \frac{dx}{[(x-a)^2 + b^2]^n} = \frac{1}{b^{2n-1}} \int \frac{dy}{(1+y^2)^n}.$$

Das Integral  $\int \frac{dy}{(1+y^2)^n}$  läßt sich durch eine Methode, von welcher auch bei anderen Gelegenheiten häufig Gebrauch gemacht wird, auf ein anderes von derselben Form bringen, in welchem der Exponent  $n$  um eine Einheit niedriger ist. Diese Methode ist die der theilweisen Integration, und besteht in Folgendem: Es seien  $u$  und  $v$  zwei Functionen von  $x$ , so ist  $d(uv) = u dv + v du$ ; folglich ist, wenn man integrirt,  $u \cdot v = \int u dv + \int v du$ , oder

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du.$$

Durch diese Formel wird das Integral  $\int u dv$  auf ein anderes  $\int v du$  zurückgeführt. In dem gegenwärtigen Falle läßt sich davon folgende

Anwendung machen: Man setze  $v=y$ ,  $u=\frac{1}{(1+y^2)^n}$ , so ist  $dv=dy$ ,

und  $du = \frac{-2ny dy}{(1+y^2)^{n+1}}$ ; daher nach der obigen Formel:

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^n} = \frac{y}{(1+y^2)^n} + 2n \int \frac{y^2 dy}{(1+y^2)^{n+1}}.$$

Nun ist

$$\frac{y^2}{(1+y^2)^{n+1}} = \frac{1+y^2-1}{(1+y^2)^{n+1}} = \frac{1}{(1+y^2)^n} - \frac{1}{(1+y^2)^{n+1}};$$

mithin:

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^n} = \frac{y}{(1+y^2)^n} + 2n \int \frac{dy}{(1+y^2)^n} - 2n \int \frac{dy}{(1+y^2)^{n+1}};$$

$$\text{woraus } 2n \int \frac{dy}{(1+y^2)^{n+1}} = \frac{y}{(1+y^2)^n} + (2n-1) \int \frac{dy}{(1+y^2)^n}$$

folgt. Schreibt man  $n-1$  statt  $n$ , so kommt:

$$(2n-2) \int \frac{dy}{(1+y^2)^n} = \frac{y}{(1+y^2)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{dy}{(1+y^2)^{n-1}}.$$

Dies ist die verlangte Reduktionsformel. Setzt man darin  $n=2$ , so kommt

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{(1+y^2)^2} &= \frac{1}{2} \frac{y}{1+y^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dy}{1+y^2} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{y}{1+y^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} y + \operatorname{Const}. \end{aligned}$$

Für  $n=3$  findet man

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^3} = \frac{1}{4} \frac{y}{(1+y^2)^2} + \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \frac{y}{(1+y^2)} + \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} y + C.$$

u. s. w.

Mit Hülfe der gefundenen Integrale kann man, nach vollbrachter Zerlegung in einfache Brüche, jede rationale Function integrieren. Es werde noch bemerkt, daß, wenn man die imaginären Factoren des ersten Grades zu Hülfe nimmt, auch die In-

tegrale von der Form  $\int \frac{dx}{[(x-a)^2+b^2]^n}$  oder einfacher

$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$  sich als algebraische und logarithmische Functionen ergeben. Man hat nämlich, wenn  $n=1$ ,

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+xi} + \frac{1}{1-xi} \right);$$

$$\text{folglich } \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+xi} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1-xi},$$

oder, wenn man wie gewöhnlich integrirt:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{1}{2i} \log \left( \frac{1+xi}{1-xi} \right),$$

welcher Ausdruck von  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ , durch imaginäre Logarithmen, zu merken ist.

93. Integrale, deren Ableitungen nicht rational sind, lassen sich zuweilen durch Vertauschung der veränderlichen Größe mit einer anderen, auf Integrale rationaler Functionen zurückführen. Dahin gehört das Integral  $\int f(x,y) dx$ , wenn  $f(x,y)$  eine rationale Function von  $x$  und  $y$ ,  $y$  aber einen irrationalen Ausdruck von folgender Form bedeutet:

$$y = \left( \frac{a+bx}{m+nx} \right)^{\frac{1}{q}}$$

wo  $q$  eine ganze Zahl.

Setzt man nämlich  $\frac{a+bx}{m+nx} = y^q$ , so wird  $x = \frac{my^q - a}{b - ny^q}$ ,

folglich kann man  $x$  und  $\frac{dx}{dy}$  rational durch  $y$  ausdrücken; wodurch man

$$\int f(x,y) dx = \int \varphi y \cdot \frac{dx}{dy} dy$$

erhält, in welchem Ausdrucke  $\varphi y \cdot \frac{dx}{dy}$  eine rationale Function von  $y$  ist, die sich nach den Regeln der vorigen §. integrieren läßt.

Man kann diesen Satz noch etwas allgemeiner machen. Es sei  $\frac{a+bx}{m+nx} = u$ , und  $X = f(x, u^{\frac{1}{q}}, u^{\frac{1}{q'}}, u^{\frac{1}{q''}}, \dots)$  eine rationale Function von  $x$  und beliebigen Wurzeln von  $u$ ;  $q, q', q'', \dots$  ganze Zahlen; so suche man das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen  $q, q', u. s. f.$ ; dieses sei  $p$ ; alsdann setze man  $u^{\frac{1}{p}} = y$ , so sind  $u^{\frac{1}{q}}, u^{\frac{1}{q'}}$  u. s. f. sämtliche ganze Potenzen von  $y$ , und die vorgelegte Function geht in eine rationale Function

von  $x$  und  $y$  über; daher sich, nach dem Vorigen, das Integral  $\int Xdx$  auf ein anderes  $\int Ydy$  bringen läßt, in welchem  $Y$  eine rationale Function von  $y$  ist.

94. Integrale, deren Ableitungen rationale Functionen von  $x$  und von der Quadratwurzel aus einem ganzen Polynome des zweiten Grades sind, lassen sich ebenfalls immer rational machen. Man kann diesen Satz auf den des vorigen §. zurückführen. Nämlich es sei  $u = \sqrt{ax^2 + 2bx + c}$ ; so zerlege man das Polynom  $ax^2 + 2bx + c$  in zwei Factoren des ersten Grades  $\alpha x + \beta$  und  $\gamma x + \delta$ , so daß

$$u = \sqrt{(\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)} = (\alpha x + \beta) \sqrt{\frac{\gamma x + \delta}{\alpha x + \beta}}$$

wird. Vorausgesetzt, daß diese beiden Factoren reell sind, setze man  $y = \sqrt{\frac{\gamma x + \delta}{\alpha x + \beta}}$ , so geht die rationale Function von  $x$

und  $u$  offenbar in eine rationale Function  $f(x, y)$  von  $x$  und  $y$  über; und das Integral  $\int f(x, y) dx$  läßt sich, nach dem vorigen §., in ein anderes von der Form  $\int \varphi y dy$  verwandeln, in welchem  $\varphi y$  eine rationale Function von  $y$  ist, die sich nach den vorhergehenden Sätzen integrieren läßt. Diese Methode ist auch anwendbar, wenn die beiden Factoren von  $u^2$  imaginär sind; man kann indessen zu der verlangten Integration auf anderem Wege gelangen, ohne das Polynom  $u^2$  in Factoren zu zerlegen.

Die rationale Function  $f(x, u)$  von  $x$  und  $u = \sqrt{ax^2 + 2bx + c}$  läßt sich immer auf folgende Form bringen:

$$f(x, u) = M + Nu,$$

wo  $M$  und  $N$  rationale Functionen von  $x$  sind. Offenbar nämlich können weder im Zähler noch im Nenner höhere Potenzen von  $u$  vorkommen, als die erste, weil  $u^2$  wieder eine rationale

Functionen von  $x$  ist. Nun sei  $f(x, y) = \frac{P + Qu}{R + Tu}$ ,  $P, Q, R, T$  rationale Functionen von  $x$ ; so braucht man nur im Zäh-

ler und Nenner mit  $R - Tu$  zu multiplizieren, um im Nenner eine rationale Function von  $x$  zu erhalten, nämlich  $R^2 - T^2 u^2$ . Schafft man noch im Zähler das Quadrat von  $u$  weg, so ergibt sich die Form  $f(x, u) = M + Nu$ , w. z. b. w.

Die Aufgabe kommt also immer auf die Integration von einer Function der Form  $fx \cdot u$  zurück, in welcher  $fx$  eine rationale Function von  $x$  bedeutet. Statt dieses Ausdruckes kann man auch  $\frac{fx \cdot u^2}{u} = \frac{\varphi x}{u}$  schreiben, weil  $\varphi x = fx \cdot u^2$  wieder rational ist.

95. Es sei demnach das Integral  $\int \frac{\varphi x}{u} dx$  vorgelegt, worin  $u = \sqrt{ax^2 + 2bx + c}$ ,  $\varphi x$  eine rationale Function von  $x$  ist. Man nehme erstens an, daß  $a$  positiv sei, und setze  $ax + b = az$ ,  $ac - b^2 = a^2 h$ , so wird

$$u^2 = ax^2 + 2bx + c = \frac{(ax + b)^2 + ac - b^2}{a} = a(z^2 + h)$$

und  $dx = dz$ ; daher das Integral folgende Form annimmt:

$$\int \frac{fz \cdot dz}{\sqrt{z^2 + h}}; \quad \text{worin } fz \text{ eine rationale Function von } z \text{ ist.}$$

Nun setze man

$$\sqrt{z^2 + h} = v - z,$$

mithin  $z^2 + h = v^2 - 2vz + z^2$ , oder  $h = v^2 - 2vz$ . Differenziert man diese Gleichung, so kommt  $(v - z)dv = vdz$ ,

oder  $\frac{dv}{v} = \frac{dz}{v - z}$ , und weil  $v - z = \sqrt{z^2 + h}$ ,

$$\frac{dv}{v} = \frac{dz}{\sqrt{z^2 + h}}.$$

Zugleich ist  $z = \frac{v^2 - h}{2v}$ ,  $fz = f\left(\frac{v^2 - h}{2v}\right) = \varphi v$ , eine rationale Function von  $v$ ; also

$$\frac{fz \cdot dz}{\sqrt{z^2 + h}} = \frac{\varphi v \cdot dv}{v},$$

die verlangte rationale Form.

Zweitens sei  $a$  negativ. Man schreibe  $-a$  statt  $a$ , so wird

$$u^2 = c + 2bx - ax^2 = \frac{ac + b^2 - (ax - b)^2}{a}$$

in welchen Formeln  $a$  wieder positiv ist. Es sei ferner  $ac + b^2 = a^2h$ ,  $ax - b = az$ , mithin  $u^2 = a(h - z^2)$ . In dieser Formel muß  $h$  positiv sein, wenn nicht  $u$  beständig imaginär sein soll. Man schreibe daher  $h^2$  statt  $h$ . Das vorgelegte In-

tegral kommt mithin auf die Form  $\int \frac{\varphi z \cdot dz}{\sqrt{h^2 - z^2}}$  zurück, in welcher  $\varphi z$  eine rationale Function von  $z$  ist. Nun setze man

$$\sqrt{h^2 - z^2} = v(h + z),$$

also  $(h + z)v^2 = h - z$ . Differentiirt man diese Gleichung, so kommt

$$(1 + v^2)dz + 2v(h + z)dv = 0,$$

also

$$\frac{dz}{v(h + z)} = -\frac{2dv}{1 + v^2},$$

oder, weil  $v(h + z) = \sqrt{h^2 - z^2}$  ist,

$$\frac{dz}{\sqrt{h^2 - z^2}} = -\frac{2dv}{1 + v^2}.$$

Ferner ist  $z = \frac{h(1 - v^2)}{1 + v^2}$ ; folglich wird durch diese Substitution, das vorgelegte Integral auf dasjenige einer rationalen Function zurückgeführt, wie verlangt wurde.

Es sei z. B. das Integral  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + h}}$  vorgelegt. Man

setze  $v = x + \sqrt{x^2 + h}$ , so erhält man nach dem Vorigen,

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + h}}; \text{ mithin ist das Integral gleich } \log v + \text{Const.},$$

oder

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + h}} = \log(x + \sqrt{x^2 + h}) + \text{Const.}$$

Ist dagegen das Integral  $\int \frac{dx}{\sqrt{h^2 - x^2}}$  vorgelegt, so muß

$v = \sqrt{\frac{h-x}{h+x}}$  gesetzt werden; woraus sich  $\frac{dx}{\sqrt{h^2 - x^2}} = -\frac{2dv}{1+v^2}$  ergibt; mithin

$$\int \frac{dx}{\sqrt{h^2 - x^2}} = \text{Const.} - 2 \operatorname{arctg} v = \text{Const.} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{h-x}{h+x}}$$

Verlangt man, daß dieses Integral für  $x=0$  verschwinde, so erhält man, weil für  $x=0$

$$\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{h-x}{h+x}} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{4}\pi$$

wird, 
$$\int \frac{dx}{\sqrt{h^2 - x^2}} = \frac{1}{2}\pi - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{h-x}{h+x}},$$

oder auch, wenn man  $hx$  statt  $x$  schreibt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\pi - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Früher war gefunden  $d \operatorname{arc} \sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ; mithin

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x$ , welches Integral gleichfalls von Null anfängt.

Demnach muß  $\operatorname{arc} \sin x = \frac{1}{2}\pi - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$

oder 
$$\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2} \operatorname{arc} \sin x$$

sein. Wird  $\operatorname{arc} \sin x = u$  gesetzt, also  $x = \sin u$ , und

$$\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}u,$$

so folgt 
$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}u).$$

In der That ist, wie bekannt,



$$\operatorname{tg} \left( \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}u \right) = + \sqrt{\frac{1 - \sin u}{1 + \sin u}}$$

indem das positive Zeichen gewählt werden muß, weil der Werth von  $u$  zwischen  $-\frac{1}{2}\pi$  und  $+\frac{1}{2}\pi$  liegt, also  $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}u$  positiv und kleiner als  $\frac{1}{2}\pi$  ist.

Man kann auch das zweite der eben behandelten Integrale als eine imaginäre Form des ersten ansehen. Schreibt man nämlich in der Formel

$$\int \frac{dx}{\sqrt{h^2 + x^2}} = \log(x + \sqrt{h^2 + x^2}) + \text{Const.}$$

$xi$  statt  $x$ , so erhält man:

$$i \int \frac{dx}{\sqrt{h^2 - x^2}} = \log(xi + \sqrt{h^2 - x^2}) + \text{Const.}$$

Soll dies Integral für  $x=0$  verschwinden, so kommt

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{h^2 - x^2}} = \frac{1}{i} \log \left( \frac{xi + \sqrt{h^2 - x^2}}{h} \right) = \operatorname{arcsin} \frac{x}{h},$$

wo  $h$  positiv zu nehmen ist.

96. Es werde noch das Integral  $\int \frac{dx}{(a+x)\sqrt{h^2+x^2}}$  verlangt. Man setze

$$\sqrt{h^2 + x^2} = u - x,$$

so kommt, nach dem Obigen,

$$\frac{dx}{\sqrt{h^2 + x^2}} = \frac{du}{u} \quad \text{und} \quad a + x = \frac{u^2 + 2au - h^2}{2u};$$

mithin

$$\begin{aligned} \frac{dx}{(a+x)\sqrt{h^2+x^2}} &= \frac{2du}{u^2 + 2au - h^2} = \frac{2du}{(u+a)^2 - a^2 - h^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}} \left[ \frac{du}{u+a-\sqrt{a^2+h^2}} - \frac{du}{u+a+\sqrt{a^2+h^2}} \right]; \end{aligned}$$

und das gesuchte Integral gleich

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}} \log \left[ \frac{u+a-\sqrt{a^2+h^2}}{u+a+\sqrt{a^2+h^2}} \right],$$

oder, wenn man für  $u$  seinen Werth in  $x$  setzt,

$$\int \frac{dx}{(a+x)\sqrt{h^2+x^2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}} \log \left[ \frac{x+a+\sqrt{h^2+x^2}-\sqrt{h^2+a^2}}{x+a+\sqrt{h^2+x^2}+\sqrt{h^2+a^2}} \right] + \text{Const.}$$

Schreibt man  $-x$  statt  $x$ , und  $-a$  statt  $a$ , also auch  $-dx$  statt  $dx$ , so bleibt das Integral links unverändert, während sein Werth rechts eine andere Form erhält, nämlich:

$$\int \frac{dx}{(a+x)\sqrt{h^2+x^2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}} \log \left[ \frac{x+a-\sqrt{h^2+x^2}+\sqrt{h^2+a^2}}{x+a-\sqrt{h^2+x^2}-\sqrt{h^2+a^2}} \right] + \text{Const.}$$

Addirt man diese beiden Werthe, und nimmt das Product unter dem Logarithmenzeichen, so kommt:

$$2 \int \frac{dx}{(a+x)\sqrt{h^2+x^2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{h^2+a^2}} \log \left[ \frac{ax-h^2+\sqrt{h^2+a^2} \cdot \sqrt{h^2+x^2}}{ax-h^2-\sqrt{h^2+a^2} \cdot \sqrt{h^2+x^2}} \right] + \text{Const.}$$

oder wenn man den Nenner rational macht, und bemerkt, daß

$$(ax-h^2)^2 - (h^2+a^2)(h^2+x^2) = -h^2(x+a)^2$$

ist,

$$\int \frac{dx}{(a+x)\sqrt{h^2+x^2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{h^2+a^2}} \log \left[ \frac{ax-h^2+\sqrt{h^2+a^2} \cdot \sqrt{h^2+x^2}}{x+a} \right] + \text{Const. A.}$$

Schreibt man ferner in A.  $xi$  statt  $x$ ,  $ai$  statt  $a$  ( $i = \sqrt{-1}$ ), also  $idx$  statt  $dx$ , so kommt

$$\int \frac{dx}{(a+x)\sqrt{h^2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{h^2-a^2}} \log \left[ \frac{-ax-h^2+\sqrt{h^2-a^2} \cdot \sqrt{h^2-x^2}}{x+a} \right] + \text{Const. B.}$$

Diese Formel gilt, wenn  $\sqrt{h^2-a^2}$  reell ist. Hat aber dieser Ausdruck einen imaginären Werth, so schreibe man  $i\sqrt{a^2-h^2}$  statt  $\sqrt{h^2-a^2}$ ; woraus folgt:

$$\int \frac{dx}{(a+x)\sqrt{h^2-x^2}} = \frac{1}{i\sqrt{a^2-h^2}} \log \left[ \frac{-ax-h^2+i\sqrt{a^2-h^2} \cdot \sqrt{h^2-x^2}}{x+a} \right] + \text{Const.}$$

Man schreibe  $i^2(ax+h^2)$  statt  $-ax-h^2$ , und dividire unter dem Logarithmenzeichen mit  $hi$ , so kommt

$$\int \frac{dx}{(a+x)\sqrt{h^2-x^2}} = \frac{1}{i\sqrt{a^2-h^2}} \cdot \log \left[ \frac{(ax+h^2)i+\sqrt{a^2-h^2} \cdot \sqrt{h^2-x^2}}{h(x+a)} \right] + \text{Const.}$$

Nun werde, weil

$$(ax+h^2)^2 - \frac{1}{4}(a^2-h^2)(h^2-x^2) = h^2(x+a)^2 \quad \text{ist,}$$

$$\frac{\sqrt{a^2-h^2} \cdot \sqrt{h^2-x^2}}{h(x+a)} = \cos y, \quad \frac{ax+h^2}{h(x+a)} = \sin y$$

gesetzt, so erhält das vorstehende Integral die Form

$$\frac{1}{i\sqrt{a^2-h^2}} \log(\cos y + i \sin y) = \frac{y}{\sqrt{a^2-h^2}},$$

also

$$\int \frac{dx}{(a+x)\sqrt{h^2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-h^2}} \arcsin \left[ \frac{ax+h^2}{h(x+a)} \right] + \text{Const. C.}$$

In dieser Formel ist  $h$  positiv zu nehmen.

In der Formel A. schreibe man  $\pm hi$  statt  $h$ , so kommt:

$$\int \frac{dx}{(a+x)\sqrt{x^2-h^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-h^2}} \log \left[ \frac{ax+h^2+\sqrt{a^2-h^2} \cdot \sqrt{x^2-h^2}}{x+a} \right] + \text{Const. D.}$$

Diese Formel gilt, wenn  $a^2-h^2$  positiv ist. Ist aber  $a^2-h^2$  negativ, so schreibe man in der Formel C.  $ai$ ,  $xi$ ,  $\pm hi$  statt  $a$ ,  $x$ ,  $h$ ; man erhält:

$$\int \frac{dx}{(a+x)\sqrt{x^2-h^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{h^2-a^2}} \arcsin \left[ \frac{ax+h^2}{h(x+a)} \right] + \text{Const.}$$

In dieser Formel kann, in so fern  $h$  positiv gedacht wird, nur eines der beiden vorgesezten Zeichen, und zwar für alle Fälle nur das nämliche, gelten. Wird  $a=0$  gesetzt, kommt:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-h^2}} = -\frac{1}{h} \arcsin \frac{h}{x} + \text{Const.}$$

indem man leicht findet, daß hier für ein positives  $h$ , nur das negative Zeichen gilt. Daher gilt auch oben das negative Zeichen; also ist, wenn  $h^2 > a^2$ :

$$\int \frac{dx}{(a+x)\sqrt{x^2-h^2}} = -\frac{1}{\sqrt{h^2-a^2}} \arcsin \left[ \frac{ax+h^2}{h(x+a)} \right] + \text{Const.,}$$

oder weil immer  $\arcsin z = \frac{1}{2}\pi - \arccos z$  ist,

$$\int \frac{dx}{(a+x)\sqrt{x^2-h^2}} = \frac{1}{\sqrt{h^2-a^2}} \arccos \left( \frac{ax+h^2}{h(x+a)} \right) + \text{Const. E.}$$

Die vorstehenden Formeln werden unbestimmt, sobald  $h^2 = a^2$ . In diesem Falle erhält man, nach den allgemeinen Regeln:

$$\int \frac{dx}{(a+x)\sqrt{a^2-x^2}} = \text{Const.} - \frac{1}{a} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

$$\int \frac{dx}{(a+x)\sqrt{x^2-a^2}} = \text{Const.} + \frac{1}{a} \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}.$$

Ueber die theilweise Integration, und einige andere Mittel zur Auffindung von Integralen. Beispiele von Integralen logarithmischer, exponentieller und trigonometrischer Functionen.

97. Die schon in §. 92. erwähnte Methode der theilweisen Integration, führt auf Entwicklungen, durch welche man oft dahin gelangt, vorgelegte Integrale allgemein auszudrücken, d. h. durch die bekannten Elementarfunctionen darzustellen; oder solche, welche sich nicht auf diese Weise darstellen lassen, und die man deshalb transcendente Functionen nennt, auf einfachere Formen zurückzuführen.

Wenn  $u$  und  $v$  zwei beliebige Functionen von  $x$  sind, so ist allgemein (§. 92.)

$$\int u dv = vu - \int v du.$$

Man setze  $\frac{du}{dx} = u'$ ,  $\frac{d^2u}{dx^2} = u''$ , u. s. f.; so erhält man hieraus

$$\int u dv = vu - \int u' v dx. \quad 1.$$

Nun kann man wieder die theilweise Integration auf die Formel  $\int u' v dx$  anwenden, indem man  $\int v dx$  an die Stelle von  $v$ , und  $u'$  an die Stelle von  $u$  setzt. Dabei kann man sich in dem Zeichen  $\int v dx$  eine beliebige Constante enthalten denken. Man erhält

$$\int u' v dx = u' \int v dx - \int (\int v dx) du'$$

oder, wenn man zur Abkürzung  $\int v dx = v_1$ , hierauf

$$\int v_1 dx = \int \int v dx^2 = v_2 \quad \text{u. s. f.} \quad \text{setzt,}$$

$$\left. \begin{aligned} \int u' v dx &= u' v_1 - \int v_1 u'' dx. \\ \int u'' v_1 dx &= u'' v_2 - \int v_2 u''' dx. \\ &\text{u. s. f.} \\ \int u^{(n)} v_{n-1} dx &= u^{(n)} v_n - \int v_n u^{(n+1)} dx. \end{aligned} \right\} 2.$$

Die Addition der Formeln 1. und 2., mit abwechselnden Zeichen, giebt

$$\int u dv = u \cdot v - u' v_1 + u'' v_2 - \dots \pm u^{(n)} v_n \mp \int u^{(n+1)} v_n dx, \quad 3.$$

wo  $u^n$  die  $n$ te Ableitung  $\frac{d^n u}{dx^n}$  von  $u$ ,  $v_n$  das  $n$ te Integral  $\int_n v dx^n$  von  $v$  bedeutet.

Wenn man in dieser Formel bei jeder Integration eine willkürliche Constante hinzufügt, so müssen sich alle diese Constanten in eine einzige vereinigen lassen, weil das Integral nur eine solche enthalten kann. Es läßt sich auch leicht durch die Rechnung nachweisen, daß dies wirklich geschieht. Man setze z. B.

$$\int v dx = v_1 + C; \quad \int_2 v dx^2 = v_2 + Cx + C_1,$$

$$\text{so geht } \int u dv = uv - u' \int v dx + u'' \int_2 v dx^2 - \int u''' dx \int_2 v dx^2$$

$$\text{über in } \int u dv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \int u'''v_2 dx$$

$$- Cu' + Cu''x - C \int u'''x dx$$

$$+ C_1 u'' - C_1 \int u''' dx.$$

Die Ausdrücke  $u'' - \int u''' dx$ ,  $-u' + u''x - \int u'''x dx$  sind aber entweder Null oder, wenn man will, beliebige Constanten; daher bleibt der ganze von den hinzugefügten Constanten abhängige Theil des Integrals nur eine Constante.

$$\text{Es sei } v = x - a; \text{ man setze } v_1 = \int v dx = \frac{(x-a)^2}{2},$$

$$v_2 = \int v_1 dx = \frac{(x-a)^3}{3!}, \text{ u. s. f., so kommt, wenn man noch } fx \text{ statt } u \text{ schreibt, aus 3.,}$$

$$\int fx dx = (x-a)fx - \frac{(x-a)^2}{2} f'x + \frac{(x-a)^3}{6!} f''x \dots$$

$$\pm \frac{(x-a)^n}{n!} f^{n-1}(x) = \int \frac{(x-a)^n f^n x}{n!} dx.$$

Wenn dieses Integral für  $x = a$  verschwinden soll, so setze man  $\int fx dx = \psi x$ , mithin  $fx = \psi'x$ ; man erhält

$$\psi x - \psi a = (x-a)\psi'x - \frac{(x-a)^2}{2} \psi''x + \frac{(x-a)^3}{3!} \psi'''x \dots$$

$$\pm \frac{(x-a)^n}{n!} \psi^n x = \int_a^x \frac{(x-a)^n \psi^{n+1}(x) \cdot dx}{n!},$$

oder

$$\psi a = \psi x + (a-x)\psi'x + \frac{(a-x)^2}{2}\psi''x + \frac{(a-x)^3}{3!}\psi'''x, \dots$$

$$+ \frac{(a-x)^n}{n!}\psi^n x - \frac{1}{n!} \int_x^a (a-x)^n \psi^{n+1}(x) dx.$$

Es werde  $a = x+k$  gesetzt, so kommt, indem man zugleich die Grenzen des zuletzt stehenden Integrals umkehrt:

$$\psi(x+k) = \psi x + k\psi'x + \frac{k^2}{2}\psi''x + \dots$$

$$+ \frac{k^n}{n!}\psi^n x + \frac{1}{n!} \int_x^a (a-x)^n \psi^{n+1}x \cdot dx.$$

Nach vollendeter Integration muß in dem letzten Gliede  $a = x+k$  gesetzt werden. Setzt man  $x+k = z$ , so erhält man

$$\psi z = \psi x + (z-x)\psi'x + \frac{(z-x)^2}{2}\psi''x, \dots$$

$$+ \frac{(z-x)^n}{n!}\psi^n x + \frac{1}{n!} \int_x^z (z-x)^n \psi^{n+1}(x) \cdot dx.$$

Man sieht, daß dieser Ausdruck nichts anderes ist als die Taylorsche Reihe, deren Rest sich hier durch ein zwischen bestimmten Grenzen zu nehmendes Integral ausgedrückt findet.

98. Wendet man die theilweise Integration auf das Integral  $\int x^{m-1} dx (a+bx^n)^p$  an, wo  $m$  und  $n$  zwei ganze Zahlen,  $p$  eine beliebige gebrochene Zahl, so kann man verschiedene Reductionen desselben erhalten. Z. B. setze man

$$x^{n-1} dx (a+bx^n)^p = dv, \quad x^{m-n} = u,$$

so ist 
$$v = \frac{1}{nb(p+1)} (a+bx^n)^{p+1},$$

$$\int x^{m-1} dx (a+bx^n)^p = \frac{x^{m-n} (a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}$$

$$- \frac{m-n}{nb(p+1)} \int x^{m-n-1} dx (a+bx^n)^{p+1}.$$

Nun ist aber

$$x^{m-n-1}(a+bx^n)^{p+1} = ax^{m-n-1}(a+bx^n)^p + bx^{m-1}(a+bx^n)^p;$$

daher erhält man

$$\left(1 + \frac{m-n}{n(p+1)}\right) \int x^{m-1} dx (a+bx^n)^p = \\ \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{(m-n)a}{nb(p+1)} \int x^{m-n-1}(a+bx^n)^p,$$

oder

$$\int x^{m-1} dx (a+bx^n)^p = \\ \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} - (m-n)a \int x^{m-n-1} dx (a+bx^n)^p}{b(m+np)}.$$

Sind z. B.  $m$  und  $n$  positiv, und  $m > n$ , so wird der Exponent  $m$  auf  $m-n$ , dann auf  $m-2n$ , u. s. f. gebracht, bis alle in  $m$  enthaltenen Vielfachen von  $n$  weggeschafft sind. Ist  $m$  ein genaues Vielfaches von  $n$ , so erhält man ein algebraisches Integral, wie auch noch in einigen anderen Fällen, die hier aufzuzählen zu weitläufig wäre.

Die vorstehende Formel auf das Integral  $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$  angewendet giebt:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{(m-1)}{m} \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ist  $m$  negativ, so folgt aus dieser Formel, durch Versetzung der Glieder, wenn man noch  $-m$  statt  $m$  schreibt:

$$\int \frac{dx}{x^{m+2}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(m+1)x^{m+1}} + \frac{m}{m+1} \int \frac{dx}{x^m \sqrt{1-x^2}}.$$

Daher z. B.

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x + \text{Const.}$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}\right)\sqrt{1-x^2} + \text{Const.}$$



$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \text{Const.}$$

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}} + \text{Const.};$$

wobei zu bemerken, daß:

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}} = \log \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} + C$$

ist. Dies ergibt sich, wenn in der Formel B. §. 96.,  $a=0$ ,  $h=1$  gesetzt wird.

99. Es werde noch das Integral  $\int (\sin x)^n (\cos x)^m dx$  betrachtet, in welchem  $n$  und  $m$  zwei beliebige ganze Zahlen sind.

Setzt man  $\cos x = y$ ,  $\sin x = \pm \sqrt{1-y^2}$ ,  $dx = \frac{\mp dy}{\sqrt{1-y^2}}$ , so verwandelt sich das vorgelegte Integral in

$$\int (1-y^2)^{\frac{n-1}{2}} y^m dy,$$

welches sich nach §. 93., wenn  $n-1$  ungerade ist, auf das Integral einer rationalen Function bringen läßt. Durch theilweise Integration kann man aber auch das vorgelegte Integral sofort finden.

Man setze  $\cos x^m \cdot dx = \cos x^{m-1} \cdot d \sin x$ , so kommt durch theilweise Integration

$$\int \sin x^n \cdot \cos x^m dx = \int \cos x^{m-1} \cdot \sin x^n d \sin x =$$

$$\frac{1}{n+1} \cos x^{m-1} \sin x^{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin x^{n+2} \cos x^{m-2} dx.$$

Da aber  $\sin x^{n+2} \cos x^{m-2} = \sin x^n \cos x^{m-2} - \sin x^n \cos x^m$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \int \sin x^n \cos x^m dx &= \frac{1}{n+1} \cos x^{m-1} \sin x^{n+1} \\ &+ \frac{m-1}{n+1} \int \sin x^n \cos x^{m-2} dx - \frac{m-1}{n+1} \int \sin x^n \cos x^m dx, \end{aligned}$$

oder wenn man die Glieder gehörig zusammenstellt:

$$\int \sin x^n \cos x^m dx =$$

$$\frac{1}{m+n} \cos x^{m-1} \sin x^{n+1} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin x^n \cos x^{m-2} dx. \quad A.$$

Diese Formel dient, um den Exponenten  $m$  von  $\cos x$  auf  $m-2$ , oder auch, wenn  $m$  negativ ist,  $m-2$  auf  $m$  zu bringen. Man kann auch eine andere erhalten, in welcher der Exponent  $m$  unverändert bleibt, dagegen  $n$  auf  $n-2$  gebracht wird. Man findet, durch Anwendung der nämlichen Methode, wie vorher:

$$\int \sin x^n \cos x^m dx =$$

$$-\frac{\sin x^{n-1} \cos x^{m+1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin x^{n-2} \cos x^m dx. \quad B.$$

Die Formeln A. und B. geben keine Reduction, wenn  $m+n=0$  ist. Alsdann hat man eines der beiden Integrale  $\int (\operatorname{tg} x)^n dx$  und  $\int (\operatorname{cotg} x)^n dx$  zu suchen. Setzt man  $\operatorname{tg} x = z$ ,

$$dz = \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad dx = \frac{dz}{1+z^2}, \quad \text{so kommt} \quad \int (\operatorname{tg} x)^n dx = \int \frac{z^n dz}{1+z^2}.$$

Setzt man  $\operatorname{cotg} x = z$ ,  $dx = \frac{-dz}{1+z^2}$ , so kommt

$$\int (\operatorname{cotg} x)^n dx = - \int \frac{z^n dz}{1+z^2}. \quad \text{Da} \quad \frac{z^n}{1+z^2} = z^{n-2} - \frac{z^{n-2}}{1+z^2},$$

so erhält man:

$$\int \frac{z^n dz}{1+z^2} = \frac{1}{n-1} z^{n-1} - \int \frac{z^{n-2} dz}{1+z^2}.$$

Also z. B.  $\int (\operatorname{tg} x)^2 dx = \operatorname{tg} x - x + \text{Const.}$

Man hat noch:

$$\int (\operatorname{tg} x) dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = - \log \cos x + \text{Const.}$$

$$\int (\operatorname{cotg} x) dx = \log \sin x + \text{Const.}$$

Man bemerke noch die folgenden Integrale, auf welche man durch die Formeln A. und B. geführt wird:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x \, dx}{\sin^2 x} = - \int \frac{d \cos x}{1 - \cos^2 x} =$$

$$\frac{1}{2} \log \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + C = \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} x + C.$$

Setzt man in diesem Integral  $\frac{1}{2}\pi + x$  statt  $x$ , so kommt

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \log \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}x \right) + C.$$

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{d2x}{\sin 2x} = \log \operatorname{tg} x + \text{Const.}$$

Um die Integrale  $\int \sin^m x \, dx$ ,  $\int \cos^m x \, dx$  zu finden, kann man sich auch der Entwicklungen von  $\cos^m x$ ,  $\sin^m x$  bedienen, welche in §. 24. gegeben sind. Nach denselben hat man z. B.

$$\cos^4 x = \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}, \quad \sin^4 x = \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8};$$

$$\text{folglich } \int \cos^4 x \, dx = \frac{1}{32} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8}x + \text{Const.}$$

$$\int \sin^4 x \, dx = \frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8}x + \text{Const.}$$

100. Durch das Mittel der theilweisen Integration findet man z. B.  $\int (\log x) dx = x \log x - x$ ; allgemeiner:

$$\int (\log x)^n dx = x (\log x)^n - n \int (\log x)^{n-1} dx,$$

und 
$$\int \frac{dx}{(\log x)^n} = \frac{x}{(\log x)^n} + n \int \frac{dx}{(\log x)^{n+1}},$$

oder, wenn man die Glieder versetzt, und  $n+1$  mit  $n$  vertauscht:

$$\int \frac{dx}{(\log x)^n} = \frac{1}{n-1} \int \frac{dx}{(\log x)^{n-1}} - \frac{1}{n-1} \cdot \frac{x}{(\log x)^{n-1}}.$$

Also z. B.

$$\int (\log x)^2 dx = x (\log x)^2 - 2x \log x + 2x + \text{Const.}$$

$$\int \frac{dx}{(\log x)^2} = \int \frac{dx}{\log x} - \frac{x}{\log x} + C.$$

Das Integral  $\int \frac{dx}{\log x}$  ist eine transcendente Function eigener Art,

welche man den Integral-Logarithmus nennt, und von deren Theorie hier nur Folgendes erwähnt werden kann:

Es sei  $x'$  ein beliebiger positiver echter Bruch, so ist klar, daß die Function  $\frac{1}{\log x}$  für alle Werthe von  $x$  zwischen 0 und  $x'$  endlich und stetig bleibt; daher das Integral  $\int_0^{x'} \frac{dx}{\log x}$  einen endlichen Werth haben muß. Um diesen zu finden, setze man  $\log x = -u$ , so wird  $dx = \frac{du}{e^u}$ , und  $u = \infty$  für  $x = 0$ ; also

$$\int_0^{x'} \frac{dx}{\log x} = \int_{\infty}^{u'} \frac{du}{u \cdot e^u},$$

wo  $u' = -\log x'$  eine positive Zahl ist.

Man hat  $\frac{e^{-u}}{u} = \frac{1}{u} - 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{3!} + \dots$

mithin  $\int \frac{du}{u \cdot e^u} = \text{Const.} + \log u - u + \frac{u^2}{2! \cdot 2} - \frac{u^3}{3! \cdot 3} + \frac{u^4}{4! \cdot 4} - \dots$

Die vorstehende immer convergirende Reihe

$$\log u - u + \frac{u^2}{2! \cdot 2} - \frac{u^3}{3! \cdot 3} \dots$$

werde mit  $f u$  bezeichnet. Da das Integral für  $u = \infty$  Null werden soll, so muß  $\text{Const.} + f(\frac{1}{0}) = 0$ , also  $\text{Const.} = -f(\frac{1}{0})$  sein; und es kommt darauf an, diesen Werth zu finden. Es

sei  $a$  eine beliebig große positive Zahl, so ist  $\int_a^u \frac{du}{u \cdot e^u} = f u - f a$ ,

und, wenn man die Ableitung nimmt,  $f' u = \frac{1}{u \cdot e^u}$ . Man setze

$\varphi u = \frac{1}{a} (e^{-a} - e^{-u})$ , so ist  $\varphi' u = \frac{1}{a \cdot e^u}$ ; daher offenbar, so-

bald  $a > 1$ ,  $u > a$ , ist  $\varphi' u > f' u$ . Folglich wachsen die Functionen  $f u - f a$  und  $\varphi u$  beide zugleich stetig von Null an, indem  $u$  von  $a$  bis in das Unendliche wächst;  $f u - f a$  aber langsamer

als  $\varphi u$ , weil  $f u < \varphi' u$  ist; und da  $\varphi(\frac{1}{a}) = \frac{1}{a \cdot e^a}$ , so muß,

$$\text{für } u = \frac{1}{a}, \quad f(\frac{1}{a}) - f a < \frac{1}{a \cdot e^a}$$

sein. Berechnet man demnach den Werth der Reihe  $f a$  für eine hinreichend große Zahl  $a$ , und setzt  $f(\frac{1}{a}) = f a + \varepsilon$ , so ist damit auch der Werth von  $f(\frac{1}{a})$  bis auf einen Fehler  $\varepsilon$  gefunden, welcher positiv und kleiner als  $\frac{1}{a \cdot e^a}$  ist. Nimmt man z. B.  $a = 10$ ,

so ist  $\varepsilon < \frac{1}{10 \cdot e^{10}}$ , d. i.  $\varepsilon < 0,00001$ ; mithin findet man

durch diese Rechnung (welche Brandes in seinem Lehrbuche der höheren Geometrie, Th. 2. S. 69. ausführt) den Werth von  $f(\frac{1}{a})$  bis auf 5 Decimalstellen genau. Auf anderen Wegen hat man die Constante des vorgelegten Integrals genauer gefunden  $= C = -f(\frac{1}{a}) = 0,5772156649 \dots$

Demnach erhält man

$$\int_{\infty}^u \frac{du}{u \cdot e^u} = C + \log u - u + \frac{u^2}{2! \cdot 2} - \frac{u^3}{3! \cdot 3} + \frac{u^4}{4! \cdot 4} \dots,$$

oder wenn man  $u = -\log x$  setzt, vorausgesetzt, daß  $x$  zwischen 0 und 1 liegt,

$$\int_0^x \frac{dx}{\log x} = C + \log(-\log x) + \log x + \frac{(\log x)^2}{2! \cdot 2} + \frac{(\log x)^3}{3! \cdot 3} + \dots$$

Will man eine Formel finden, welche brauchbar ist, sobald  $x$  die Einheit übersteigt, so setze man  $u = \log x$ ; man erhält, für ein positives  $u$ ,

$$\int \frac{dx}{\log x} = \int \frac{e^u du}{u} = \log u + u + \frac{u^2}{2! \cdot 2} + \frac{u^3}{3! \cdot 3} + \dots \text{Const., oder}$$

$$\int \frac{dx}{\log x} = \text{Const.} + \log \log x + \log x + \frac{(\log x)^2}{2! \cdot 2} + \frac{(\log x)^3}{3! \cdot 3} + \dots$$

Verlangt man den Werth von  $\int_0^{x'} \frac{dx}{\log x}$ , sobald  $x' > 1$ , so muß man das Integral theilen.

Es seien  $v$  und  $w$  zwei beliebig kleine positive Größen; man setze

$$\begin{aligned} \int_0^{x'} \frac{dx}{\log x} &= \int_0^{1-v} \frac{dx}{\log x} + \int_{1+w}^{x'} \frac{dx}{\log x} = \\ &C + \log(-\log(1-v)) + \log(1-v) + \dots \\ &+ \log \log x' + \log x' + \frac{(\log x')^2}{2!2} + \dots \\ &- \log \log(1+w) - \log(1+w) - \dots \end{aligned}$$

so erhält man, für  $v=0$ ,  $w=0$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{x'} \frac{dx}{\log x} &= C + \log \frac{-\log(1-v)}{\log(1+w)} \\ &+ \log \log x' + \log x' + \frac{(\log x')^2}{2!2} + \dots \end{aligned}$$

Das Verhältniß  $\frac{-\log(1-v)}{\log(1+w)}$  nähert sich dem Verhältnisse  $\frac{v}{w}$ ,

indem  $v$  und  $w$  sich der Null nähern, und wird, für  $v=0$ ,  $w=0$ , unbestimmt, weil zwischen  $v$  und  $w$  keine Abhängigkeit irgend einer Art besteht. Folglich ist auch das vorliegende Integral, zwischen den Grenzen 0 und  $x'$ , sobald  $x' > 1$ ,

unbestimmt. Das Integral  $\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\log x}$  hat also nur dann einen bestimmten Werth, wenn sich zwischen den (positiven) Grenzen  $x_0$  und  $x_1$  der Werth 1 nicht befindet.

101. Der vorige §. liefert ein Beispiel von dem Gebrauche der Reihen zur Darstellung der Integrale. Hat man eine Function  $fx$  auf irgend eine Weise in eine Reihe entwickelt, welche für alle Werthe von  $x$  zwischen  $x_0$  und  $x_1$  convergirt, so erhält man durch Integration der Reihe allemal auch das Integral  $\int_{x_0}^{x_1} fx dx$  durch eine convergente Reihe ausgedrückt. Denn es werde der Rest der Reihe, nach Hinwegnahme der  $n$  ersten Glieder, mit  $\varphi_n x$  bezeichnet; so muß, nach der Voraussetzung, die Function  $\varphi_n x$ , für alle Werthe von  $x$  zwischen  $x_0$  und  $x_1$ , mit

wachsendem  $n$  sich der Null nähern; woraus folgt, daß auch der Werth des Integrals  $\int_{x_0}^{x_1} \varphi_n x dx$  sich mit wachsendem  $n$  der Null nähert, weil er einem Mittelwerthe von  $\varphi_n x$ , multiplicirt in das Intervall  $x_1 - x_0$ ; gleich ist. Dieses Intervall muß aber endlich sein.

Man kann auch die Reihe für  $f_x$  noch mit einer Function  $F_x$  multipliciren, welche zwischen den Grenzen  $x_0$  und  $x_1$  endlich und stetig bleibt, so erhält man dadurch eine ebenfalls convergirende Reihe für das Integral  $\int_{x_0}^{x_1} f_x \cdot F_x \cdot dx$ .

Man hat z. B.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots;$$

mithin 
$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

Um das Integral  $\int x^n (1-x)^m dx$  in eine Reihe zu entwickeln, für die Fälle, in welchen ein Ausdruck desselben in endlicher Form nicht zu erhalten ist, setze man:

$$(1-x)^m = 1 - m_1 x + m_2 x^2 - m_3 x^3 + \dots$$

mithin  $x^n (1-x)^m = x^n - m_1 x^{n+1} + m_2 x^{n+2} - m_3 x^{n+3} + \dots$

so ist

$$\int x^n (1-x)^m dx = \text{Const.} + \frac{x^{n+1}}{n+1} - m_1 \frac{x^{n+2}}{n+2} + m_2 \frac{x^{n+3}}{n+3} - \dots$$

Ein anderes Beispiel liefert die Reihe

$$\int e^x \cdot x^n dx = \text{Const.} + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{n+2} + \frac{x^{n+3}}{2(n+3)} + \frac{x^{n+4}}{3!n+4} \dots$$

welche man findet, wenn man die Reihe  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$  mit  $x^n$  multiplicirt, und das Product integrirt.

Anmerkung. Setzt man  $x = \log y$ , so wird

$$\int x^n e^x dx = \int (\log y)^n \cdot dy,$$

worüber §. 100 zu vergleichen ist.

102. Es sei  $f(x, a)$  eine Function von  $x$ , welche zugleich eine unbestimmte Constante  $a$  enthält. Setzt man das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, a) dx = \psi(x_1, a) - \psi(x_0, a);$$

so lassen sich aus demselben andere Integrale ableiten, indem man das vorstehende nach  $a$  differenzirt, während  $x_0$  und  $x_1$  unverändert bleiben. Offenbar nämlich ist, wenn  $a$  in  $a+k$  übergeht:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{f(x, a+k) - f(x, a)}{k} \right) dx = \frac{\psi(x_1, a+k) - \psi(x_1, a)}{k} - \frac{\psi(x_0, a+k) - \psi(x_0, a)}{k};$$

daher für  $k=0$ ,

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{df(x, a)}{da} dx = \frac{d\psi(x_1, a)}{da} - \frac{d\psi(x_0, a)}{da}.$$

Man hat z. B.  $\int_0^x \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$

Nimmt man die Ableitung nach  $a$ , so kommt:

$$\int_0^x \frac{-2adx}{(a^2 + x^2)^2} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{x}{a^2 + x^2} - \frac{1}{a^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a};$$

mithin  $\int_0^x \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{a^2 + x^2} + \frac{1}{2a^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$

Also z. B. für  $a=1$ ,

$$\int_0^x \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x,$$

übereinstimmend mit §. 92. Auf diesem Wege würde man z. B.

$\int \frac{dx}{(a+x)^n \sqrt{h^2 \pm x^2}}$  aus den Formeln des §. 96. für



$\int \frac{dx}{(a+x)\sqrt{h^2 \pm x^2}}$  durch Differentiation nach  $a$  leicht finden.

Ferner kann man auch das Integral  $\int_{x_0}^{x_1} f(x,a) dx$ , als eine Function von  $a$  betrachtet, mit  $da$  multipliciren, und nach  $a$  integriren. Dabei geht es aus dem Begriffe eines Integrals, als einer Summe, hervor, daß die Ordnung, in welcher die Integrationen vorgenommen werden, einerlei ist; wenigstens wenn die Function  $f(x,a)$  zwischen den Grenzen der Integration in Hinsicht auf  $x$  und auf  $a$ , überall endlich und stetig bleibt. Es seien demnach  $\alpha$  und  $\beta$  die Grenzen der Integration in Bezug auf  $a$ ,

$$\text{so hat man} \quad \int_{\alpha}^{\beta} da \int_{x_0}^{x_1} f(x,a) dx = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\alpha}^{\beta} f(x,a) da.$$

Dieser wichtige Satz läßt sich auch auf folgende Art beweisen:

$$\text{Man setze } \int f(x,y) dx = \psi(x,y), \text{ und } \frac{df(x,y)}{dy} = \varphi(x,y);$$

$$\text{so ist} \quad \int_a^x f(x,y) dx = \psi(x,y) - \psi(a,y);$$

$$\text{daher} \quad \frac{d[\psi(x,y) - \psi(a,y)]}{dy} = \int_a^x \varphi(x,y) dx,$$

woraus folgt:

$$\psi(x,y) - \psi(a,y) = \int dy \int_a^x \varphi(x,y) dx.$$

mithin:

$$\int_{\alpha}^y dy \int_a^x \varphi(x,y) dx = \psi(x,y) - \psi(a,y) - \psi(x,\alpha) + \psi(a,\alpha).$$

Ferner ist

$$f(x,y) = \int \varphi(x,y) dy; \quad \int_{\alpha}^y \varphi(x,y) dy = f(x,y) - f(x,\alpha);$$

$$\begin{aligned} \int_a^x dx \int_{\alpha}^y \varphi(x,y) dy &= \int_a^x f(x,y) dx - \int_a^x f(x,\alpha) dx = \\ &= \psi(x,y) - \psi(a,y) - \psi(x,\alpha) + \psi(a,\alpha); \end{aligned}$$

eine unendlich kleine Zunahme der Abscisse  $x$ ; man ziehe  $bc$  parallel mit  $BC$ ; so drückt das Product  $y dx \sin \alpha$  die Fläche des unendlich schmalen Streifens  $CBbc$  aus; folglich ist

$$\int y dx \cdot \sin \alpha = a^2 \sin \alpha \int \frac{dx}{x} = a^2 \sin \alpha \log x + \text{Const.}$$

der Ausdruck der von der Hyperbel begrenzten Fläche. Soll dieselbe von der Ordinate  $FK$  des Scheitels  $K$  ihren Anfang nehmen, so ist die entsprechende Abscisse  $AF = a$ ; mithin die Fläche  $KFBC = a^2 \sin \alpha \cdot \log \left( \frac{x}{a} \right)$ .

Für die Cycloide war (§. 50.)  $x = a(\varphi - \sin \varphi) = AB$ ,  $y = a(1 - \cos \varphi) = BC$  (Fig. 23.). Betrachtet man die Fläche  $ACB$  als eine Function von  $\varphi$ , und bezeichnet sie mit  $F$ , so ist  $\frac{dF}{d\varphi} = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{d\varphi} = y \frac{dx}{d\varphi}$ ; also, da  $y = a(1 - \cos \varphi)$ , und  $\frac{dx}{d\varphi} = a(1 - \cos \varphi)$ , so ist:

$$F = a^2 \int (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = a^2 \int \left[ \frac{3}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2} - 2 \cos \varphi \right] d\varphi$$

$$\text{oder} \quad F = ABC = a^2 \left( \frac{3}{2} \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4} - 2 \sin \varphi \right);$$

wo das Integral so genommen ist, daß es für  $x = 0$ , d. h. für  $\varphi = 0$ , verschwindet.

Für  $\varphi = 2\pi$  erhält man die ganze Fläche der Cycloide gleich  $3a^2\pi$ .

Um noch ein Beispiel von der Quadratur in Polarcoordinaten zu geben, sei die Gleichung einer gewöhnlichen Spirale  $r = a\varphi$  vorgelegt. Man erhält daraus den Flächenraum, welchen der Leitstrahl  $r$  während seiner Drehung von  $\angle \varphi = \alpha$  bis  $\varphi = \varphi$  überstreicht, gleich

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\varphi} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \int_{\alpha}^{\varphi} \varphi^2 d\varphi = \frac{1}{6} a^2 (\varphi^3 - \alpha^3);$$

also z. B., für  $\alpha = 0$ , den Flächenraum  $\frac{1}{6} a^2 \varphi^3 = \frac{1}{6} r^2 \varphi$ .

## Anwendungen der Integral-Rechnung auf die Geometrie.

### Quadratur und Rectification der Curven.

103. Es sei (Fig. 18.)  $CEE'$  ein Bogen einer Curve,  $AD$  die Abscisse der  $x$ ,  $AB=a$ ,  $AD=x$ , Ordinate  $BC=fa$ ,  $DE=fx$ ; so ist der Flächenraum  $BCDE$  offenbar eine Function von  $x$  und  $a$ ; oder, wenn man sich  $a$  unveränderlich denkt, eine Function von  $x$ ; also  $BCDE=\psi x$ . Läßt man  $x$  um  $DD'=\Delta x$  wachsen, so kann man immer  $\Delta x$  so klein annehmen, daß die Ordinate  $fx$  zwischen  $x$  und  $x+\Delta x$  beständig wächst oder beständig abnimmt; daher ist die Größe des Flächenraumes  $EDDE'=\Delta \psi x$  zwischen den Grenzen

$$fx \cdot \Delta x \quad \text{und} \quad f(x+\Delta x) \cdot \Delta x,$$

folglich auch der Quotient  $\frac{\Delta \psi x}{\Delta x}$  zwischen  $fx$  und  $f(x+\Delta x)$  enthalten. Hieraus folgt, wenn die Differenz  $\Delta x$  im Verschwinden gedacht wird,  $\psi'x=fx$ ; d. h. die Ordinate  $fx$  ist die Ableitung der den Flächenraum ausdrückenden Function  $\psi x$ . Daher wird der Flächenraum  $CBDE$  durch das Integral  $\int_a^x fxdx$  angegeben, wenn die Abscissen an seinen Grenzen  $AB=a$ ,  $AD=x$ , sind.

Um die Formel für den Flächenraum in Polarcoordinaten zu entwickeln, sei (Fig. 19.)  $AC=r$  der Leitstrahl,  $\angle CAB=\varphi$ ;  $AB=r \cos \varphi=x$ ,  $CB=r \sin \varphi=y$ . Wächst  $\varphi$  um  $\Delta \varphi=CAE$ , so geht  $AC=r$  in  $AD=r+\Delta r$  über, und wenn von  $C$  das Loth  $CE$  auf  $AD$  gefällt wird, so ist Dreieck  $CAE=\frac{1}{2}r^2 \cos \Delta \varphi \sin \Delta \varphi$ . Bezeichnet man die Fläche  $A'AC$  mit  $\psi(\varphi)$

oder kürzer mit  $\psi$ , (indem man  $AA'$  als einen beliebigen festen,  $AC$  als einen beweglichen Leitstrahl und mithin  $A'AC$  als eine Function von  $\varphi$  ansieht), so kann man wieder, nach der Methode der Grenzen, beweisen, daß das Verhältniß von  $CAD = \Delta\psi\varphi$  zu dem Dreiecke  $CAE$  sich desto mehr der Einheit nähert, je kleiner  $\Delta\varphi$  wird; mithin muß

$$\frac{\Delta\psi\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1}{2}r^2 \cdot \cos \Delta\varphi \cdot \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi}$$

sein für  $\Delta\varphi = 0$ ; woraus folgt:  $\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{1}{2}r^2$ ; also  $\psi = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$ .

Dieses Integral drückt, zwischen den gehörigen Grenzen genommen, das von zwei Leitstrahlen und dem zwischen ihnen befindlichen Bogen begränzte Flächenstück ( $A'AC$ ) aus.

Aus den Gleichungen  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , folgt

$$dx = \cos \varphi \cdot dr - y d\varphi \quad \text{und} \quad dy = \sin \varphi dr + x d\varphi;$$

und hieraus findet man

$$x dy - y dx = r^2 d\varphi,$$

daher die Fläche  $A'AC$  auch durch das Integral  $\frac{1}{2} \int (x dy - y dx)$  ausgedrückt werden kann.

Anmerk. Alle diese Ausdrücke erhalten vermittelt des unendlich Kleinen eine klare geometrische Bedeutung, die zu merken ist. Stellt man sich nämlich unter  $dx$  eine unendlich kleine Zunahme der Abscisse  $x$  vor, welche in Fig. 18. durch  $DD'$  angedeutet sei, so drückt das Product  $fx \cdot dx$  das Rechteck aus  $ED$  in  $DD'$  aus, welches bis auf ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung, der Figur  $EDD'E'$  gleich ist. Das Integral  $\int fx dx$  drückt daher den Flächenraum als eine Summe von unendlich vielen Elementar-Rechtecken aus.

Eben so findet man, wenn man in dem Dreieck  $CAD$  den Winkel bei  $A$  (Fig. 19.) unendlich klein und gleich  $d\varphi$ , zugleich  $CA = r$ ,  $CD = r + dr$  setzt, und die Sehne  $CD$  gleich dem Flächenraum des geradsinigten Dreiecks  $CAD = \frac{r(r+dr) \sin d\varphi}{2}$ ,

Soll der Bogen im Scheitel anfangen, so muß für  $x=0$  das Integral Null werden; alsdann erhält man  $\text{Const.}=0$ , und den parabolischen Bogen vom Scheitel an:

$$s = \frac{1}{2}p \log \frac{\sqrt{p+2x} + \sqrt{2x}}{\sqrt{p+2x} - \sqrt{2x}} + x \sqrt{\frac{p+2x}{-2x}}.$$

Für die Ellipse ist  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $\frac{x dx}{a^2} + \frac{y dy}{b^2} = 0$ , woraus,

wenn  $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$  gesetzt wird,  $ds = dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}}$

folgt, wovon das Integral eine transcendente Function ist. Bringt man die Gleichung der Ellipse in die Form  $x = a \cos \varphi$ ,  $y = b \sin \varphi$ , so wird

$$ds^2 = (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) d\varphi^2$$

oder  $ds = a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi} \cdot d\varphi$ .

Schreibt man in den vorstehenden Gleichungen  $-b^2$  statt  $b^2$ , so daß  $e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$  wird, so erhält man das Differential des Bogens der Hyperbel:

$$ds = dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}} = dx \sqrt{\frac{e^2 x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}.$$

Für die Cycloide war  $dx = a(1 - \cos \varphi) d\varphi$ ,  $dy = a \sin \varphi d\varphi$  (§. 50.), folglich

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = 2a^2(1 - \cos \varphi) d\varphi^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi \cdot d\varphi^2;$$

oder  $ds = -2a \sin \frac{1}{2} \varphi d\varphi$ ,  $s = \text{const.} + 4a \cos \frac{1}{2} \varphi$ .

Soll der Bogen im Scheitel G der Cycloide anfangen (Fig. 23.), so muß für  $\varphi = \pi$ ,  $s = 0$  werden, woraus  $\text{Const.} = 0$  und  $s = 4a \cos \frac{1}{2} \varphi$  folgt. (In dem Ausdrucke für  $ds$  ist das negative Zeichen gewählt, weil, unter der gemachten Voraussetzung, der Bogen GC abnimmt, während  $\varphi$  wächst.)

Man hatte  $y = a(1 - \cos \varphi) = 2a \sin^2 \frac{1}{2} \varphi$ ; zugleich  $s^2 = 16a^2 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi$ , folglich, durch Elimination von  $\varphi$ ,

eine unendlich kleine Zunahme der Abscisse  $x$ ; man ziehe  $bc$  parallel mit  $BC$ ; so deutet das Product  $y dx \sin \alpha$  die Fläche des unendlich schmalen Streifens  $CBbc$  aus; folglich ist

$$\int y dx \cdot \sin \alpha = a^2 \sin \alpha \int \frac{dx}{x} = a^2 \sin \alpha \log x + \text{Const.}$$

der Ausdruck der von der Hyperbel begrenzten Fläche. Soll dieselbe von der Ordinate  $FK$  des Scheitels  $K$  ihren Anfang nehmen, so ist die entsprechende Abscisse  $AF = a$ ; mithin die Fläche  $KFBC = a^2 \sin \alpha \cdot \log \left( \frac{x}{a} \right)$ .

Für die Cycloide war (§. 50.)  $x = a(\varphi - \sin \varphi) = AB$ ,  $y = a(1 - \cos \varphi) = BC$  (Fig. 23.). Betrachtet man die Fläche  $ACB$  als eine Function von  $\varphi$ , und bezeichnet sie mit  $F$ , so ist  $\frac{dF}{d\varphi} = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{d\varphi} = y \frac{dx}{d\varphi}$ ; also, da  $y = a(1 - \cos \varphi)$ , und  $\frac{dx}{d\varphi} = a(1 - \cos \varphi)$ , so ist:

$$F = a^2 \int (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = a^2 \int \left[ \frac{3}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2} - 2 \cos \varphi \right] d\varphi$$

$$\text{oder} \quad F = ABC = a^2 \left( \frac{3}{2} \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4} - 2 \sin \varphi \right);$$

wo das Integral so genommen ist, daß es für  $x = 0$ , d. h. für  $\varphi = 0$ , verschwindet.

Für  $\varphi = 2\pi$  erhält man die ganze Fläche der Cycloide gleich  $3a^2\pi$ .

Um noch ein Beispiel von der Quadratur in Polarcoordinaten zu geben, sei die Gleichung einer gewöhnlichen Spirale  $r = a\varphi$  vorgelegt. Man erhält daraus den Flächenraum, welchen der Leitstrahl  $r$  während seiner Drehung von  $\angle \varphi = \alpha$  bis  $\varphi = \varphi$  überstreicht, gleich

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\varphi} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \int_{\alpha}^{\varphi} \varphi^2 d\varphi = \frac{1}{6} a^2 (\varphi^3 - \alpha^3);$$

also z. B., für  $\alpha = 0$ , den Flächenraum  $\frac{1}{6} a^2 \varphi^3 = \frac{1}{6} r^2 \varphi$ .

105. Es sei  $AB$  (Fig. 24.) ein abstrakt, concaver Bogen einer Curve, und in demselben eine Sehne  $AB$  gezeichnet. Man ziehe in  $A$  die Tangente und verlängere sie bis zum Durchschnitte  $F$  mit der Ordinate  $EB$  von  $B$ ; so ist der concave Bogen  $AB$  größer als die Sehne  $AB$  und kleiner als die Summe der einschließenden Linien  $AF + BF$ . Man kann dies entweder als Grundsatz annehmen, oder auch beweisen, wenn man die Länge des Bogens  $AB$  als die Grenze des eingeschriebenen Polygons definiert. Nun sei  $AC = \Delta x$ ,  $CB = \Delta y$ ,  $\angle FAC = \alpha$ , so ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}, \quad \text{und Sehne} \quad AB = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

$$AF + FB = \frac{\Delta x}{\cos \alpha} + \Delta x \operatorname{tg} \alpha = \Delta y.$$

Setzt man den Bogen  $AB$  gleich  $\Delta s$ , so liegt das Verhältniß  $\frac{\Delta s}{\Delta x}$  zwischen

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \quad \text{und} \quad \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \frac{dy}{dx} - \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

$$\text{weil} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ist. Für ein verschwindendes Bogenelement  $ds$  fallen diese beiden Grenzen zusammen, indem  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$  wird, und man erhält

$$\text{die Ableitung des Bogens} \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Statt dessen läßt sich auch schreiben:  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , was, in Worten ausgedrückt, nichts Anderes heißt, als daß ein unendlich kleines Bogenelement  $ds$  als zusammenfallend mit seiner Sehne  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$  angesehen werden muß.

Sind Polarcoordinaten gewählt, so daß  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , so ist

$$dx = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi, \quad dy = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi,$$

$$\text{mithin} \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}.$$

Der Bogen  $s$  wird also durch die Integrale

$$\int \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \cdot dx \quad \text{oder} \quad \int \sqrt{1 + r^2 \frac{d\varphi^2}{dr^2}} \cdot dr$$

ausgedrückt.

Beispiele. Die vorgelegte Curve sei ein Kreis; die Gleichung desselben  $x^2 + y^2 = r^2$ , so ist  $x dx + y dy = 0$ , also

$$dx^2 + dy^2 = \frac{dx^2(x^2 + y^2)}{y^2} = \frac{r^2 dx^2}{y^2} = ds^2,$$

mithin, wenn man das positive Zeichen wählt,

$$s = \frac{r dx}{y} = \frac{r dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Hieraus folgt  $s = r \arcsin \frac{x}{r} + \text{Const.}$ , und wenn der Bogen

von  $x = 0$  anfangen soll,  $s = r \arcsin \frac{x}{r}$ .

Aus der Gleichung der Parabel  $y^2 = 2px$  folgt  $y dy = p dx$ , mithin  $ds = dx \sqrt{\frac{p+2x}{2x}}$ . Um diese Formel

zu integrieren, setze man  $\sqrt{\frac{p+2x}{2x}} = z$ , so wird  $x = \frac{\frac{1}{2}p}{z^2 - 1}$ ,

$dx = \frac{-pz dz}{(z^2 - 1)^2}$ , und  $ds = \frac{-pz^2 dz}{(z^2 - 1)^2}$ . Durch Zerlegung in einfache Brüche findet man:

$$\frac{z^2}{(z^2 - 1)^2} = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1} \right];$$

daher durch Integration

$$s = \text{Const.} + \frac{1}{4}p \log \frac{z+1}{z-1} + \frac{\frac{1}{2}pz}{z^2 - 1};$$

oder, wenn man für  $z$  seinen Werth in  $x$  setzt;

$$s = \text{Const.} + \frac{1}{4}p \log \frac{\sqrt{p+2x} + \sqrt{2x}}{\sqrt{p+2x} - \sqrt{2x}} + x \sqrt{\frac{p+2x}{2x}}.$$



Soll der Bogen im Scheitel anfangen, so muß für  $x=0$  das Integral Null werden; alsdann erhält man  $\text{Const.} = 0$ , und den parabolischen Bogen vom Scheitel an:

$$s = \frac{1}{4}p \log \frac{\sqrt{p+2x} + \sqrt{2x}}{\sqrt{p+2x} - \sqrt{2x}} + x \sqrt{\frac{p+2x}{-2x}}.$$

Für die Ellipse ist  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $\frac{x dx}{a^2} + \frac{y dy}{b^2} = 0$ , woraus,

$$\text{wenn } \frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2 \text{ gesetzt wird, } ds = dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}}$$

folgt, wovon das Integral eine transcendente Function ist. Bringt man die Gleichung der Ellipse in die Form  $x = a \cos \varphi$ ,  $y = b \sin \varphi$ , so wird

$$ds^2 = (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) d\varphi^2$$

oder

$$ds = a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi} \cdot d\varphi.$$

Schreibt man in den vorstehenden Gleichungen  $-b^2$  statt  $b^2$ , so daß  $e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$  wird, so erhält man das Differential des Bogens der Hyperbel:

$$ds = dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}} = dx \sqrt{\frac{e^2 x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}.$$

Für die Cycloide war  $dx = a(1 - \cos \varphi) d\varphi$ ,  $dy = a \sin \varphi d\varphi$  (§. 50.), folglich

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = 2a^2(1 - \cos \varphi) d\varphi^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi \cdot d\varphi^2;$$

$$\text{oder } ds = -2a \sin \frac{1}{2} \varphi d\varphi, \quad s = \text{const.} + 4a \cos \frac{1}{2} \varphi.$$

Soll der Bogen im Scheitel G der Cycloide anfangen (Fig. 23.), so muß für  $\varphi = \pi$ ,  $s = 0$  werden, woraus  $\text{Const.} = 0$  und  $s = 4a \cos \frac{1}{2} \varphi$  folgt. (In dem Ausdrucke für  $ds$  ist das negative Zeichen gewählt, weil, unter der gemachten Voraussetzung, der Bogen GC abnimmt, während  $\varphi$  wächst.)

Man hatte  $y = a(1 - \cos \varphi) = 2a \sin^2 \frac{1}{2} \varphi$ ; zugleich  $s^2 = 16a^2 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi$ , folglich, durch Elimination von  $\varphi$ ,

$s^2 + 8ay = 16a^2$ ; oder  $s^2 = 8a(2a - y)$ ; d. h. das Quadrat des Bogens GC gleich dem Rechtecke aus dem vierfachen Durchmesser  $8a$  des wälzenden Kreises in den Höhenabstand GK seines Endpunctes C vom Scheitel G.

106. In §. 48. 49. bedeuteten  $a, b$  die Coordinaten des Krümmungsmittelpunctes,  $r$  den Krümmungshalbmesser einer ebenen Curve. Werden aus den Gleichungen 1. 2. 4. 5. der genannten §. die Größen  $x - a, y - b, \frac{dy}{dx}$  eliminirt, so erhält man  $(x - a)db = (y - b)da$  (aus 2. und 5.); folglich aus 4.

$$(y - b)(da^2 + db^2) = -rdb dr.$$

$$(x - a)(da^2 + db^2) = -rda dr.$$

Addirt man die Quadrate dieser Gleichungen, und setzt

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

so kommt  $da^2 + db^2 = dr^2$ .

Das Bogenelement der Curve der Krümmungsmittelpuncte oder der Evolute ( $\sqrt{da^2 + db^2}$ ) ist demnach dem Differentiale  $dr$  des Krümmungshalbmessers gleich, wie es auch sein muß, da der Krümmungshalbmesser der Evolute bei der Abwicklung der Evolute beständig um die Länge des abgewickelten Bogens zunimmt.

Wenn die Gleichung einer Curve in einem endlichen, nicht transcendenten Ausdrucke enthalten ist, so kann man offenbar auch ihren Krümmungshalbmesser und die Coordinaten des Krümmungsmittelpunctes immer genau ausdrücken; und da das Differential des Krümmungshalbmessers zugleich das Bogenelement der Evolute ist, so folgt, daß die Evoluten nicht transcendenten Curven rectificabel sind. So war z. B. für die Evolute der Parabel die Gleichung  $8(a - p)^2 = 27pb^2$  gefunden (§. 49.). Setzt man  $a - p = x, b = y, 27p = 8m$ , so kommt  $my^2 = x^3$ , mithin

$$dy = \frac{8}{27} \cdot \frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{m}}, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \frac{9x}{4m}},$$

also der Bogen

$$s = \frac{8}{27} m \left(1 + \frac{9x}{4m}\right)^{\frac{3}{2}} + \text{Const.}$$

Eben so muß die Cycloide rectificabel sein, wie auch oben gefunden wurde, weil ihre Evolute wieder eine Cycloide ist.

Es werde hier noch bemerkt, wie man den Ausdruck für den Krümmungshalbmesser  $r$  durch Construction, mit Hülfe des unendlich Kleinen, finden kann. Es sei (Fig. 25.)  $AB = ds$  ein Bogenelement,  $CA = r$  der Krümmungshalbmesser, so kann man  $AB$  einem Kreisbogen vom Halbmesser  $r$  gleichsetzen. Es sei  $\varphi$  der Winkel, welchen die Tangente in  $A$  mit der Axe  $x$  bildet, also  $\text{tg } \varphi = \frac{dy}{dx}$ ; so wird  $\varphi + d\varphi$  die Neigung der Tangente in  $B$  gegen die Axe  $x$  sein, und folglich  $d\varphi = BDE$  der Winkel, den die Tangenten in  $A$  und  $B$  mit einander bilden. Dieser Winkel ist aber dem Winkel am Mittelpunkte  $C$  gleich; also  $\angle C = d\varphi$ , und Bogen  $ds = r d\varphi$ .

Nun ist  $\text{tg } \varphi = \frac{dy}{dx}$ , also

$$d\varphi = d\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \cos \varphi^2 = d\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \left(\frac{dx}{ds}\right)^2;$$

mithin 
$$ds = r \cdot \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \cdot d\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

oder 
$$r = \frac{ds^3}{dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)},$$

wie früher gefunden ist.

Den Ausdruck für das Bogenelement einer Curve doppelter Krümmung findet man, indem man wieder an die Stelle eines unendlich kleinen Bogens die Sehne setzt:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

in welchem Ausdrucke die Werthe der Differentiale  $dx, dy, dz$  aus den Gleichungen der Curve eingesetzt werden müssen, wodurch derselbe auf das Differential einer Function von einer veränderlichen Größe gebracht wird, welches sodann integriert werden muß. Man erhält z. B. für die Schraubenlinie, deren Gleichungen  $x = m \cos \varphi$ ,  $y = m \sin \varphi$ ,  $z = n\varphi$  waren (§. 71.)

$$ds = \sqrt{n^2 + m^2} \cdot d\varphi, \quad \text{also} \quad s = \sqrt{n^2 + m^2} \cdot \varphi + \text{Const.}$$

### Quadratur der Flächen.

107. Da ein unendlich kleiner Bogen einer Curve als zusammenfallend mit seiner Sehne betrachtet werden muß, so folgt, daß ein nach allen Richtungen unendlich kleines Element einer stetig gekrümmten Fläche als eben anzusehen ist. Wird dasselbe nämlich durch beliebige Ebenen geschnitten, so fallen alle durch diese Schnitte entstehenden unendlich kleinen Bogen mit ihren Sehnen zusammen. Die Schnitte des Flächenelementes mit beliebigen Ebenen sind mithin als geradlinigt, und folglich ist das ganze Flächenelement als eben zu betrachten.

Berechnet man unter dieser Voraussetzung den Flächenraum des Elementes, und nimmt die Summe aller auf diese Weise berechneten Elemente eines vorgelegten Stückes der Fläche, so erhält man den gesammten Inhalt desselben.

Es seien die rechtwinkligen Coordinaten der Fläche als Functionen zweier veränderlichen Größen  $p$  und  $q$  ausgedrückt, also

$$x = f(p, q), \quad y = \varphi(p, q), \quad z = \psi(p, q).$$

Gehen nun  $p, q$  in  $p + dp, q + dq$  über, so erhält man, mit Weglassung der Glieder höherer Ordnungen

$$dx = a dp + a' dq$$

$$dy = b dp + b' dq$$

$$dz = c dp + c' dq$$

Werden die Quadrate dieser Ausdrücke addirt, so ergibt sich der Ausdruck für einen unendlich kleinen auf der Fläche gezeichneten Bogen  $ds$ , nämlich

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2,$$

wo  $E = a^2 + b^2 + c^2$ ,  $F = aa' + bb' + cc'$ ,  $G = a'^2 + b'^2 + c'^2$  gesetzt ist.

Irgend ein Punkt A der Fläche (Fig. 26.), dessen Coordinaten  $x, y, z$  sind, kann als Durchschnitt zweier in der Fläche liegenden Curven betrachtet werden, von denen die eine entsteht, wenn  $p$  sich ändert, während  $q$  ungeändert bleibt, die andere, wenn  $q$  sich ändert, während  $p$  ungeändert bleibt. Es sei AB das Bogenelement der Curve, für welche  $q$  constant bleibt, so wird die Länge desselben durch  $\sqrt{E} \cdot dp$  ausgedrückt, weil  $dq = 0$  ist. Eben, so sei AC das Element der Curve, für welche  $dp = 0$ , so ist  $\sqrt{G} \cdot dq$  der Ausdruck seiner Länge. Man ziehe aus dem Punkte B, dessen Coordinaten  $x + adp$ ,  $y + bdp$ ,  $z + cdp$  sind, eine Linie BD, für welche wiederum nur  $q$  sich ändert, während der Werth von  $p$ , der für diesen Punkt B  $p + dp$  ist, ungeändert bleibt, und aus C eine Linie CD, für welche  $q + dq$  beständig bleibt, während  $p$  sich ändert.

Beide Linien treffen in dem Punkte D zusammen, für welchen sich  $p$  um  $dp$ ,  $q$  um  $dq$  geändert hat. Um die Länge von BD zu finden; darf man in dem Ausdrücke für AC, d. i.  $\sqrt{G} \cdot dq$ , nur  $p + dp$  statt  $p$  setzen, wodurch man erhält

$$BD = \left( \sqrt{G} + \frac{d\sqrt{G}}{dp} dp \right) dq,$$

also, mit Weglassung der Glieder zweiter und höherer Ordnungen,  $BD = \sqrt{G} \cdot dq = AC$ . Auf ähnliche Weise, wenn man in E  $q + dq$  statt  $q$  setzt, findet man  $CD = \sqrt{E} \cdot dp = AB$ .

Man hat ferner noch

$$AD^2 = E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2.$$

Nun sei der Winkel CAB gleich  $\omega$ , so erhält man

$$AD^2 = AB^2 + 2AB \cdot BD \cdot \cos \omega + BD^2,$$

oder weil  $AB = \sqrt{E} \cdot dp$ ,  $BD = \sqrt{G} \cdot dq$  ist,

$$AD^2 = E dp^2 + 2\sqrt{EG} \cdot \cos \omega \cdot dp \cdot dq + G dq^2.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck für  $AD^2$  mit dem obigen, so

erhält man sofort  $\sqrt{EG} \cdot \cos \omega = F$ ,

woraus sich ergibt

$$\sin \omega = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}.$$

Die Fläche des als eben zu betrachtenden Viereckes  $ABCD$  ist aber gleich  $AB \cdot BD \cdot \sin \omega$ ; folglich gleich

$$\sqrt{E} dp \cdot \sqrt{G} dq \cdot \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}},$$

also gleich  $\sqrt{EG - F^2} \cdot dp dq$ .

Dies ist der allgemeine Ausdruck für ein Element einer stetig gekrümmten Fläche. Integriert man denselben mit Rücksicht auf die Grenzen eines vorgelegten Flächenstückes, so erhält man den Inhalt desselben gleich

$$\iint \sqrt{EG - F^2} \cdot dp dq.$$

108. Gewöhnlich ist für die Fläche eine Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten  $x, y, z$  gegeben. Um in diesem Falle den Ausdruck des Flächenelementes zu erhalten, muß man zwei der Coordinaten, z. B.  $x$  und  $y$  an die Stelle der Größen  $p$  und  $q$  setzen, und die dritte  $z$  als Function derselben betrachten. Demnach hat man

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy,$$

mithin

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right] dx^2 + 2\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) dx dy + \left[1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right] dy^2$$

$$= E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2;$$

$$\text{also } E = 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2, \quad F = \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right), \quad G = 1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2,$$

$$\text{daher } EG - F^2 = 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2;$$

mithin als Ausdruck des Flächenelementes:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \cdot dx dy. \quad a.$$

Werden statt der Coordinaten  $x$  und  $y$  Polarcoordinaten  $r$  und  $\varphi$  in der Ebene  $xy$  zu Grunde gelegt, so daß vermöge der Gleichung der Fläche  $z$  eine Function von  $r$  und  $\varphi$  ist, so hat man:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = f(r, \varphi),$$

$$\text{Demnach ist } dx = \cos \varphi \cdot dr - r \sin \varphi \cdot d\varphi$$

$$dy = \sin \varphi \cdot dr + r \cos \varphi \cdot d\varphi$$

$$dz = \left(\frac{dz}{dr}\right) dr + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right) d\varphi;$$

$$\text{mithin } E = 1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2, \quad F = \frac{dz}{dr} \cdot \frac{dz}{d\varphi}, \quad G = r^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2,$$

$$\text{und } ds^2 = E dr^2 + 2F dr d\varphi + G d\varphi^2;$$

ferner das Flächenelement gleich

$$\sqrt{\left[ \left(1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right) \left(r^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2\right) - \left(\frac{dz}{dr} \cdot \frac{dz}{d\varphi}\right)^2 \right]} dr d\varphi,$$

$$\text{oder } \sqrt{\left[ r^2 + r^2 \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 \right]} \cdot dr d\varphi. \quad b.$$

Werden endlich Polarcoordinaten im Raume zur Bestimmung der Fläche gebraucht, so ist

$$x = r \cos \psi \cos \varphi, \quad y = r \cos \psi \sin \varphi, \quad z = r \sin \psi.$$

Alsdann läßt sich, vermöge der Gleichung der Fläche,  $r$  als eine gegebene Function von  $\varphi$  und  $\psi$  ansehen. Man erhält

$$dx = \left( \frac{dr}{d\varphi} \cos \varphi - r \sin \varphi \right) \cos \psi d\varphi \\ + \left( \frac{dr}{d\psi} \cos \psi - r \sin \psi \right) \cos \varphi d\psi.$$

$$dy = \left( \frac{dr}{d\varphi} \sin \varphi + r \cos \varphi \right) \cos \psi d\varphi \\ + \left( \frac{dr}{d\psi} \cos \psi - r \sin \psi \right) \sin \varphi d\psi.$$

$$dz = \frac{dr}{d\varphi} \sin \psi d\varphi + \left( \frac{dr}{d\psi} \sin \psi + r \cos \psi \right) d\psi.$$

Durch Addition der Quadrate dieser drei Ausdrücke erhält man das Bogenelement

$$ds^2 = E d\varphi^2 + 2F d\varphi d\psi + G d\psi^2,$$

$$\text{wo } E = r^2 \cos^2 \psi + \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2, \quad F = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{dr}{d\psi}, \quad G = r^2 + \left( \frac{dr}{d\psi} \right)^2.$$

Hieraus findet sich

$$EG - F^2 = r^2 \left[ r^2 \cos^2 \psi + \left( \frac{dr}{d\psi} \right)^2 \cos^2 \psi + \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right];$$

mithin der Ausdruck des Flächenelementes:

$$rd\varphi d\psi \sqrt{\left[ r^2 \cos^2 \psi + \left( \frac{dr}{d\psi} \right)^2 \cos^2 \psi + \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right]}. \quad c.$$

Die Formel b. läßt sich mit Vortheil bei Flächen anwenden, die durch Umdrehung entstanden sind. Es sei nämlich  $z$  die Umdrehungsaxe, welche in Hinsicht auf die erzeugende Curve als Abscisse betrachtet werden kann, deren zugehörige Ordinate  $r$  ist. Stellt nun  $f(z, r) = 0$  die Gleichung der erzeugenden Curve vor, so erhält man die Gleichung der Umdrehungsfläche in rechtwinkligen Coordinaten, wenn man statt  $r$ ,  $\sqrt{x^2 + y^2}$  schreibt, also  $f(z, \sqrt{x^2 + y^2}) = 0$ . Behält man aber Polarcoordinaten in der Ebene  $xy$  bei, d. h. setzt man, wie oben,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , so ist  $f(z, r) = 0$  auch als die Gleichung der Umdrehungsfläche zu betrachten, vermöge deren  $z$  unabhängig von  $\varphi$ , also eine



bloße Function von  $r$  ist. Man hat demnach in der Formel b.

$$\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)=0, \quad \text{also}$$

$$r dr d\varphi \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2}$$

als den Ausdruck des Flächenelementes. Diese Formel kann man sofort in Bezug auf  $\varphi$  integrieren, weil  $r$  und  $z$ , mithin auch  $\frac{dz}{dr}$ , unabhängig von  $\varphi$  sind. Integriert man von  $\varphi=0$  bis  $\varphi=2\pi$ , so erhält man den Ausdruck eines ringförmigen Elementes der Fläche gleich

$$2\pi \cdot r dr \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2}.$$

Man bemerke noch, daß  $dr \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2}$  nichts anderes ist, als

der Ausdruck des Bogenelementes  $ds = \sqrt{dr^2 + dz^2}$  der erzeugenden Curve; mithin kann man den Ausdruck des ringförmigen Flächenelementes auch schreiben  $2\pi r \cdot ds$ ; welches Differential nachher in der vorgeschriebenen Ausdehnung zu integrieren ist.

Anmerkung. Die in Vorstehendem angegebenen Flächen-Differentiale müssen zwischen Grenzen integrirt werden, die sich aus den Bedingungen der Aufgabe ergeben. Es sei das Integral  $\iint f(x,y) \cdot dx dy$  zu integrieren nach  $y$  von  $y=\varphi_0 x$  bis  $y=\varphi_1 x$ , wo  $\varphi_0 x$  und  $\varphi_1 x$  zwei gegebene Functionen von  $x$  sind, und sodann nach  $x$  von  $x=x_0$  bis  $x=x_1$ ; so kann man entweder die angezeigten Integrationen unmittelbar vollziehen, oder auch, was oft vortheilhafter ist, folgendermaßen verfahren. Um die erste Integration nach  $y$  zu vollziehen, bei welcher  $x$  als constant angesehen wird, setze man

$$y = \varphi_0 x + (\varphi_1 x - \varphi_0 x)u,$$

so wird, für  $y=\varphi_0 x$ ,  $u=0$ , und für  $y=\varphi_1 x$ ,  $u=1$ . Man

111. Drückt man ein Ellipsoid durch folgende Gleichungen aus:

$$x = a \cos \varphi \cos \psi, \quad y = b \sin \varphi \cos \psi, \quad z = c \sin \psi,$$

$$\text{so kommt } dx = -a \sin \varphi \cos \psi d\varphi - a \cos \varphi \sin \psi d\psi$$

$$dy = b \cos \varphi \cos \psi d\varphi - b \sin \varphi \sin \psi d\psi$$

$$dz = c \cos \psi d\psi;$$

hieraus

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = E d\varphi^2 + 2F d\varphi d\psi + G d\psi^2;$$

in welchen Formeln

$$E = (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) \cos^2 \psi,$$

$$F = (a^2 - b^2) \sin \varphi \cos \varphi \sin \psi \cos \psi,$$

$$G = (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) \sin^2 \psi + c^2 \cos^2 \psi;$$

woraus folgt

$$EG - F^2 =$$

$$[(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) - (a^2 - b^2)^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi] \\ \times (\sin^2 \psi \cos^2 \psi)$$

$$+ (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) c^2 \cdot \cos^2 \psi$$

$$= [a^2 b^2 \sin^2 \psi + (a^2 c^2 \sin^2 \varphi + b^2 c^2 \cos^2 \varphi) \cos^2 \psi] \cos^2 \psi;$$

oder

$$\sqrt{EG - F^2} =$$

$$abc \cdot \cos \psi \sqrt{\left[ \frac{\cos^2 \varphi \cos^2 \psi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \psi}{b^2} + \frac{\sin^2 \psi}{c^2} \right]};$$

mithin als Ausdruck für ein Flächenelement des Ellipsoides:

$$abc \cdot \cos \psi d\varphi d\psi \sqrt{\left[ \frac{\cos^2 \varphi \cos^2 \psi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \psi}{b^2} + \frac{\sin^2 \psi}{c^2} \right]}.$$

Es sei  $a = b$ , oder das Ellipsoid ein durch Umdrehung um die Axe  $c$  entstandenes (ein Sphäroid), so erhält man

$$aac \cdot d\varphi \cdot d\psi \cdot \cos \psi \sqrt{\frac{\cos^2 \psi}{a^2} + \frac{\sin^2 \psi}{c^2}}$$

für das Flächenelement des Sphäroides. Setzt man  $\sin \psi = v$ , so wird das Differential

Integrationen, auf das leichteste auszuführen, setze man

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \cdot u, \quad dy = \sqrt{a^2 - x^2} \cdot du,$$

$$a^2 - x^2 - y^2 = (a^2 - x^2)(1 - u^2),$$

so geht das vorgelegte Integral über in

$$a \int_0^h dx \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = ah \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2} ah \pi;$$

welches doppelt genommen, die verlangte Hälfte einer Kugelzone giebt  $\pi ah$ . Ist  $h = a$ , so erhält man  $a^2 \pi$  als die Oberfläche des vierten Theiles der Kugel.

Aus den allgemeinen Formeln erhält man noch mehrere andere Ausdrücke für das Element der Kugelfläche, z. B. der Ausdruck für das Element einer runden Fläche giebt, da für die Kugel  $z^2 + r^2 = a^2$ , mithin  $\sqrt{dr^2 + dz^2} = \frac{adr}{z}$  ist, für das Ele-

ment dieser Fläche  $\frac{ardrd\phi}{z} = \frac{ardrd\phi}{\sqrt{a^2 - r^2}}$ , oder, wenn man zuerst

in Hinsicht auf  $\phi$  von 0 bis  $2\pi$  integrirt, für eine unendlich schmale Zone zwischen zwei auf der Axe  $z$  senkrechten Ebenen:

$2a\pi \cdot \frac{rdr}{\sqrt{a^2 - r^2}}$ . Integrirt man den Ausdruck von  $r=0$  bis

$r=r$ , so kommt  $2a\pi(a - \sqrt{a^2 - r^2})$ , die Oberfläche des durch den Parallelkreis, in der Entfernung  $\sqrt{a^2 - r^2}$  vom Mittelpunkte, abgeschnittenen Kugelsegmentes.

Eine andere Form für das Differential der Kugelfläche erhält man, wenn man Polarcoordinaten zu Grunde legt. Da

$r=a$  die Gleichung der Kugel ist, so ist  $\left(\frac{dr}{d\phi}\right) = 0$ ,  $\left(\frac{dr}{d\psi}\right) = 0$ ,

mithin geht der Ausdruck c. des Flächenelementes für die Kugel über in:

$$a^2 \cos \psi d\psi d\phi,$$

welcher ein unendlich kleines sphärisches Viereck. ergiebt, dessen Seiten  $ad\psi$  und  $a \cos \psi d\phi$  sind, von denen die erste einem

größten Kreise, die zweite einem darauf senkrechten Parallelkreise vom Halbmesser  $a \cos \psi$  angehört. Integriert man von  $\varphi = \varphi'$  bis  $\varphi = \varphi''$ , und von  $\psi = \psi'$  bis  $\psi = \psi''$ , so erhält man  $a^2(\varphi'' - \varphi')(\sin \psi'' - \sin \psi')$  als Fläche eines Vierecks, welches von zwei einander parallelen ebenen Schnitten, und zwei darauf senkrechten größten Kreisen, die mit einander den Winkel  $\varphi'' - \varphi'$  bilden, eingeschlossen wird. Setzt man z. B.  $\varphi' = 0$ ,  $\varphi'' = 2\pi$ , so erhält man die Kugelzone von der Höhe  $h = a(\sin \psi'' - \sin \psi')$  gleich  $2\pi a h$ , wie bekannt.

110. Die Gleichung  $(z - e)^2 = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}$  stellt einen Regels zweiten Grades vor, dessen Mte in der Mte  $z$ , und dessen Spitze in der Höhe  $e$  über dem Anfange der Coordinaten liegt. Die der Ebene  $xy$  parallelen Schnitte sind, wie man sieht, Ellipsen. Um die Oberfläche dieses Regels zu finden, setze man

$$x = \alpha(e - z) \cos \varphi, \quad y = \beta(e - z) \sin \varphi,$$

welche Annahme mit der Gleichung des Regels übereinstimmt.

Hierdurch erhält man

$$dx = -\alpha \cos \varphi dz - \alpha(e - z) \sin \varphi d\varphi,$$

$$dy = -\beta \sin \varphi dz + \beta(e - z) \cos \varphi d\varphi, \quad dz = dz;$$

mithin

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edz^2 + 2Fdzd\varphi + Gd\varphi^2,$$

wo

$$E = 1 + \alpha^2 \cos^2 \varphi + \beta^2 \sin^2 \varphi,$$

$$F = (e - z) \sin \varphi \cos \varphi (\alpha^2 - \beta^2),$$

$$G = (e - z)^2 (\alpha^2 \sin^2 \varphi + \beta^2 \cos^2 \varphi),$$

mithin

$$EG - F^2 = [(1 + \alpha^2 \cos^2 \varphi + \beta^2 \sin^2 \varphi)(\alpha^2 \sin^2 \varphi + \beta^2 \cos^2 \varphi) - (\alpha^2 - \beta^2)^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi][e - z]^2.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck weiter, so findet sich

$$EG - F^2 = [\alpha^2 \sin^2 \varphi + \beta^2 \cos^2 \varphi + \alpha^2 \beta^2 (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) + 2\alpha^2 \beta^2 (\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi)][e - z]^2,$$

oder  $EG - F^2 = [\alpha^2 \sin^2 \varphi + \beta^2 \cos^2 \varphi + \alpha^2 \beta^2][e - z]^2$ ,  
 weil  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi + 2 \sin \varphi \cos \varphi = (\cos \varphi + \sin \varphi)^2 = 1$ .  
 Demnach erhält man für das Element der Oberfläche des schiefen Kegels

$$\sqrt{EG - F^2} \cdot dz d\varphi = \\ \sqrt{[\alpha^2 \sin^2 \varphi + \beta^2 \cos^2 \varphi + \alpha^2 \beta^2][e - z]} dz d\varphi.$$

Integriert man in Bezug auf  $z$  von  $z=0$  bis  $z=e$ , so erhält man

$$\frac{1}{2} e^2 \int \sqrt{\alpha^2 \sin^2 \varphi + \beta^2 \cos^2 \varphi + \alpha^2 \beta^2} \cdot d\varphi$$

als Ausdruck für die über der Ebene  $xy$ , bis zur Spitze, sich erstreckende Kegelfläche, in welchem das Integral von  $\varphi=0$  bis  $\varphi=2\pi$  genommen werden kann, wenn man die ganze Fläche verlangt, oder von  $\varphi=0$  bis  $\varphi=\frac{1}{2}\pi$ , wenn man nur einen Quadranten verlangt. Setzt man  $\cos 2\varphi = u$ , so wird

$$\cos^2 \varphi = \frac{1+u}{2}, \sin^2 \varphi = \frac{1-u}{2}, d\varphi = \frac{-du}{2\sqrt{1-u^2}}$$

und das Integral geht in folgendes über:

$$-\frac{1}{4} e^2 \int \sqrt{\left[ \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} - \frac{(\alpha^2 - \beta^2)u}{2} + \alpha^2 \beta^2 \right] \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}},$$

welches von  $u=1$  bis  $u=-1$  genommen, den vierten Theil der gesuchten Kegelfläche giebt. Dies Integral ist eine transcendente Function, die derjenigen am nächsten kommt, durch welche der Bogen der Ellipse ausgedrückt wird. Ist  $\alpha^2 = \beta^2$ , so hat man einen geraden Kegel mit kreisförmiger Grundfläche, dessen Oberfläche durch

$$\frac{1}{2} e^2 \cdot \alpha \sqrt{1 + \alpha^2} \cdot \varphi + \text{Const.}$$

ausgedrückt wird. Nimmt man dieses Integral von  $\varphi=0$  bis  $\varphi=2\pi$ , so kommt

$$\alpha \sqrt{1 + \alpha^2} \cdot e^2 \cdot \pi$$

als die Oberfläche des geraden Kegels, von der Höhe  $e$ , dessen Grundfläche ein Kreis vom Halbmesser  $\alpha e$  ist; wie anderweitig bekannt.

111. Drückt man ein Ellipsoid durch folgende Gleichungen aus:

$$x = a \cos \varphi \cos \psi, \quad y = b \sin \varphi \cos \psi, \quad z = c \sin \psi,$$

$$\text{so kommt } dx = -a \sin \varphi \cos \psi d\varphi - a \cos \varphi \sin \psi d\psi$$

$$dy = b \cos \varphi \cos \psi d\varphi - b \sin \varphi \sin \psi d\psi;$$

$$dz = c \cos \psi d\psi;$$

hieraus

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = E d\varphi^2 + 2F d\varphi d\psi + G d\psi^2;$$

in welchen Formeln:

$$E = (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) \cos^2 \psi,$$

$$F = (a^2 - b^2) \sin \varphi \cos \varphi \sin \psi \cos \psi,$$

$$G = (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) \sin^2 \psi + c^2 \cos^2 \psi;$$

$$\text{woraus folgt } EG - F^2 =$$

$$[(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) - (a^2 - b^2)^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi] \\ \times (\sin^2 \psi \cos^2 \psi)$$

$$+ (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) c^2 \cdot \cos^2 \psi$$

$$= [a^2 b^2 \sin^2 \psi + (a^2 c^2 \sin^2 \varphi + b^2 c^2 \cos^2 \varphi) \cos^2 \psi] \cos^2 \psi;$$

oder

$$\sqrt{EG - F^2} =$$

$$abc \cdot \cos \psi \sqrt{\left[ \frac{\cos^2 \varphi \cos^2 \psi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \psi}{b^2} + \frac{\sin^2 \psi}{c^2} \right]};$$

mithin als Ausdruck für ein Flächenelement des Ellipsoids:

$$abc \cdot \cos \psi d\varphi d\psi \sqrt{\left[ \frac{\cos^2 \varphi \cos^2 \psi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \psi}{b^2} + \frac{\sin^2 \psi}{c^2} \right]}.$$

Es sei  $a = b$ , oder das Ellipsoid ein durch Umdrehung um die Axe  $c$  entstandenes (ein Sphäroid), so erhält man

$$aac \cdot d\varphi \cdot d\psi \cdot \cos \psi \sqrt{\frac{\cos^2 \psi}{a^2} + \frac{\sin^2 \psi}{c^2}}$$

für das Flächenelement des Sphäroides. Setzt man  $\sin \psi = v$ , so wird das Differential

$$d\psi \cdot \cos \psi \sqrt{\frac{\cos^2 \psi}{a^2} + \frac{\sin^2 \psi}{c^2}} =$$

$$dv \sqrt{\frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)v^2} = \frac{dv}{a} \sqrt{1 - \frac{c^2 - a^2}{c^2} \cdot v^2}$$

und, wenn  $c^2 - a^2$  positiv, d. h. das Sphäroid durch Umdrehung der Ellipse um ihre große Axe entstanden ist, so hat man,  $\frac{c^2 - a^2}{c^2} = e^2$  gesetzt:

$$\int \frac{dv}{a} \sqrt{1 - e^2 v^2} = \frac{1}{2ae} \left[ ev \sqrt{1 - e^2 v^2} + \arcsin ev \right].$$

Demnach erhält man für die Zone des Sphäroids, von  $\psi = 0$  bis  $\psi = \psi$  und von  $\varphi = 0$  bis  $\varphi = 2\pi$ , den Ausdruck:

$$\frac{ac\pi}{e} \left[ e \sin \psi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \psi} + \arcsin(e \sin \psi) \right].$$

Für  $\psi = \frac{1}{2}\pi$ ,  $\sin \psi = 1$ , erhält man die Hälfte der Oberfläche des Sphäroids gleich

$$\frac{ac\pi}{e} \left[ e \sqrt{1 - e^2} + \arcsin e \right],$$

oder 
$$\pi \left( a^2 + \frac{ac^2}{\sqrt{c^2 - a^2}} \arcsin \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c} \right).$$

Ist das Sphäroid durch Umdrehung der Ellipse um die kleinere Axe entstanden, also  $c^2 - a^2$  negativ, so wird der Ausdruck der Fläche logarithmisch. Will man von diesen Formeln zur Kugel übergehen, für welche  $c^2 - a^2 = 0$  ist, so muß man bemerken, daß, für  $e = 0$ ,  $\frac{\arcsin(e \sin \psi)}{e} = \sin \psi$  wird.

### Cubatur der Körper.

112. Einen von einer beliebigen Fläche begrenzten körperlichen Raum denke man sich in unendlich kleine rechtwinkliche Parallelepipede zerlegt, deren Kanten  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  den Coordinaten

parallel sind; so giebt die Summe der Inhalte aller dieser Parallelepipede, d. h. das Integral

$$\iiint dx dy dz$$

zwischen den durch die Beschaffenheit der Grenzfläche bestimmten Grenzen genommen, den gesuchten körperlichen Inhalt. Integriert man z. B. in Hinsicht auf  $z$ , so erhält man  $z \cdot dx dy$ , d. i. das Volumen eines Prismas von der Grundfläche  $dx dy$ , Höhe  $z$ ; wird hierauf  $z$  mit Hilfe der Gleichung der Fläche als Function von  $x$  und  $y$  ausgedrückt, so giebt das doppelte Integral

$$\iint z dx dy \quad a.$$

das verlangte Volumen.

Sind allgemein die Coordinaten  $x, y, z$  als Functionen von  $p$  und  $q$  gegeben, so ist, nach §. 107.  $\sqrt{EG - F^2} \cdot dp dq$  der Ausdruck eines Elementes der Oberfläche. Es sei  $i$  die Neigung dieses Elementes, oder, was eben so viel ist, die Neigung der an dasselbe gelegten Berührungsebene, gegen die Ebene  $xy$ , so ist bekanntlich  $\cos i = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}$ . Multiplicirt

man das Flächenelement mit  $\cos i$ , so erhält man seine Projection auf die Ebene  $xy$ ; und multiplicirt man diese mit  $z$ , so erhält man das Volumen eines über dieser Grundfläche befindlichen Elementar-Prismas. Nun ist allgemein

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy;$$

setzt man in diese Gleichung die Werthe von  $dx, dy, dz$ , aus §. 107., so erhält man

$$cdp + c'dq = \frac{dz}{dx}(adp + a'dq) + \left(\frac{dz}{dy}\right)(bdp + b'dq);$$

und da das Verhältniß  $\frac{dp}{dq}$  gänzlich unbestimmt bleiben muß, während diese Gleichung immer Statt findet; so zerfällt dieselbe in folgende zwei Gleichungen:



$$a\left(\frac{dz}{dx}\right) + b\left(\frac{dz}{dy}\right) = c, \quad a'\left(\frac{dz}{dx}\right) + b'\left(\frac{dz}{dy}\right) = c',$$

aus denen man findet:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{c'b - cb'}{a'b - ab'}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{c'a - ca'}{b'a - ba'}.$$

Die Gleichung der Berührungsebene in dem Punkte  $x, y, z$  ist, wie bekannt:

$$w - z = \left(\frac{dz}{dx}\right)(u - x) + \left(\frac{dz}{dy}\right)(v - y).$$

Setzt man in dieselbe die obigen Werthe von  $\left(\frac{dz}{dx}\right)$  und  $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ , so kommt:

$$(b'c - bc')(u - x) + (c'a - ca')(v - y) + (a'b - ab')(w - z) = 0.$$

Man bemerke noch, daß

$$(a'b - ab')^2 + (c'a - ca')^2 + (b'c - bc')^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2 = EG - F^2$$

ist. Demnach ist, für die Neigung  $i$  der Berührungsebene gegen die Ebene  $xy$ ,

$$\cos i = \frac{a'b - ab'}{\sqrt{EG - F^2}};$$

und folglich

$$\sqrt{EG - F^2} \cdot dp dq \cdot z \cos i = z(a'b - ab') dp dq$$

der Ausdruck des Elementarprisma's, oder das Volumen des Körpers gleich

$$\iint z \left( \frac{dy}{dp} \cdot \frac{dx}{dq} - \frac{dy}{dq} \cdot \frac{dx}{dp} \right) dp dq. \quad b.$$

Sind z. B. statt  $x$  und  $y$  Polarcoordinaten in der Ebene gewählt, so daß  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , so hat man

$$\left(\frac{dx}{dr}\right) = \cos \varphi, \quad \left(\frac{dy}{dr}\right) = \sin \varphi, \quad \left(\frac{dx}{d\varphi}\right) = -r \sin \varphi,$$

$\left(\frac{dy}{d\varphi}\right) = r \cos \varphi$ ; demnach geht die vorstehende Formel, wenn

man statt  $p$  und  $q$ ,  $\varphi$  und  $r$  schreibt, über in

$$\iint z r dr d\varphi, \quad \text{c.}$$

welche man auch leicht unmittelbar finden kann, indem  $r dr d\varphi$  ein rectanguläres Flächenelement in der Ebene  $xy$  darstellt, welches mit  $z$  multiplicirt, das Elementar-Prisma von der Höhe  $z$  giebt.

Eine andere Darstellung des körperlichen Elementes erhält man, wenn man das Flächenelement in seinen senkrechten Abstand vom Anfange der Coordinaten multiplicirt. Nimmt man den dritten Theil des Productes, so hat man den Inhalt einer Pyramide, deren Grundfläche das Flächenelement, und deren Spitze der Anfang der Coordinaten ist. Aus der oben gegebenen Gleichung der Tangentialebene ersieht man, daß der senkrechte Abstand dieser Ebene vom Anfange der Coordinaten folgender ist:

$$\frac{(b'c - bc')x + (c'a - ca')y + (a'b - ab')z}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Wird derselbe mit dem dritten Theile des Flächenelementes, d. i.  $\frac{1}{3}\sqrt{EG - F^2} \cdot dp dq$  multiplicirt, so erhält man folgenden Ausdruck des gesuchten Volumens, welcher dasselbe nicht als eine Summe paralleler Prismen, sondern im Anfange der Coordinaten zusammenstoßender Pyramiden darstellt:

$$\frac{1}{3} \iint [(b'c - bc')x + (c'a - ca')y + (a'b - ab')z] dp dq. \quad \text{d.}$$

In diesem Ausdrücke ist, nach §. 107.,  $a = \frac{dx}{dp}$ ,  $a' = \frac{dx}{dq}$ , u. s. f.

Sind z. B. Polarcoordinaten gewählt, wie in §. 108. c., so hat man  $p = \varphi$ ,  $q = \psi$  zu setzen, und danach die Werthe von  $a$ ,  $b$ , u. s. f. aus den dortigen Ausdrücken für  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  zu entnehmen. Man findet daraus

$$(b'c - bc')x + (c'a - ca')y + (a'b - ab')z = r^2 \cos \psi,$$

und folglich den Ausdruck des Volumens

$$\frac{1}{3} \iint r^3 \cos \psi d\psi d\varphi. \quad \text{e.}$$

Denselben Ausdruck kann man auch auf folgende Art aus der

Formel c. des §. 108. ableiten. Man denke sich innerhalb des zu berechnenden Volumens ein beliebiges Stück einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt in den Anfang der Coordinaten fällt, und deren Halbmesser  $r$  ist; und drücke nach der genannten Formel ein Element  $w$  dieser Kugelfläche durch  $r^2 \cos \psi d\varphi d\psi$  aus. Denkt man sich nun eine zweite concentrische Kugelfläche vom Halbmesser  $r + dr$ , so kann man das Element der Pyramide, deren Kanten die durch die vier Ecken des unendlich kleinen Vierecks  $w$  gehenden Halbmesser sind, offenbar als ein rechtwinkliches Parallelepipedum von der Grundfläche  $w$  und der Höhe  $dr$  betrachten, und demnach durch  $r^2 \cos \psi d\varphi d\psi dr$  ausdrücken. Integriert man diesen Ausdruck zuerst nach  $r$ , so erhält man den obigen Ausdruck der Elementar-Pyramide, nämlich  $\frac{1}{3} r^3 \cos \psi d\varphi d\psi$ .

113. Setzt man, für ein Ellipsoid,

$$x = a \cos \varphi \cos \psi, \quad y = b \sin \varphi \cos \psi, \quad z = c \sin \psi,$$

so erhält man aus den Ausdrücken für  $dx, dy, dz$  (§. 111.)

$$\frac{dx}{d\varphi} \cdot \frac{dy}{d\psi} - \frac{dx}{d\psi} \cdot \frac{dy}{d\varphi} = ab \sin \psi \cos \psi;$$

und mithin, als Ausdruck des Elementar-Prismas über der Ebene  $xy$ , dessen Höhe  $z$  ist, nach §. 112. b.

$$abc \cdot \sin \psi^2 \cos \psi \cdot d\psi d\varphi.$$

Integriert man z. B. diesen Ausdruck in Hinsicht auf  $\psi$  von 0 bis  $\psi$ , so kommt  $\frac{1}{3} abc \cdot \sin \psi^3 \cdot d\varphi$ . Um diese Formel richtig zu verstehen, sei (Fig. 27.) BCD der Durchschnitt des Ellipsoids mit der Ebene  $xy$ ; für alle Punkte desselben ist  $z = 0$ , also  $\psi = 0$ , und  $x = a \cos \varphi$ ,  $y = a \sin \varphi$ . Man ziehe aus dem Mittelpunkte A einen Kreis mit dem Halbmesser  $AD = a$ , in der Ebene BCD; nehme in der Ellipse BCD einen Punkt K, dessen Coordinaten  $x = AG = a \cos \varphi$ ,  $y = GK = b \sin \varphi$  sind, und verlängere die Ordinate GK bis zu ihrem Durchschnitte E mit dem Kreise. Zieht man noch AE, so ist  $\angle EAD = \varphi$ . Ändert sich nun  $\varphi$  um  $EAE' = d\varphi$ , so sei K' der dem geänderten  $\varphi$  entsprechende

Punct der Ellipse, und es werde  $AK'$  gezogen. Ferner sei  $LMG$  die Projection der Ellipse, welche entsteht, wenn das Ellipsoid durch eine Ebene parallel mit  $xy$  in der Höhe  $z = c \sin \psi$  geschnitten wird; daher  $AL = a \cos \psi$ ,  $AN = b \cos \psi$  die Hauptachsen dieser Ellipse darstellen. Alsdann wird der über der Grundfläche  $MM'K'K$  befindliche körperliche Raum des Ellipsoids durch die Formel  $\frac{1}{2} abc \sin \psi^2 d\psi$  ausgedrückt. Läßt man ferner  $\psi$  ungeändert, und integriert von  $\psi = 0$  bis  $\psi'$ , so erhält man  $\frac{1}{2} abc \sin \psi^2 \cdot \psi$  als Ausdruck des über der Grundfläche  $LMKD$  befindlichen Raumes. Integriert man z. B. bis  $\psi = \frac{1}{2}\pi$ , so ist  $\frac{1}{2} abc \cdot \frac{\pi}{2}$  der Raum über  $KAD$ , und nimmt man  $\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$ , so ist  $\frac{1}{2} abc \cdot \pi$  als der Rauminhalt des über dem Quadranten  $CAD$  liegenden 8ten Theiles des Ellipsoids, mithin ist  $\frac{1}{2} abc \cdot \pi$  der Inhalt des ganzen Ellipsoids.

114. Es sei  $(z-e)^2 = \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2$  die Gleichung eines elliptischen Kegels; man sucht den Inhalt desjenigen Stückes, welches zwischen der Ebene  $zy$  und einem derselben parallel in dem Abstände  $x$  gelegten Schnitt, über der Ebene  $xy$  bis zur Spitze hin, sich erstreckt. Zu dem Ende suche man das Integral

$$V = \iint (e - \sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2}) dx dy,$$

genommen von  $y=0$  bis  $y = \frac{\sqrt{e^2 - \alpha^2 x^2}}{\beta}$ , und von  $x=0$

bis  $x=x$ , welches, wie man sieht, die Hälfte des verlangten Inhalts giebt. Man setze  $\beta y = \sqrt{e^2 - \alpha^2 x^2} u$ ,

$\beta dy = \sqrt{e^2 - \alpha^2 x^2} \cdot du$ ; so kommt

$$\frac{dV}{dx} = \int (e - \sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2}) dy =$$

$$\frac{e\sqrt{e^2 - \alpha^2 x^2}}{\beta} - \frac{\sqrt{e^2 - \alpha^2 x^2}}{\beta} \int_0^1 du \sqrt{\alpha^2 x^2 + (e^2 - \alpha^2 x^2)u^2}.$$

Nun ist aber  $\int du \sqrt{A^2 + B^2 u^2} =$

$$\frac{1}{2B} (Bu \sqrt{A^2 + B^2 u^2} + A^2 \log [Bu + \sqrt{A^2 + B^2 u^2}]),$$

die Curve  $y = fx$  zwischen den Grenzen der Integration keine Spitzen hat, sondern stetig fortgeht.

Zur Berechnung des vorgelegten Integrals bedient man sich am häufigsten gleich weit absteigender Ordinaten, d. h. man berechnet die Werthe von  $fx$  für

$$x = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1.$$

Bezeichnet man diese Werthe zur Abkürzung mit  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ , und setzt nach dem Obigen

$$\psi x = x \left(x - \frac{1}{n}\right) \left(x - \frac{2}{n}\right) \dots (x-1);$$

so erhält man

$$\varphi x = \frac{A_0}{\psi'(0)} \cdot \frac{\psi x}{x} + \dots + \frac{A_{\mu}}{\psi'(\mu)} \cdot \frac{\psi x}{x - \frac{\mu}{n}} + \dots + \frac{A_n}{\psi'(n)} \cdot \frac{\psi x}{x-1};$$

in welcher Formel der Werth, den  $\psi x$  für  $x = \frac{\mu}{n}$  erhält, zur Abkürzung mit  $\psi'(\mu)$  bezeichnet ist. Integriert man von 0 bis 1, so erhält  $\frac{1}{\psi'(\mu)} \int_0^1 \frac{\psi x}{x - \frac{\mu}{n}}$  offenbar einen endlichen be-

stimmten Werth, der mit  $K_{\mu}$  bezeichnet werde; und es ergibt sich der gesuchte Näherungs-Werth von  $\int_0^1 fx dx$ , nämlich:

$$\int_0^1 \varphi x dx = K_0 A_0 + K_1 A_1 + K_2 A_2 + \dots + K_n A_n.$$

3. B. es seien drei Ordinaten, für  $x = 0, \frac{1}{2}, 1$  berechnet, so ist

$$\psi x = x \left(x - \frac{1}{2}\right) (x-1) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

Man erhält  $\psi'(0) = \frac{1}{2}$ ,  $\psi'(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$ ,  $\psi'(1) = \frac{1}{2}$ ; ferner

$$\int_0^1 \frac{\psi x}{x} dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{1}{12};$$

$$\int_0^1 \frac{\psi x}{x - \frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{6}; \quad \int_0^1 \frac{\psi x}{x-1} dx = \frac{1}{12};$$

$$\frac{1}{3}q^3 \log \frac{1+\sqrt{1-q^2}}{q} + \frac{1}{3} \arcsin q - \frac{1}{3}q\sqrt{1-q^2}.$$

Demnach findet man:

$$V = \frac{1}{2} \frac{e^3}{\alpha\beta} \left[ \frac{1}{3} \arcsin q + \frac{2}{3} q \sqrt{1-q^2} - \frac{1}{3} q^3 \log \frac{1+\sqrt{1-q^2}}{q} \right],$$

und, wenn man für  $q$  wiederum seinen Werth  $\frac{\alpha x}{e}$  setzt:

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^3}{\alpha\beta} \left[ \frac{1}{3} \arcsin \frac{\alpha x}{e} + \frac{2}{3} \frac{\alpha x \sqrt{e^2 - \alpha^2 x^2}}{e^2} - \frac{1}{3} \frac{\alpha^3 x^3}{e^3} \log \frac{e + \sqrt{e^2 - \alpha^2 x^2}}{\alpha x} \right],$$

welches Integral für  $x=0$  verschwindet, weil  $x^3 \log \alpha x$  für  $x=0$ , Null ist.

Verlangt man das ganze über dem elliptischen Quadranten liegende Volumen des Kegels, so ist  $x = \frac{e}{\alpha}$  zu setzen, wodurch

$V = \frac{1}{12} \cdot \frac{e^3 \pi}{\alpha\beta}$ , mithin, für den ganzen Kegel von der Grundfläche  $\frac{e}{\alpha} \cdot \frac{e}{\beta} \cdot \pi$  und der Höhe  $e$ ,  $4V = \frac{1}{3} \cdot \frac{e^3 \pi}{\alpha\beta}$  erhalten wird, wie bekannt ist.

### Mechanische Quadratur.

115. Da man häufig nicht vermag, ein vorgelegtes Integral auf eine für die Rechnung brauchbare Weise allgemein darzustellen, so bedarf man einer Methode, um wenigstens den angenäherten Zahlenwerth eines solchen Integrals, zwischen gegebenen Grenzen, zu finden. Man nennt dieselbe gewöhnlich die mechanische Quadratur, in so fern dadurch, vermittelt der Berechnung einiger Zahlenwerthe von  $fx$ , eine Curve quadriert wird, deren Ordinate  $fx$  ist.

Es sei  $fx$  eine beliebige Function von  $x$ , welche zwischen den (endlichen) Grenzen  $a$  und  $b$  von  $x$  endlich und stetig bleibt; man verlangt den Integralwerth  $\int_a^b fx \, dx$ .

Es werde  $x = a + (b-a)u$  gesetzt, so kommt, weil für  $x = a$ ,  $u = 0$ , und für  $x = b$ ,  $u = 1$ , ferner  $dx = (b-a)du$  ist:

$$\int_a^b fx \cdot dx = (b-a) \int_0^1 f(a + (b-a)u) \cdot du.$$

Man kan demnach das vorgelegte Integral allemal auf die Grenzen 0 und 1 bringen; was zur Vereinfachung als geschehen angenommen werde, so daß es sich um die Berechnung des Integrals  $\int_0^1 fx \cdot dx$  handelt.

Man berechne den Werth von  $fx$  für mehrere auf einander folgende Werthe von  $x$ , zwischen 0 und 1, welche mit  $a_1, a_2, \dots a_n$  bezeichnet werden mögen, und suche eine rationale ganze Function  $\varphi x$  von  $x$ , welche mit der Function  $fx$  die  $n$  Werthe  $fa_1, fa_2, \dots fa_n$  gemein habe, so daß sei:

$$\varphi a_1 = fa_1, \varphi a_2 = fa_2, \dots, \varphi a_n = fa_n.$$

Um dieselbe zu finden, bilde man das Polynom des  $n$ ten Grades:

$$\psi x = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \dots (x - a_n).$$

Stellt nun  $\varphi x$  ein beliebiges Polynom vom  $n$ ten Grade vor, so erhält man durch Zerlegung in einfache Brüche, nach §. 90., Formel 6.,

$$\frac{\varphi x}{\psi x} = \frac{\varphi a_1}{\psi' a_1 (x - a_1)} + \frac{\varphi a_2}{\psi' a_2 (x - a_2)} + \dots + \frac{\varphi a_n}{\psi' a_n (x - a_n)}.$$

Man setze  $\varphi a_1 = fa_1, \varphi a_2 = fa_2, \dots, \varphi a_n = fa_n$ ; so ist

$$\varphi x = \psi x \left[ \frac{fa_1}{\psi' a_1 (x - a_1)} + \frac{fa_2}{\psi' a_2 (x - a_2)} + \dots + \frac{fa_n}{\psi' a_n (x - a_n)} \right]$$

ein Polynom vom  $n$ ten Grade, welches offenbar für

$$x = a_1, a_2, \dots, a_n$$

die Werthe  $fa_1, fa_2, \dots, fa_n$

erhält, wie verlangt wurde.

Da der Unterschied der beiden endlichen und stetigen Functionen  $fx$  und  $\varphi x$ , zwischen 0 und 1,  $n$ mal der Null gleich wird, so ist einleuchtend, daß derselbe überhaupt überall sehr klein sein wird, wenn die Anzahl der berechneten Werthe von  $x$  beträchtlich groß und ihre Abstände klein genug sind. Wenn man also statt des Integrals  $\int_0^1 fx \, dx$  das Integral  $\int_0^1 \varphi x \, dx$  berech-

net, so begeht man einen Fehler, welcher durch  $\int_0^1 (fx - \varphi x) \, dx$  ausgedrückt wird, und mithin einem Mittelwerthe von  $fx - \varphi x$  gleich ist, der sich, je kleiner die Abstände der berechneten Ordinaten werden, desto mehr der Null nähern muß. — Geometrisch gesprochen, kommt das Verfahren darauf hinaus, an die Stelle der Curve  $y = fx$  eine Curve  $y = \varphi x$  zu setzen, in deren Gleichung  $\varphi x$  eine rationale-ganze Function von  $x$  ist, und welche mit der vorigen Curve eine gewisse Anzahl von Puncten gemein hat. Dieses kann aber nur dann mit Erfolg geschehen, wenn



die Curve  $y = fx$  zwischen den Grenzen der Integration keine Spitzen hat, sondern stetig fortgeht.

Zur Berechnung des vorgelegten Integrals bedient man sich am häufigsten gleich weit absteigender Ordinaten, d. h. man berechnet die Werthe von  $fx$  für

$$x = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1.$$

Bezeichnet man diese Werthe zur Abkürzung mit  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ , und setzt nach dem Obigen

$$\psi x = x \left(x - \frac{1}{n}\right) \left(x - \frac{2}{n}\right) \dots (x-1);$$

so erhält man

$$\varphi x = \frac{A_0}{\psi'(0)} \cdot \frac{\psi x}{x} + \dots + \frac{A_\mu}{\psi'(\mu)} \cdot \frac{\psi x}{x - \frac{\mu}{n}} + \dots + \frac{A_n}{\psi'(n)} \cdot \frac{\psi x}{x-1};$$

in welcher Formel der Werth, den  $\psi x$  für  $x = \frac{\mu}{n}$  erhält, zur Abkürzung mit  $\psi'(\mu)$  bezeichnet ist. Integriert man von 0 bis 1, so erhält  $\frac{1}{\psi'(\mu)} \int_0^1 \frac{\psi x}{x - \frac{\mu}{n}}$  offenbar einen endlichen be-

stimmten Werth, der mit  $K_\mu$  bezeichnet werde; und es ergibt sich der gesuchte Näherungs-Werth von  $\int_0^1 fx dx$ , nämlich:

$$\int_0^1 \varphi x dx = K_0 A_0 + K_1 A_1 + K_2 A_2 + \dots + K_n A_n.$$

3. B. es seien drei Ordinaten, für  $x = 0, \frac{1}{2}, 1$  berechnet, so ist

$$\psi x = x \left(x - \frac{1}{2}\right) (x-1) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

Man erhält  $\psi'(0) = \frac{1}{2}$ ,  $\psi'(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$ ,  $\psi'(1) = \frac{1}{2}$ ; ferner

$$\int_0^1 \frac{\psi x}{x} dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{1}{12};$$

$$\int_0^1 \frac{\psi x}{x - \frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{8}; \quad \int_0^1 \frac{\psi x}{x-1} dx = \frac{1}{12};$$

mithin  $K_0 = \frac{1}{2}$ ;  $K_1 = \frac{1}{2}$ ;  $K_2 = \frac{1}{2}$ ; und folglich

$$\frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2$$

als den Näherungswerth des Integrals  $\int_0^1 f x dx$ .

116. Die Berechnung der Coefficienten  $K_0, K_1, \dots K_n$  ist, wie man sieht, mit keiner Schwierigkeit verknüpft, und läßt sich noch durch die Bemerkung abkürzen, daß allgemein  $K_0 = K_n$ ,  $K_1 = K_{n-1}$ , überhaupt  $K_\mu = K_{n-\mu}$  ist.

$$\text{Da nämlich} \quad K_\mu = \frac{1}{\psi'(\mu)} \int_0^1 \frac{\psi x}{x - \frac{\mu}{n}} dx,$$

$$\text{so ist} \quad K_{n-\mu} = \frac{1}{\psi'(n-\mu)} \int_0^1 \frac{\psi x}{x - \frac{n-\mu}{n}} dx.$$

Nun ist, wie man leicht findet, wenn man in der Function  $\psi x$ ,  $1-x$  statt  $x$  schreibt,

$$\psi(1-x) = (1-x) \left( \frac{n-1}{n} - x \right) \left( \frac{n-2}{n} - x \right) \dots (-x) = (-1)^{n+1} \psi x;$$

$$\text{folglich} \quad \psi'(1-x) = (-1)^n \psi' x; \quad \text{oder} \quad \psi' x = (-1)^n \psi'(1-x);$$

daher, für  $x = \frac{\mu}{n}$ ,  $\psi'(\mu) = (-1)^n \psi'(n-\mu)$ . Ferner ist, wenn man statt  $x$ ,  $1-u$  schreibt,

$$\int_0^1 \frac{\psi x}{x - \frac{\mu}{n}} dx = - \int_1^0 \frac{\psi(1-u)}{1-u - \frac{\mu}{n}} du = \int_0^1 \frac{\psi(1-u) du}{\frac{n-\mu}{n} - u},$$

welcher Werth, weil

$$\frac{\psi(1-u)}{\frac{n-\mu}{n} - u} = (-1)^n \frac{\psi u}{u - \frac{n-\mu}{n}}; \quad \text{in. } (-1)^n \int_0^1 \frac{\psi u}{u - \frac{n-\mu}{n}} du$$

übergeht. Daher ist

$$\frac{1}{\psi'(\mu)} \int_0^1 \frac{\psi x}{x - \frac{\mu}{n}} dx = \frac{1}{\psi'(n-\mu)} \int_0^1 \frac{\psi x}{x - \frac{n-\mu}{n}} dx$$

oder  $K_\mu = K_{n-\mu}$ ; so z. B. w. ! Man bemerke ferner, daß

$$K_0 + K_1 + K_2 + \dots + K_n = \int_0^1 \psi x \, dx \left[ \frac{1}{\psi'(0) \cdot x} + \frac{1}{\psi'(1) \left(x - \frac{1}{n}\right)} + \dots + \frac{1}{\psi'(n)(x-1)} \right].$$

Die in Klammern eingeschlossene Summe von Brüchen ist aber offenbar gleich  $\frac{1}{\psi x}$ ; folglich hat man noch

$$K_0 + K_1 + \dots + K_n = \int_0^1 dx = 1.$$

Folgende Tafel enthält die zur Anwendung der Methode nöthigen Zahlenwerthe der Coefficienten:

Anzahl d. berechneten Ordinaten. Näherungswerth.  $\left(A_n = f\left(\frac{x}{n}\right)\right)$

2.	$\frac{A_0 + A_1}{2}$
3.	$\frac{A_0 + 4A_1 + A_2}{6}$
4.	$\frac{A_0 + 3A_1 + 3A_2 + A_3}{8}$
5.	$\frac{7A_0 + 32A_1 + 12A_2 + 32A_3 + 7A_4}{90}$
6.	$\frac{19A_0 + 75A_1 + 50A_2 + 50A_3 + 75A_4 + 19A_5}{288}$
7.	$\frac{41A_0 + 216A_1 + 27A_2 + 272A_3 + 27A_4 + 216A_5 + 41A_6}{840}$
8.	$\frac{751A_0 + 3577A_1 + 1323A_2 + 2989A_3 + \dots}{17280}$
9.	$\frac{989A_0 + 5888A_1 - 928A_2 + 10496A_3 - 4540A_4 + \dots}{2835}$
10.	$\frac{2857A_0 + 15741A_1 + 1080A_2 + 19344A_3 + 5778A_4 + \dots}{89600}$
11.	$\frac{16067A_0 + 106300A_1 - 48525A_2 + 272400A_3 - 260550A_4 + 427368A_5 + \dots}{598752}$

Die in den Formeln 8—11. weggelassenen Glieder kann man

leicht aus den angegebenen ergänzen, wenn man auf die Symmetrie achtet, welche in diesen Ausdrücken, wie allgemein vorhin bewiesen worden, Statt finden muß.

Um nur ein sehr einfaches Beispiel zu geben, soll der Werth

von  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x}$  berechnet werden, welcher, wie bekannt, gleich  $\log \text{nat } \frac{3}{2} = 0,4054651 \dots$  ist. Man setze  $x = \frac{1}{2}u$ , so ist das vorgelegte Integral gleich  $\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{du}{1+\frac{1}{2}u} = \int_0^1 \frac{du}{2+u}$ . Berechnet

man  $\frac{1}{2+u}$  für  $u=0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ ; so erhält man die Werthe

$$\frac{1}{2}, \frac{4}{9}, \frac{2}{3}, \frac{4}{11}, \frac{1}{3},$$

und mithin, nach der obigen Tafel, für 5 Ordinaten, den Näherungswerth:

$$\frac{7(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + 32(\frac{4}{9} + \frac{4}{11}) + 12 \cdot \frac{2}{3}}{90} = 0,4054656 \dots$$

der bis auf 6 Decimalstellen richtig ist.

117. Obgleich die eben behandelte Methode, der mechanischen Quadratur am häufigsten angewendet wird, weil sie für die Rechnung sehr bequem ist, so ist es doch angemessen, hier noch einer anderen Methode zu erwähnen, nach welcher nicht, wie vorhin, gleich weit abstehende Ordinaten berechnet, sondern die zu berechnenden Ordinaten, nach einem gewissen, sogleich anzugebenden, Gesichtspunkte, auf die für die Annäherung vortheilhafteste Weise ausgewählt werden. Diese sehr interessante Methode ist von Gauß erfunden, die hier folgende Herleitung derselben aber von Jacobi gegeben worden.

Es sei, wie in §. 115.

$$\psi x = (x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_n);$$

$$\text{und } \varphi x = \psi x \left[ \frac{fa_1}{\psi' a_1(x-a_1)} + \frac{fa_2}{\psi' a_2(x-a_2)} + \dots + \frac{fa_n}{\psi' a_n(x-a_n)} \right]$$

diejenige Function, welche mit der gegebenen  $f_x$ , deren Integral von 0 bis 1 gesucht wird, die  $n$  Werthe  $fa_1, fa_2, \dots fa_n$  gemein hat. Man setze

$$f_x = \varphi_x + V \cdot \psi_x,$$

so wird der Fehler der angenäherten Integration durch

$$\int_0^1 f_x dx - \int_0^1 \varphi_x dx = \int_0^1 V \psi_x \cdot dx$$

ausgedrückt.

Um einen allgemeinen Ausdruck dieses Fehlers, und dadurch ein Maass der Annäherung zu erhalten, denke man sich  $f_x$  in einer Reihe nach Potenzen von  $x$  entwickelt, nämlich:

$$f_x = C + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n + \dots$$

Wird diese Reihe durch  $\psi_x$  dividirt, so ist, nach der Formel

$$f_x = \varphi_x + V \cdot \psi_x$$

$V$  der Quotient,  $\varphi_x$  der Rest der Division. Um  $V$  zu erhalten, entwickle man den Bruch  $\frac{1}{\psi_x}$  nach fallenden Potenzen von  $x$ , nämlich

$$\frac{1}{\psi_x} = \frac{B}{x^n} + \frac{B_1}{x^{n+1}} + \frac{B_2}{x^{n+2}} + \dots + \frac{B_r}{x^{n+r}} + \dots \text{ in inf.},$$

multiplizire diese Reihe mit der Reihe für  $f_x$  und lasse alle Glieder weg, welche negative Potenzen von  $x$  enthalten; so ist  $V$  der Inbegriff der übrigen Glieder. (Die Glieder mit negativen Potenzen von  $x$  stellen dem ächten Bruche  $\frac{\varphi_x}{\psi_x}$ , in eine Reihe entwickelt, dar.) Man findet dadurch

$$\begin{aligned} V = & C_n B + C_{n+1} B_1 + C_{n+2} B_2 + \dots \\ & + [C_{n+1} B + C_{n+2} B_1 + C_{n+3} B_2 + \dots] x \\ & + [C_{n+2} B + C_{n+3} B_1 + C_{n+4} B_2 + \dots] x^2 \\ & + \dots \text{ in inf.} \end{aligned}$$

oder, nach den Coefficienten  $C$  geordnet:

$$V = C_n B + C_{n+1} (Bx + B_1) + C_{n+2} (Bx^2 + B_1 x + B_2) + \dots,$$

eine Reihe, deren Gesetz leicht zu übersehen ist.

Daher ist der Fehler der Integration

$$\int_0^1 V \psi x dx = C_n B \int_0^1 \psi x dx + C_{n+1} \int_0^1 (Bx + B_1) \psi x dx \\ + C_{n+2} \int_0^1 (Bx^2 + B_1 x + B_1) \psi x dx + \dots \text{ in inf.}$$

Nun lassen sich die Werthe  $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$  zwischen 0 und 1 so wählen, daß die Integrale

$$\int \psi x dx, \int x \psi x dx, \int x^2 \psi x dx, \dots \int x^{n-1} \psi x dx,$$

zwischen den Grenzen 0 und 1 genommen, sämmtlich Null werden. Alsdann fallen die Coefficienten  $C_n, C_{n+1}, C_{n+2}, \dots C_{2n-2}$  aus dem obigen Ausdrucke des Fehlers hinweg, so daß der Fehler nur noch von den nachfolgenden Coefficienten der Reihe  $fx$ , nämlich  $C_{2n}, C_{2n+1}, u. s. f.$  abhängt. Dies ist der Gesichtspunct, nach welchem die zu berechnenden Ordinaten gewählt werden sollen.

118. Wird in der Formel für  $\int u dv$ , §. 97.,  $u = x^n$ ,  $v = \int \psi x dx$  gesetzt, so kommt

$$\int x^n \psi x dx = x^n \int \psi x dx - \mu x^{n-1} \int_2 \psi x dx^2 + \mu \cdot \mu - 1 \cdot x^{n-2} \int_3 \psi x dx^3 \\ \dots + (-1)^\mu \mu! \int_{\mu+1} \psi x dx^{\mu+1}.$$

Aus dieser Formel folgt, daß, wenn man  $\psi x$  so bestimmen kann, daß die vielfachen Integrale von  $\psi x$ , vom 1ten bis zum  $n$ ten, nämlich

$$\int \psi x dx, \int_2 \psi x dx^2, \dots \int_n \psi x dx^n$$

zwischen den Grenzen 0 und 1 verschwinden, alsdann auch die sämmtlichen Integrale

$$\int_0^1 \psi x dx, \int_0^1 x \psi x dx, \dots \int_0^1 x^{n-1} \psi x dx$$

Null sind, wie verlangt wird.

Nun sei z. B.  $\int_0^1 \psi x dx = x(x-1) = x^2 - x$ , so ist offenbar

$$\int_0^1 \psi x dx = 0. \quad \text{Allgemeiner sei}$$

$$\int_n \psi x dx^n = (x^2 - x)^n$$

so ist  $\int_{n-1} \psi x dx^{n-1} = n(x^2 - x)^{n-1}(2x-1) = \frac{d(x^2 - x)^n}{dx}$

$$\int_{n-2} \psi x dx^{n-2} = n \cdot n-1 (x^2 - x)^{n-2} (2x-1)^2 + 2n(x^2 - x)^{n-1}$$

oder  $\int_{n-2} \psi x dx^{n-2} = \frac{d^2(x^2 - x)^n}{dx^2},$

$$\int_{n-3} \psi x dx^{n-3} = \frac{d^3(x^2 - x)^n}{dx^3},$$

u. s. f., endlich

$$\int \psi x dx = \frac{d^{n-1}(x^2 - x)^n}{dx^{n-1}}$$

$$\psi x = \frac{d^n(x^2 - x)^n}{dx^n}.$$

Die Ableitungen von  $(x^2 - x)^n$ , von der ersten bis zur  $(n-1)$ ten, enthalten offenbar sämtlich den Factor  $x^2 - x$ , und werden also Null für  $x=0$  und für  $x=1$ ; also werden auch die Integrale  $\int \psi x dx, \dots \int_n \psi x dx^n$ , bei der letzten Integration von 0 bis 1 genommen, alle Null, und mithin verschwinden auch die Integrale:

$$\int_0^1 \psi x dx, \int_0^1 x \psi x dx, \dots \int_0^1 x^{n-1} \psi x dx,$$

wie verlangt wurde.

Man hat, nach dem binomischen Satze

$$(x^2 - x)^n = x^{2n} - n_1 x^{2n-1} + n_2 x^{2n-2} - n_3 x^{2n-3} + \dots$$

folglich erhält man durch  $n$ malige Differentiation, wenn man nachher noch durch den Coefficienten  $\frac{2n!}{n!}$  des höchsten Gliedes dividirt,

$$\frac{n!}{2n!} \frac{d^n(x^2 - x)^n}{dx^n} =$$

$$x^n - \frac{n! n! (2n-1)!}{1! (n-1)! (n-2)! 2n!} x^{n-1} + \frac{n! n! (2n-2)!}{2! (n-2)! (n-2)! 2n!} x^{n-2} \\ - \frac{n! n! (2n-3)!}{3! (n-3)! (n-3)! 2n!} x^{n-3} + \dots$$

Dieses Polynom setze man  $=\psi x$ ; so geben die Wurzeln der Gleichung  $\psi x=0$ ,

welche sämmtlich positive, ungleiche ächte Brüche sind, wie aus der Entstehung der Gleichung  $\psi x=0$  leicht zu schließen ist, die verlangten Werthe von

$$a_1, a_2, a_3, \dots a_n,$$

zu welchen die Ordinaten

$$fa_1, fa_2, fa_3, \dots fa_n$$

berechnet werden müssen.

Man setze noch

$$\int_0^x \frac{\psi x dx}{\psi' a_1 (x-a_1)} = K_1, \text{ u. s. f., allgemein } \int_0^1 \frac{\psi x dx}{\psi' a_\mu (x-a_\mu)} = K_\mu;$$

so ist der angenäherte Werth des Integrals  $\int_0^1 f x dx$  folgender:

$$\int_0^1 \psi x dx = K_1 fa_1 + K_2 fa_2 + \dots + K_n fa_n.$$

119. Werden z. B. nur zwei Ordinaten berechnet, so ist

$$\psi x = \frac{1}{12} \cdot \frac{d^2 (x^2 - x)^2}{dx^2} = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

also sind  $a_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{12}}$  und  $a_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12}}$

die Abscissen, zu welchen die Ordinaten berechnet werden müssen.

Man findet daraus leicht  $K_1 = K_2 = \frac{1}{2}$ , so daß der angenäherte Werth des Integrals folgender ist:

$$\frac{fa_1 + fa_2}{2}.$$

Nach den obigen Formeln ist folgende Tafel berechnet, welche zur Anwendung der Methode dient, wofern nicht mehr als 5 Ordinaten gebraucht werden:

Anzahl der Ordinaten.

$$\begin{array}{l} 2. \quad a_1 = 0,21132487. \quad K_1 = K_2 = \frac{1}{2}. \\ \quad a_2 = 0,78867513. \end{array}$$



3.  $a_1 = 0,11270167.$   $K_1 = K_3 = \frac{5}{18}.$   
 $a_2 = 0,5.$   $K_2 = \frac{4}{9}.$   
 $a_3 = 0,88729833.$
4.  $a_1 = 0,06943184.$   
 $a_2 = 0,33000948.$   $K_1 = K_4 = 0,17392742.$   
 $a_3 = 0,66999052.$   $K_2 = K_5 = 0,32607258.$   
 $a_4 = 0,93056816.$
5.  $a_1 = 0,04691008.$   $K_1 = K_3 = 0,11846344.$   
 $a_2 = 0,23076534.$   $K_2 = K_4 = 0,23931434.$   
 $a_3 = 0,5.$   $K_5 = 0,28444444.$   
 $a_4 = 0,76923466.$   
 $a_5 = 0,95308992.$

Um nur ein Beispiel zu geben, welches fast gar keine Rechnung erfordert, vergleiche man die Werthe, welche das schon eben be-

rechnete Integral  $\int_0^1 \frac{dx}{2+x}$  erhält, wenn nur zwei Ordinaten, so-

wohl nach der vorigen, als der jetzt angegebenen Methode, in Rechnung gebracht werden. Nach der vorigen Methode ist dieser Werth

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{12} = 0,416\ldots;$$

wo nur die erste Decimalstelle richtig ist; nach der zweiten Methode erhält man denselben gleich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{12}}} + \frac{1}{2 + \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{12}}} \right] &= \frac{1}{5 - \sqrt{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{5 + \sqrt{\frac{1}{3}}} \\ &= \frac{1}{3} \frac{5}{7} = 0,405405\ldots; \end{aligned}$$

also vier richtige Decimalstellen.

## Anhang über einige bestimmte Integrale.

120. Durch sehr mannigfaltige Mittel, zu welchen besonders die Anwendung des Satzes in §. 102. gehört, hat man eine beträchtliche Anzahl von bestimmten Integralen, d. h. Werthe von Integralen, die zwischen bestimmten Grenzen genommen sind, gefunden, und zwar, was sehr zu bemerken ist, ohne einen allgemeinen Ausdruck dieser Integrale, für veränderliche Grenzen, zu besitzen, oder wenigstens zu Hülfe zu nehmen. Ein Beispiel dieser Art ist schon in §. 108. gegeben worden; es folgen hier noch einige.

Man sucht den Werth von  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ , der offenbar eine positive endliche Zahl sein muß, die mit A bezeichnet werde, so

$$\text{daß} \quad A = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cdot dx. \quad 1.$$

Schreibt man  $y$  statt  $x$ , und sieht  $u$  als veränderlich,  $y$  als beständig an, so wird  $y du$  statt  $dx$  zu setzen sein, und da für  $u=0$ ,  $x=0$  und für  $u=\infty$ ,  $x=\infty$  wird, vorausgesetzt, daß  $y$  positiv ist, so erhält man auch

$$A = \int_0^{\infty} e^{-y^2 u^2} y du. \quad 2.$$

Man multiplicire beide Werthe von A mit  $e^{-y^2} dy$ , und integrir von  $y=0$  bis  $y=\infty$ , so erhält man

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \cdot \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \int_0^{\infty} e^{-y^2 u^2} y du. \quad 3.$$

In dieser Gleichung ist offenbar der Ausdruck links  $= A^2$ .

Rechts aber darf man, nach §. 102., die Ordnung der Integrationen umkehren, also zuerst nach  $y$ , sodann nach  $u$  integrieren. Dadurch erhält man aus 3.

$$A^2 = \int_0^\infty du \int_0^\infty e^{-y^2(1+u^2)} y dy.$$

Nun ist,  $y^2 = z$  gesetzt,

$$\int_0^\infty e^{-y^2(1+u^2)} y dy = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-z(1+u^2)} dz,$$

und 
$$\int_0^\infty e^{-z(1+u^2)} dz = \frac{1 - e^{-z(1+u^2)}}{1+u^2},$$

folglich 
$$\int_0^\infty e^{-z(1+u^2)} dz = \frac{1}{1+u^2},$$

daher 
$$A^2 = \int_0^\infty \frac{du}{2(1+u^2)} = \frac{1}{2}\pi;$$

und 
$$A = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

121. Es sei  $y = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos \alpha x dx$ , 1.

$\alpha$  eine beliebige reelle Zahl, so erhält man durch Differentiation nach  $\alpha$ ,

$$\frac{dy}{d\alpha} = - \int_0^\infty e^{-x^2} \sin \alpha x \cdot x dx. \quad 2.$$

Nun findet man aber, durch theilweise Integration:

$$\int e^{-x^2} \sin \alpha x \cdot x dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \sin \alpha x + \frac{1}{2} \alpha e^{-x^2} \cos \alpha x \cdot dx. \quad 3.$$

Werden die Integrale in 3. von  $x=0$  bis  $x=\infty$  genommen, so ist  $e^{-x^2} \sin \alpha x$  an den Grenzen Null; daher erhält man, wegen 1. und 2.

$$\frac{dy}{d\alpha} + \frac{1}{2} \alpha y = 0; \quad 4.$$

mithin  $\frac{dy}{y} + \frac{1}{2} \alpha d\alpha = 0$ , oder  $\log y = \text{const.} - \frac{1}{4} \alpha^2$ . 5.

Für  $\alpha=0$  wird, nach dem vorigen §.  $y = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ , folglich

$\log \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \text{const.}$ , also, nach Wegschaffung der Logarithmen:

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos \alpha x \cdot dx, \quad 6.$$

welches der verlangte Integralwerth ist.

Es sei  $A = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos x dx$ ,  $B = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx$ , 7.

$\alpha$  reell und positiv. Man erhält leicht durch theilweise Integration:

$$\left. \begin{aligned} \int e^{-\alpha x} \cos x dx &= e^{-\alpha x} \sin x + \alpha \int e^{-\alpha x} \sin x dx. \\ \int e^{-\alpha x} \sin x dx &= -e^{-\alpha x} \cos x - \alpha \int e^{-\alpha x} \cos x dx. \end{aligned} \right\} 8.$$

Werden die Integrale zwischen den Grenzen 0 und  $\infty$  genommen, so wird  $e^{-\alpha x} \sin x = 0$  für  $x=0$ ,  $x=\infty$ , und  $-e^{-\alpha x} \cos x = 0$ , für  $x=\infty$ , und  $= -1$  für  $x=0$ ; daher folgt aus 8.

$$A = \alpha B, \quad B + \alpha A = 1,$$

folglich  $B = \frac{1}{1+\alpha^2}$ ,  $A = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}$ ; also

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx = \frac{1}{1+\alpha^2}, \quad \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos x dx = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}. \quad 9.$$

Nun integriere man wieder vorstehende Integrale nach  $\alpha$ , von 0 bis  $\alpha$ , so kann man links zuerst die Integration nach  $\alpha$  vollziehen, und erhält, weil

$$\int_0^{\alpha} e^{-\alpha x} d\alpha = \frac{1-e^{-\alpha x}}{x},$$

$$\int_0^{\infty} \sin x dx \frac{(1-e^{-\alpha x})}{x} = \text{arc tg } \alpha, \quad 10.$$

$$\int_0^{\infty} \cos x dx \frac{(1-e^{-\alpha x})}{x} = \frac{1}{2} \log(1+\alpha^2). \quad 11.$$

Setzt man in dem ersten dieser Integrale  $\alpha$  unendlich groß, also  $e^{-\alpha x} = 0$ ,  $\text{arc tg } \alpha = \frac{1}{2}\pi$ , so kommt das bemerkenswerthe Integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad 12.$$

122. Es werde ferner der Integralwerth

$$z = \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot \frac{dx}{b^2 + x^2} \quad 1.$$

gesucht, worin  $\alpha$  wieder eine positive, von  $x$  unabhängige Größe ist. Nimmt man die Ableitung zweimal nach  $\alpha$ , so kommt

$$\frac{dz}{d\alpha} = \int_0^{\infty} \cos \alpha x \cdot \frac{dx}{b^2 + x^2} \quad 2.$$

$$\frac{d^2 z}{d\alpha^2} = - \int_0^{\infty} \sin \alpha x \cdot \frac{x dx}{b^2 + x^2}. \quad 3.$$

Man multiplicire 1. mit  $b^2$ , und ziehe 3. von dem Producte ab, so kommt:

$$b^2 z - \frac{d^2 z}{d\alpha^2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x \cdot dx}{b^2 + x^2} \left( \frac{b^2}{x} + x \right) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x \cdot dx}{x}.$$

Es sei  $\alpha x = y$ , so wird  $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ , also, weil für  $x=0$ ,  $y=0$  und für  $x=\infty$ ,  $y=\infty$ ,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2} \quad (\S. 121.)$$

folglich 
$$b^2 z - \frac{d^2 z}{d\alpha^2} = \frac{\pi}{2}. \quad 4.$$

Man setze  $b^2 z - \frac{\pi}{2} = b^2 u$ , so wird  $\frac{d^2 z}{d\alpha^2} = \frac{d^2 u}{d\alpha^2}$ , mithin aus 4.

$$\frac{d^2 u}{d\alpha^2} = b^2 u. \quad 5.$$

In dieser Gleichung schreibe man  $\frac{\beta}{b}$  statt  $\alpha$ , also  $\frac{1}{b^2} d\beta^2$  statt  $d\alpha^2$ , so kommt folgende:

$$\frac{d^2 u}{d\beta^2} = u, \quad 6.$$

welcher der Ausdruck  $u = Ae^{\beta} + Be^{-\beta}$ , mit den willkürlichen Constanten A und B, Genüge leistet (vgl. §. 31., am Schlusse, oder auch §. 139.). Schreibt man wieder  $b\alpha$  statt  $\beta$ , so kommt

$$u = A e^{b\alpha} + B e^{-b\alpha} \quad 7.$$

als das Integral von 5. Hieraus folgt

$$\frac{du}{d\alpha} = \frac{dz}{d\alpha} = b(Ae^{b\alpha} - Be^{-b\alpha}); \quad 8.$$

folglich muß der Werth des Integrals 2. in vorstehender Form (8.) enthalten sein. Um die Constanten A und B zu bestimmen, bemerke man erstens, daß das Integral 2. offenbar nicht größer sein kann, als  $\int_0^\infty \frac{dx}{b^2 + x^2}$ , d. i.  $\frac{\pi}{2b}$ , wie groß auch  $\alpha$  sei. Wäre nun in 8. A nicht Null, so würde das Glied  $Ae^{b\alpha}$  und mit ihm der ganze Werth von  $\frac{dz}{d\alpha}$  für sehr große Werthe von  $\alpha$  über alle Grenzen hinaus wachsen. Da dieses nicht zulässig ist, so muß  $A=0$  sein. Ferner erhält man für  $\alpha=0$ ,  $\frac{dz}{d\alpha} = \frac{\pi}{2b} = -bB$ , wodurch B bestimmt ist.

Es ist demnach gefunden:

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x \cdot dx}{b^2 + x^2} = \frac{\pi}{2b} \cdot e^{-b\alpha}. \quad 9.$$

Multipliziert man auf beiden Seiten mit  $d\alpha$ , und integriert von 0 bis  $\alpha$ , so kommt, weil

$$\int_0^\alpha \cos \alpha x \cdot d\alpha = \frac{\sin \alpha x}{x}, \quad \int_0^\alpha e^{-b\alpha} d\alpha = \frac{1 - e^{-b\alpha}}{b} \quad \text{ist,}$$

$$z = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x \cdot dx}{x(b^2 + x^2)} = \frac{\pi}{2b^2} (1 - e^{-b\alpha}). \quad 10.$$

123. Eine der merkwürdigsten transcendenten Functionen ist diejenige, welche mit  $\Gamma_p$  bezeichnet zu werden pflegt, und die in folgendem Integrale enthalten ist:

$$\Gamma_p = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{p-1} dx. \quad 1.$$

Man findet zuerst durch theilweise Integration:

$$\int e^{-x} x^p dx = -e^{-x} x^p + p \int e^{-x} x^{p-1} dx.$$

Nun sei  $p$  eine reelle positive Zahl, so ist  $e^{-x}x^p = 0$  für  $x=0$  und für  $x=\infty$ . Nimmt man also die beiden Integrale in vorstehender Formel von 0 bis  $\infty$ , so kommt, vorausgesetzt, daß  $p$  positiv ist,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^p dx = p \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$$

oder, nach der angenommenen Bezeichnung,

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma p. \quad 2.$$

Es sei  $\alpha$  eine beliebige positive Zahl; man schreibe in 1.  $\alpha x$  statt  $x$ , so bleiben die Grenzen der Integration ungeändert, und man erhält:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} (\alpha x)^{p-1} \alpha dx = \alpha^p \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} x^{p-1} dx = \Gamma p,$$

oder 
$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} x^{p-1} dx = \frac{\Gamma p}{\alpha^p}. \quad 3.$$

Demnach ist auch, in so fern  $1+z$  positiv bleibt,

$$\int_0^{\infty} e^{-(1+z)x} x^{p-1} dx = \frac{\Gamma p}{(1+z)^p}. \quad 4.$$

Diese Gleichung werde auf beiden Seiten mit  $z^{q-1} dz$  multiplicirt, und sodann von  $z=0$  bis  $z=\infty$  integrirt, so kommt, wenn links zuerst nach  $z$  integrirt wird,

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \cdot e^{-xz} z^{q-1} dz = \Gamma q \cdot \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{p-q-1} dx = \Gamma q \cdot \Gamma(p-q); \quad 5.$$

weil 
$$\int_0^{\infty} e^{-xz} z^{q-1} dz = \frac{\Gamma q}{x^q}$$

ist. ( $q$  und  $p-q$  müssen positiv sein, wie  $p$ ). Indem man aber auch auf der rechten Seite der Gleichung 4. mit  $z^{q-1} dz$  multiplicirt, und hierauf integrirt, so kommt:

$$\Gamma p \cdot \int_0^{\infty} \frac{z^{q-1} dz}{(1+z)^p} = \Gamma q \cdot \Gamma(p-q).$$

In dieser Gleichung setze man  $p = q + r$  und dividire auf beiden Seiten mit  $\Gamma p = \Gamma(q + r)$ ; so kommt

$$\int_0^\infty \frac{z^{q-1} dz}{(1+z)^{q+r}} = \frac{\Gamma q \cdot \Gamma r}{\Gamma(q+r)}. \quad 5.$$

Dieser merkwürdigen Gleichung, durch welche die von zwei Elementen  $q$  und  $r$  abhängige transcendente Function auf der linken Seite, auf eine sehr einfache Verbindung dreier Functionen  $\Gamma$ , deren jede nur von einem Elemente abhängt, zurückgeführt wird, giebt man häufig auch folgende, etwas veränderte Gestalt:

Es sei  $z = \frac{x}{1-x}$ , so wird  $x = 0$  für  $z = 0$  und  $x = 1$  für

$z = \infty$ ; ferner  $1+z = \frac{1}{1-x}$ ,  $dz = \frac{dx}{(1-x)^2}$ . Werden diese

Werthe in 5. gesetzt, und 0 und 1 als Grenzen der Integration, wie gehörrig, genommen, so kommt:

$$\int_0^1 (1-x)^{r-1} x^{q-1} dx = \frac{\Gamma q \cdot \Gamma r}{\Gamma(q+r)}. \quad 6.$$

124. Es sei  $n$  eine positive ganze Zahl; man setze die Reihe

$$1 + \cos \varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \dots + \cos n\varphi = S. \quad 1.$$

Die Summation dieser Reihe wird nachher gebraucht werden, um noch eine Eigenschaft der Function  $\Gamma$  herzuleiten.

Wird obige Reihe mit  $2 \cos \varphi$  multiplicirt, so kommt

$$2 \cos \varphi + 2 \cos \varphi^2 + 2 \cos \varphi \cos 2\varphi + \dots + 2 \cos \varphi \cos n\varphi = 2S \cos \varphi. \quad 2.$$

Nun ist  $2 \cos \varphi \cos \mu\varphi = \cos(\mu-1)\varphi + \cos(\mu+1)\varphi$ ;

mithin  $2 \cos \varphi^2 = 1 + \cos 2\varphi$ ;  $2 \cos \varphi \cos 2\varphi = \cos \varphi + \cos 3\varphi$ ;

$2 \cos \varphi \cos 3\varphi = \cos 2\varphi + \cos 4\varphi$ ; u. s. w.

$2 \cos \varphi \cos (n-1)\varphi = \cos (n-2)\varphi + \cos n\varphi$ ;

$2 \cos \varphi \cos n\varphi = \cos (n-1)\varphi + \cos (n+1)\varphi$ .

Setzt man diese Werthe in 2., so erhält man, wie leicht zu finden ist, auf der linken Seite die Reihe  $S$  doppelt, und noch einige Glieder, so daß folgende Gleichung entsteht:



$$2S + \cos \varphi + \cos(n+1)\varphi - \cos n\varphi - 1 = 2S \cos \varphi,$$

$$\text{oder } 2S = 1 + \frac{\cos n\varphi - \cos(n+1)\varphi}{1 - \cos \varphi} = 1 + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi};$$

$$\text{oder } S = \frac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\varphi}{2\sin \frac{1}{2}\varphi}. \quad 3.$$

Multipliziert man die Reihe 1. auf beiden Seiten mit  $d\varphi$ , und integriert man  $\varphi = \pi$  bis  $\varphi = \varphi$ , so kommt

$$\int_{\pi}^{\varphi} S d\varphi = \varphi - \pi + \sin \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} + \frac{\sin 4\varphi}{4} \dots + \frac{\sin n\varphi}{n}.$$

Man setze

$$\sin \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} \dots + \frac{\sin n\varphi}{n} = U, \quad 4.$$

$$\text{so wird } \int_{\pi}^{\varphi} S d\varphi = \varphi - \pi + U. \quad 5.$$

Der Werth von  $S$  aus 3. giebt durch Integration:

$$\int_{\pi}^{\varphi} S d\varphi = \frac{1}{2}(\varphi - \pi) + \int_{\pi}^{\varphi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\varphi}{2\sin \frac{1}{2}\varphi} d\varphi.$$

Man findet aber durch theilweise Integration, weil

$$d\left(\frac{1}{\sin \frac{1}{2}\varphi}\right) = -\frac{\cos \frac{1}{2}\varphi d\varphi}{2\sin^2 \frac{1}{2}\varphi} \quad \text{ist,}$$

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{\varphi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\varphi}{2\sin \frac{1}{2}\varphi} d\varphi = \\ -\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\varphi}{(2n+1)\sin \frac{1}{2}\varphi} - \int_{\pi}^{\varphi} \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\varphi}{(2n+1)2} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}\varphi}{\sin^2 \frac{1}{2}\varphi} d\varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also } \int_{\pi}^{\varphi} S d\varphi = \frac{1}{2}(\varphi - \pi) - \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\varphi}{(2n+1)\sin \frac{1}{2}\varphi} \\ - \int_{\pi}^{\varphi} \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\varphi}{(2n+1)2} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}\varphi}{\sin^2 \frac{1}{2}\varphi} d\varphi. \quad 6. \end{aligned}$$

So lange  $\varphi$  sich innerhalb der Grenzen 0 und  $2\pi$  befindet, wird  $\sin \frac{1}{2}\varphi$  nicht Null, bleibt also der Quotient  $\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi}$  eine endliche Größe.

Ferner ist  $\frac{\cos \frac{1}{2}\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi^2}$  beständig positiv, wenn  $\varphi$  zwischen 0 und  $\pi$  liegt.

Bezeichnet man daher mit  $G$  den größten Werth, welchen  $\cos(n+\frac{1}{2})\varphi$  zwischen den Grenzen der Integration  $\pi$  und  $\varphi'$  erlangt ( $\varphi'$  zwischen 0 und  $\pi$  angenommen), und mit  $K$  den kleinsten, so ist für alle Werthe von  $\varphi$  zwischen  $\pi$  und  $\varphi'$

$$G \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi^2} > \cos(n+\frac{1}{2})\varphi \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi^2}$$

und 
$$K \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi^2} < \cos(n+\frac{1}{2})\varphi \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi^2};$$

folglich liegt der Werth des Integrals

$$\int_{\pi}^{\varphi'} \cos(n+\frac{1}{2})\varphi \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi^2} d\varphi$$

zwischen  $G \int_{\pi}^{\varphi'} \frac{\cos \frac{1}{2}\varphi d\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi^2} = -2G \left( \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\varphi'} - 1 \right)$

und  $K \int_{\pi}^{\varphi'} \frac{\cos \frac{1}{2}\varphi d\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi^2} = -2K \left( \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\varphi'} - 1 \right).$

Wird daher mit  $\cos \psi$  ein Mittelwerth, den  $\cos(n+\frac{1}{2})\varphi$  zwischen  $\pi$  und  $\varphi'$  erhält, bezeichnet, so ist

$$\int_{\pi}^{\varphi'} \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\varphi}{2n+1} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi^2} d\varphi = \frac{-2 \cos \psi}{2n+1} \left( \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\varphi'} - 1 \right);$$

mithin nähert sich dieses Integral, wenn  $\varphi'$  zwischen 0 und  $\pi$  liegt, mit wachsendem  $n$  der Null. Offenbar nähert sich auch

der Quotient  $\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\varphi'}{(2n+1)\sin \frac{1}{2}\varphi'}$  mit wachsendem  $n$  der Null,

und folglich erhält man, für  $n = \infty$ , aus 6., wenn statt der Grenze  $\varphi'$  wieder, wie vorhin, bloß  $\varphi$  geschrieben wird:

$$\int_{\pi}^{\varphi} S d\varphi = \frac{1}{2}(\varphi - \pi). \quad 7.$$

Dieselbe Formel gilt auch, wenn  $\varphi$  zwischen  $\pi$  und  $2\pi$  liegt, was auf ganz ähnliche Weise bewiesen wird. Durch Vergleichung der Formeln 5. und 7. ergibt sich weiter:

$$\varphi - \pi + U = \frac{1}{2}(\varphi - \pi), \text{ oder } U = \frac{\pi - \varphi}{2},$$

d. i.

$$\sin \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} + \dots + \frac{\sin n\varphi}{n} + \dots \text{ in inf.} = \frac{\pi - \varphi}{2}, \quad 6.$$

in welcher Formel  $\varphi$  zwischen 0 und  $2\pi$  liegen muß. Nähme man auf der linken Seite  $\varphi$  zwischen anderen Grenzen, z. B.  $2\pi$  und  $4\pi$ , so erhielte man offenbar nur den nämlichen Werth, welcher sich nach Weglassung von  $2\pi$  ergeben haben würde; so daß wenn man  $\varphi$  auf der linken Seite über  $2\pi$  hinaus beliebig wachsen läßt, zwischen zwei auf einander folgenden Vielfachen von  $2\pi$  beständig die nämlichen Werthe der Reihe, wie zwischen 0 und  $2\pi$ , wiederkehren. An den Grenzen 0 und  $2\pi$  ist aber die Summe  $\frac{\pi - \varphi}{2}$  nicht richtig; denn die Reihe ist für beide Werthe 0, während der obige Ausdruck ihrer Summe für  $\varphi = 0$ ,  $\frac{\pi}{2}$ , und für  $\varphi = 2\pi$ ,  $-\frac{\pi}{2}$  giebt, welche Werthe unrichtig sind. Dagegen erhält man z. B. für  $\varphi = \pi$  auf beiden Seiten Null, wie erforderlich ist. Daß übrigens die Reihe für alle zwischen 0 und  $2\pi$  liegenden Werthe von  $\varphi$  auch convergirt, ließe sich zwar auch noch nachträglich beweisen, indessen würde der Beweis auf eine bloße Wiederholung der Herleitung hinauskommen, in welcher die Convergenz schon begründet ist. Nämlich der Ausdruck 6. stellt die Summe  $U + \varphi - \pi$  (vgl. 4. 5.) für jeden beliebigen Werth von  $n$  genau dar; derselbe nähert sich aber, wie bewiesen, mit wachsendem  $n$  dem Werthe  $\frac{\varphi - \pi}{2}$ . Addirt man also eine hinreichend große Anzahl von Gliedern der Reihe  $\sin \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} + \dots$ , so kommt die Summe  $U$  dem Werthe  $\frac{\pi - \varphi}{2}$  immer näher, d. h. die Reihe convergirt gegen ihren angegebenen Gesamtwert  $\frac{\pi - \varphi}{2}$ , w. z. b. w.

125. Da bekanntlich

$$2 \cos a\varphi \sin n\varphi = \sin(n+a)\varphi + \sin(n-a)\varphi,$$

$$\text{so ist } 2 \int_0^\varphi \cos a\varphi \sin n\varphi d\varphi = \frac{1 - \cos(n+a)\varphi}{n+a} + \frac{1 - \cos(n-a)\varphi}{n-a},$$

also wenn von 0 bis  $2\pi$  integrirt wird, da, wenn  $n$  eine ganze Zahl,  $\cos(n \pm a)2\pi = \cos 2a\pi$  ist,

$$2 \int_0^{2\pi} \cos a\varphi \sin n\varphi d\varphi = \frac{2n}{n^2 - a^2} (1 - \cos 2a\pi);$$

oder:

$$\frac{1}{1 - \cos 2a\pi} \int_0^{2\pi} \cos a\varphi \cdot \frac{\sin n\varphi}{n} \cdot d\varphi = \frac{1}{n^2 - a^2}.$$

Giebt man in dieser Gleichung der Zahl  $n$  die Werthe 1, 2, 3, u. s. f. bis  $n$ , und addirt die dadurch entstandenen Gleichungen,

$$\text{so kommt: } \frac{1}{1 - \cos 2a\pi} \int_0^{2\pi} \cos a\varphi \cdot U \cdot d\varphi =$$

$$\frac{1}{1 - a^2} + \frac{1}{2^2 - a^2} + \frac{1}{3^2 - a^2} + \dots + \frac{1}{n^2 - a^2},$$

wo  $U$  das nämliche bedeutet, wie in der Formel 4. des vorigen §. Wird nun  $n = \infty$  gesetzt, so wird für alle zwischen 0 und  $2\pi$ , also zwischen den Grenzen des vorstehenden Integrals befindlichen Werthe,  $U = \frac{\pi - \varphi}{2}$ . Dieses gilt zwar nicht für die

Grenzen 0 und  $2\pi$  selbst; allein es ist leicht einzusehen, daß der Fehler, welcher begangen wird, wenn man  $\frac{\pi - \varphi}{2}$  für  $U$

setzt, kleiner als jede gegebene Größe, d. h. gar kein Fehler ist. Sind nämlich  $v$  und  $w$  zwei beliebig kleine positive Größen,

$$\text{so ist } \int_0^{2\pi} \cos a\varphi \cdot U d\varphi =$$

$$\int_0^v \cos a\varphi \cdot U d\varphi + \int_v^{2\pi-w} \cos a\varphi \cdot \frac{\pi - \varphi}{2} d\varphi + \int_{2\pi-w}^{2\pi} \cos a\varphi \cdot U \cdot d\varphi$$

offenbar nur unendlich wenig von

$$\int_0^{2\pi} \cos a\varphi \cdot \frac{\pi-\varphi}{2} d\varphi =$$

$$\int_0^{\pi} \cos a\varphi \cdot \frac{\pi-\varphi}{2} d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} \cos a\varphi \cdot \frac{\pi-\varphi}{2} d\varphi + \int_{2\pi-\pi}^{2\pi} \cos a\varphi \cdot \frac{\pi-\varphi}{2} d\varphi$$

verschieden; mithin darf gesetzt werden:

$$\int_0^{2\pi} \cos a\varphi \cdot U d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos a\varphi \cdot \frac{\pi-\varphi}{2} \cdot d\varphi.$$

Demnach ist

$$\frac{1}{1-\cos 2a\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos a\varphi \cdot \frac{\pi-\varphi}{2} d\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - a^2}. \quad 2.$$

Nun findet man aber durch theilweise Integration:

$$\int_0^{\pi} \cos a\varphi \cdot (\pi-\varphi) d\varphi = \frac{1-\cos a\pi}{a^2} + \frac{(\pi-\varphi) \sin a\varphi}{a},$$

mithin

$$\int_0^{2\pi} \cos a\varphi \cdot \frac{\pi-\varphi}{2} \cdot d\varphi = \frac{1-\cos 2a\pi}{2a^2} - \frac{\pi \sin 2a\pi}{2a}; \quad 3.$$

folglich, wegen 2.,

$$\frac{1}{2a^2} - \frac{\pi}{2a} \cdot \frac{\sin 2a\pi}{1-\cos 2a\pi} = \sum \frac{1}{n^2 - a^2};$$

$$\text{oder} \quad \frac{\pi \sin 2a\pi}{1-\cos 2a\pi} = \frac{1}{a} + \sum \frac{-2a}{n^2 - a^2}. \quad 4.$$

Wird diese Formel auf beiden Seiten mit  $a$  multiplicirt, und in Bezug auf  $a$  integrirt, so kommt, wenn  $c$  eine Constante ist:

$$\frac{1}{2} \log c(1-\cos 2a\pi) = \log a + \sum \log(n^2 - a^2),$$

oder, weil  $1-\cos 2a\pi = 2\sin^2 a\pi$  ist, wenn noch auf beiden Seiten  $\log a$  subtrahirt und  $c$  statt  $2c$  gesetzt wird:

$$\log \frac{c \cdot \sin a\pi}{a} = \sum \log(n^2 - a^2),$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\log \frac{c \cdot \sin a\pi}{a} = \sum \log \left( 1 - \frac{a^2}{n^2} \right),$$

Durch welche Aenderung wieder nur die Constante  $\alpha$  eine andere Bedeutung erhält, indem nur die Summe  $\sum \log n^2$  rechts subtrahirt worden ist. Setzt man nun  $a=0$ , so wird  $\frac{\sin a\pi}{a}=\pi$ , und man erhält rechts  $\sum \log 1=0$ , also

$$\log c\pi=0,$$

mithin  $c\pi=1$ , oder  $c=\frac{1}{\pi}$ . Folglich ist

$$\log \frac{\sin a\pi}{a\pi} = \sum \log \left(1 - \frac{a^2}{n^2}\right);$$

und mithin, wenn man die Logarithmen wegläßt:

$$\sin a\pi = a\pi \left(1 - \frac{a^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{a^2}{2^2}\right) \left(1 - \frac{a^2}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{a^2}{n^2}\right) \cdots \text{in inf. 5.}$$

Man schreibe in dieser Gleichung  $2a$  statt  $a$ , und  $2\sin a\pi \cos a\pi$  für  $\sin 2a\pi$ , so kommt:

$$\begin{aligned} 2\sin a\pi \cos a\pi = 2a\pi & \left(1 - 2^2 a^2\right) \left(1 - a^2\right) \left(1 - \frac{2^2 a^2}{3^2}\right) \left(1 - \frac{a^2}{2^2}\right) \\ & \cdots \left(1 - \frac{a^2}{n^2}\right) \left(1 - \frac{2^2 a^2}{(2n+1)^2}\right) \cdots \end{aligned}$$

mithin, wenn mit dem Werthe von  $2\sin a\pi$  aus 5. in vorstehende Gleichung dividirt wird:

$$\cos a\pi =$$

$$\left(1 - 4a^2\right) \left(1 - \frac{4a^2}{3^2}\right) \left(1 - \frac{4a^2}{5^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{4a^2}{(2n+1)^2}\right) \cdots \text{in inf. 6.}$$

126. Die obigen Gleichungen 5. und 6. stellen  $\sin a\pi$  und  $\cos a\pi$  als Producte aus unendlich vielen, der Einheit immer näher kommenden, Factoren dar. Schreibt man  $x$  statt  $a\pi$ , also  $\frac{x}{\pi}$  statt  $a$ , so erhalten sie folgende Gestalt:

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2 \pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2 \pi^2}\right) \cdots \text{in inf. 7.}$$

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right) \dots \text{in inf.} \quad 8.$$

Wird in 5.  $a = \frac{1}{2}$  gesetzt, so wird  $\sin a\pi = 1$ , und mithin

$$1 = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{2^2 \cdot 2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2 \cdot 4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2 \cdot 4}\right) \dots$$

oder 
$$1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{35}{36} \dots \frac{(2n-1)(2n+1)}{2n \cdot 2n} \dots,$$

woraus man folgenden sehr merkwürdigen Ausdruck erhält:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \dots 2n \cdot 2n \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2n-1)(2n+1) \dots} \text{ in inf.}$$

Entwickelt man die Werthe von  $\sin x$  und  $\cos x$  aus 7. und 8. in Reihen nach Potenzen von  $x$ , bleibt aber, um nur die einfachsten Resultate zu erhalten, bei den ersten Gliedern stehen, so kommt offenbar

$$\sin x = x - \left[1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \text{in inf.}\right] \frac{x^3}{\pi^2} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} \dots \text{in inf.}\right] \frac{4x^2}{\pi^2} + \dots$$

Diese Reihen müssen mit den bekannten Reihen

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots$$

übereinstimmen; mithin erhält man, durch Vergleichung der Coefficienten:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \text{in inf.} = \frac{1}{6} \pi^2. \quad a.$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \text{in inf.} = \frac{1}{8} \pi^2. \quad b.$$

Von diesen beiden, ebenfalls sehr merkwürdigen, Summenformeln, ist jede in der andern enthalten. Multiplicirt man nämlich die Reihe b. mit der geometrischen Progression

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \dots \frac{1}{2^{2n}} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3},$$

so ist leicht einzusehen, daß das Product nichts weiter als die Reihe  $a$ , d. i. die Summe der umgekehrten Quadrate der natürlichen Zahlen sein kann, da  $b$  die Summe der umgekehrten Quadrate der ungeraden Zahlen war; mithin erhält man die erstgenannte Summe ( $a$ ) gleich  $\frac{1}{2}\pi^2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}\pi^2$ , wie oben.

127. Schreibt man in den Formeln 5. und 6. (§. 125.)

$\frac{a}{2}$  statt  $a$ , so ergiebt sich, durch Division, folgende Gleichung:

$$\operatorname{tg} \frac{a\pi}{2} = \frac{\frac{a\pi}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) \left(1 - \frac{a^2}{16}\right) \left(1 - \frac{a^2}{36}\right) \left(1 - \frac{a^2}{64}\right) \dots}{(1 - a^2) \left(1 - \frac{a^2}{9}\right) \left(1 - \frac{a^2}{25}\right) \left(1 - \frac{a^2}{49}\right) \dots}$$

oder, wenn man auf beiden Seiten die Logarithmen nimmt, und die Glieder rechts in Factoren des ersten Grades zerlegt:

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} \frac{a\pi}{2} &= \log \frac{a\pi}{2} - \log(1-a) - \log(1+a) + \log\left(1 - \frac{a}{2}\right) \\ &+ \log\left(1 + \frac{a}{2}\right) - \log\left(1 - \frac{a}{3}\right) - \log\left(1 + \frac{a}{3}\right) + \log\left(1 - \frac{a}{4}\right) \\ &+ \log\left(1 + \frac{a}{4}\right) \dots \text{in inf.} \end{aligned}$$

Nun ist

$$d \log \operatorname{tg} \frac{a\pi}{2} = \frac{d \operatorname{tg} \frac{a\pi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{a\pi}{2}} = \frac{\pi da}{2 \sin \frac{a\pi}{2} \cdot \cos \frac{a\pi}{2}} = \frac{\pi da}{\sin a\pi}$$

folglich erhält man aus der vorstehenden Gleichung, durch Differentiation nach  $a$ :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sin a\pi} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1+a} - \frac{1}{2-a} + \frac{1}{2+a} \\ &+ \frac{1}{3-a} - \frac{1}{3+a} \dots \text{in inf.} \quad 1. \end{aligned}$$

Um das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1} dx}{1+x},$$



worin  $a$  ein positiver echter Bruch ist, in eine Reihe zu entwickeln, theile man dasselbe in zwei Integrale, die von 0 bis 1, und von 1 bis  $\infty$  zu nehmen sind. Wird der Quotient  $\frac{x^a-1}{1+x}$ , nach steigenden Potenzen von  $x$  entwickelt, so kommt

$$\frac{x^a-1}{1+x} = x^{a-1} - x^a + x^{a+1} - x^{a+2} + x^{a+3} - \dots$$

mithin, da für ein positives  $a$ ,  $\int_0^1 x^{a-1} dx = \frac{1}{a}$  ist,

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{1}{a} - \frac{1}{1+a} + \frac{1}{2+a} - \frac{1}{3+a} + \frac{1}{4+a} \dots \text{ in inf. } 2.$$

Ferner erhält man, durch Entwicklung nach fallenden Potenzen von  $x$ ,

$$\frac{x^a-1}{1+x} = \frac{x^a-1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x^{a+1}-x}{x+1} = x^{a+1} - x^a + x^{a-1} - x^{a-2} + \dots$$

folglich durch Integration, da, sobald  $a-1$  negativ ist,

$$\int_1^\infty x^{a-2} dx = \frac{1}{1-a}, \text{ u. s. f.}$$

$$\int_1^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{1}{1-a} - \frac{1}{2-a} + \frac{1}{3-a} - \frac{1}{4-a} + \dots \text{ in inf. } 3.$$

Die Addition von 2. und 3. giebt:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{1}{a} + \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1+a} - \frac{1}{2-a} + \frac{1}{2+a} \dots \text{ in inf,}$$

d. i., wegen 1.

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}. \quad 4.$$

In der Formel 5. des §. 123. setze man  $q+r=1$ , und schreibe  $a$  statt  $q$ ,  $x$  statt  $z$ , also  $1-a$  statt  $r$ ; so kommt, da  $\Gamma(1)=1$  ist,

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \Gamma a \cdot \Gamma(1-a). \quad 5.$$

Diese Formel, verglichen mit der vorstehenden, giebt einen merkwürdigen, die Function  $\Gamma$  betreffenden Satz, der in folgender

Gleichung enthalten ist:

$$\Gamma a \cdot \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}. \quad 6.$$

Hieraus folgt z. B. für  $a = \frac{1}{2}$ , indem  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ ,

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) \cdot \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \pi.$$

Es ist aber  $\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx$ .

Man setze  $x^{\frac{1}{2}} = y$ , also  $x = y^2$  und  $x^{-\frac{1}{2}} dx = 2dy$ , so kommt:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2 \int_0^\infty e^{-y^2} dy,$$

also  $\int_0^\infty e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$

wie schon in §. 120., auf einem ganz anderen Wege, gefunden worden ist.

---

## Ueber die Integration der Differentiale von Functionen mehrerer veränderlicher Grössen.

128. Im Vorhergehenden ist hinreichend bewiesen worden, daß jede Function einer veränderlichen Größe ein Integral oder eine Stammgröße hat, von welcher sie die Ableitung ist. Hat man dagegen eine Function zweier und zwar von einander unabhängiger Veränderlicher  $f(x, y)$ , so ist ihr Differential bekanntlich:

$$df = \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy,$$

oder wenn man  $\frac{dy}{dx}$  zur Abkürzung mit  $y'$  bezeichnet,

$$df = \left( \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot y' \right) dx. \quad \text{Bezeichnet man die partiellen Ablei-}$$

tungen von  $f$ , nämlich  $\frac{df}{dx}$  mit  $p$ ,  $\frac{df}{dy}$  mit  $q$ , so sind  $p$  und  $q$  zwei Functionen von  $x$  und  $y$ , zwischen welchen ein solcher Zusammenhang Statt findet, daß

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} \quad \text{ist, weil} \quad \frac{d^2 f}{dx dy} = \frac{d^2 f}{dy dx}.$$

Hieraus folgt, daß  $Mdx + Ndy$  nicht das Differential einer Function von  $x$  und  $y$  sein kann, wenn nicht  $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$  ist.

Wenn aber diese Bedingung erfüllt wird, so ist auch  $Mdx + Ndy$  allemal integrabel, ohne irgend eine Relation zwischen  $x$  und  $y$  voraus zu setzen. Nämlich man integrirte  $Mdx$  nach  $x$ , indem man  $y$  als beständig ansieht, und setze  $v = \int Mdx + Y$ , wo  $Y$  eine beliebige Function von  $y$ , ohne  $x$ , bezeichnet. Hieraus ergibt sich durch Differentiation:

$$dv = Mdx + \left( \int \frac{dM}{dy} dx + \frac{dY}{dy} \right) dy.$$

Nun kann man  $Y$  so bestimmen, daß

$$\int \frac{dM}{dy} dx + \frac{dY}{dy} = N,$$

oder

$$\frac{dY}{dy} = N - \int \frac{dM}{dy} dx$$

wird. Nimmt man nämlich von vorstehendem Ausdrucke rechterhand die Ableitung nach  $x$ , so findet man  $\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}$ , welche Differenz, nach der Voraussetzung, Null ist. Also ist

$N - \int \frac{dM}{dy} dx$  eine bloße Function von  $y$ , ohne  $x$ , und mithin ist

$$Y = \int \left( N - \int \frac{dM}{dy} dx \right) dy$$

eine Function von  $y$ , wie verlangt wurde. Daher hat man

$$v = \int Mdx + \int \left( N - \int \frac{dM}{dy} dx \right) dy,$$

und wenn man differentiirt, so findet man  $dv = Mdx + Ndy$ ; also stellt die Function  $v$  das verlangte Integral von  $Mdx + Ndy$  dar.

**Beispiel.** Es sei das Differential  $ydx - xdy$  vorgelegt, so ist  $M = y$ ,  $N = -x$ , mithin  $\frac{dM}{dy} = 1$ ,  $\frac{dN}{dx} = -1$ ; also die Bedingung der Integrabilität nicht erfüllt, oder  $ydx - xdy$  ist nicht das Differential irgend einer Function von  $x$  und  $y$ .

Ist dagegen  $\frac{ydx - xdy}{x^2}$  vorgelegt; so ist  $M = \frac{y}{x^2}$ ,  $N = -\frac{1}{x}$ ; folglich  $\frac{dM}{dy} = \frac{1}{x^2}$ ,  $\frac{dN}{dx} = \frac{1}{x^2}$ ; also die Bedingung der Integrabilität erfüllt.

Man erhält demnach, da  $\int \frac{ydx}{x^2} = -\frac{y}{x}$ , in so fern  $y$

als beständig angesehen wird,

$$v = -\frac{y}{x} + Y.$$

Um  $Y$  zu bestimmen, hat man

$$\frac{dY}{dy} = -\frac{1}{x} - \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 0;$$

also ist  $Y$  eine beständige Größe, und  $v = -\frac{y}{x} + \text{Const.}$  das

verlangte Integral  $\int \frac{y dx - x dy}{x^2}$ .

129. Soll  $Mdx + Ndy + Pdz$  ein vollständiges Differential einer Function dreier unabhängiger Veränderlichen  $x, y, z$  sein, so wird erfordert, daß, wenn z. B.  $z$  als beständig, also  $dz = 0$  gesetzt wird, auch

$$Mdx + Ndy$$

ein vollständiges Differential einer Function von  $x$  und  $y$ , also

$$\text{daß} \quad \frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$$

sei. Eben so muß auch

$$\frac{dM}{dz} = \frac{dP}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy}$$

sein. Sind diese drei Bedingungen erfüllt, so ist der vorgelegte Ausdruck integrabel. Denn man setze das Integral von  $Mdx + Ndy$ , in welchem Ausdrucke  $z$  als eine beständige Größe angesehen wird, gleich  $u$ , und es sei:

$$v = u + Z;$$

wo  $Z$  eine Function von  $z$ , ohne  $x$  und  $y$ , bezeichnet. Alsdann

$$\text{ist} \quad du = Mdx + Ndy + \frac{du}{dz} dz, \quad \text{und} \quad dv = du + \frac{dZ}{dz} dz;$$

und man kann  $Z$  so bestimmen, daß

$$\frac{dZ}{dz} = P - \frac{du}{dz}$$

wird. Nimmt man nämlich von  $P - \frac{du}{dz}$  die partiellen Ableitungen nach  $x$  und nach  $y$ , so sind dieselben

$$\frac{dP}{dx} - \frac{d^2u}{dx dz} \quad \text{und} \quad \frac{dP}{dy} - \frac{d^2u}{dy dz}.$$

Nun ist aber  $\frac{du}{dx} = M$ , und  $\frac{du}{dy} = N$ ; also gehen die vorstehenden

Ableitungen von  $P - \frac{du}{dz}$  über in:

$$\frac{dP}{dx} - \frac{dM}{dz} \quad \text{und} \quad \frac{dP}{dy} - \frac{dN}{dz},$$

welche Differenzen Null sind. Daher ist  $P - \frac{du}{dz}$  eine bloße Function von  $z$ , wie verlangt wurde; und man erhält

$$v = u + \int \left( P - \frac{du}{dz} \right) dz$$

als diejenige Function, deren Differential  $Mdx + Ndy + Pdz$  ist.

Anmerkung. Eine Aufgabe ähnlicher Art, wie die in den vorstehenden §., findet man in §. 149., nach einer anderen Methode, gelöst.

### Differentialgleichungen.

130. Die einfachste Art von Differentialgleichungen zwischen zwei veränderlichen Größen wird durch die Formel

$$Mdx + Ndy = 0$$

angezeigt, in welcher  $M$  und  $N$  zwei gegebene Functionen von  $x$  und  $y$  sind. Diese Gleichung ist von der ersten Ordnung, und vom ersten Grade (§. 31.). Wenn der Ausdruck  $Mdx + Ndy$  der Bedingung der Integrabilität Genüge leistet, also wenn

$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$  ist (§. 128.), so sei  $v = \int (Mdx + Ndy)$ ; alsdann

ist die vorstehende Differential-Gleichung offenbar einerlei mit  $dv=0$ , und giebt als Integral  $v=Const.$

Wenn aber der Ausdruck  $Mdx + Ndy$  nicht, ohne eine Relation zwischen  $x$  und  $y$  anzunehmen, integrabel ist, so kann man sich doch leicht überzeugen, daß die vorgelegte Gleichung ein Integral hat, oder daß sich immer eine Gleichung zwischen  $x$  und  $y$  finden läßt, welche der vorgelegten Differentialgleichung Genüge leistet. Diese Differentialgleichung bestimmt nämlich die Ablei-

tung  $\frac{dy}{dx}$  als Function von  $x$  und  $y$ ; hieraus aber lassen sich

auch die höheren Ableitungen von  $y$  nach  $x$  sofort finden; und man kann mithin, wenn man dem  $x$  einen beliebigen Werth beilegt, und zugleich einen willkürlichen Werth von  $y$  annimmt, der diesem Werthe von  $x$  entsprechen soll, den Werth von  $y$ , welcher irgend einem  $x$  entsprechen soll, wenigstens durch eine Reihe, mit Hülfe des Taylorschen Satzes, darstellen. Diese Darstellung würde zwar in den meisten Fällen unbefriedigend sein, aber sie lehrt wenigstens, daß die Frage nach der Integration der vorgelegten Gleichung zulässig ist. Dasselbe kann man auch durch geometrische Betrachtungen finden, indem die Aufgabe, die Gleichung  $Mdx + Ndy = 0$  zu integrieren, darauf hinauskommt, eine Curve zu zeichnen, von welcher nur die Richtung der Tangente in jedem den Coordinaten  $x, y$  entsprechenden Punkte gegeben ist. Man nehme also einen Punkt, dessen Coordinaten  $x$  und  $y$  sind, an, durch welchen die Curve gehen soll; lasse hierauf die Abscisse  $x$  und  $k$  wachsen, wodurch  $y$  in  $y'$  übergeht, so wird sich der Werth von  $y'$  wenn  $k$  klein genug ist, aus der

$$\text{Reihe} \quad y' = y + \frac{dy}{dx} \cdot k + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{k^2}{2} + \dots$$

berechnen, und auf diese Weise ein zweiter Punkt der Curve erhalten lassen. Geht man sodann wieder von diesem zweiten Punkte aus, so wird man einen dritten, und auf die nämliche Art beliebig viele Punkte der Curve finden. Die ganze Curve ist also völlig bestimmt, und die Aufgabe allemal lösbar. Man

nannte früher das, was von der Auflösung dieser Aufgabe bekannt war, die *methodus tangentium inversa*, welche Benennung aber gegenwärtig veraltet ist.

131. Wenn nun die vorgelegte Aufgabe immer lösbar ist, so giebt es eine der obigen Differentialgleichung Genüge leistende Gleichung zwischen  $x$  und  $y$ , welche noch eine unbestimmte Constante  $c$  enthält. Zu mehrerer Deutlichkeit denke man sich diese Gleichung nach  $c$  aufgelöst, also auf die Form

$$v = f(x, y) = c$$

gebracht.

Diese Gleichung giebt, differentiiert,  $\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy = 0$ , und mithin muß, da  $Mdx + Ndy = 0$ ,  $\frac{df}{dx} : M = \frac{df}{dy} : N$  sein. Man bezeichne den Quotienten  $\frac{df}{dx} : M$  mit  $w$ , so muß

$$\frac{df}{dx} = Mw, \quad \frac{df}{dy} = Nw$$

sein, so daß die durch Differentiation von  $f(x, y) = c$  entstehende Gleichung folgende ist:

$$wMdx + wNdy = 0.$$

Wenn also der Ausdruck  $Mdx + Ndy = 0$  die Bedingung der Integrabilität nicht erfüllt, so giebt es immer eine Function  $w$  von  $x$  und  $y$ , mit welcher multiplicirt, der Ausdruck ein vollständiges Differential wird. Die Kenntniß dieses Factors (den man den integrierenden Factor nennt) würde sofort zur Integration der Differentialgleichung  $Mdx + Ndy = 0$  führen.

Es muß aber der integrierende Factor  $w$  folgender Bedingung Genüge leisten:

$$\frac{d(wM)}{dy} = \frac{d(wN)}{dx},$$

oder, wenn man die partiellen Ableitungen entwickelt:



$$w\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) + M \frac{dw}{dy} - N \frac{dw}{dx} = 0.$$

Die Aufgabe, die Function  $w$  aus vorstehender Gleichung zwischen ihr und ihren partiellen Ableitungen nach  $x$  und  $y$  zu finden, ist im Allgemeinen eben so schwierig, als die Integration der vorgelegten Differentialgleichung. Man kann sich indessen obiger Gleichung doch in einigen Fällen mit Nutzen bedienen. Wenn z. B. der Quotient

$$\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) \frac{1}{N}$$

kein  $y$  enthält, also eine bloße Function von  $x$  ist, welche mit  $X$  bezeichnet werden mag, so kann man der vorstehenden Gleichung für  $w$  genügen, indem man  $w$  als eine bloße Function von  $x$ , ohne  $y$ , betrachtet. Man setze  $\frac{dw}{dy} = 0$ , so kommt

$$\frac{dw}{dx} = Xw;$$

mithin  $\frac{dw}{dx} = Xdx$ , also  $\log w = \int Xdx$ , und  $w = e^{\int Xdx}$ . Multiplicirt man demnach die Gleichung  $Mdx + Ndy = 0$ , wofern dieselbe so beschaffen ist, daß  $\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) \frac{1}{N} = X$  eine bloße Function von  $x$  ist, mit  $e^{\int Xdx}$ , so ist die Gleichung

$$e^{\int Xdx}(Mdx + Ndy) = 0$$

integrabel. Man setze zur Abkürzung  $e^{\int Xdx}M = \mu$ ,  $e^{\int Xdx}N = \nu$ , so ist das Integral der vorgelegten Gleichung nach §. 128. in folgender Gleichung enthalten:

$$\int \mu dx + \int \left( \nu - \int \frac{d\mu}{dy} dx \right) dy = \text{Const.},$$

oder weil  $\frac{d\mu}{dy} = e^{\int Xdx} \frac{dM}{dy}$ , in folgender:

$$\int e^{\int Xdx} M dx + \int \left( e^{\int Xdx} N - \int e^{\int Xdx} \frac{dM}{dy} dx \right) dy = \text{Const.}$$

Es sei  $M = \varphi x \cdot \psi y + f x$ ,  $N = F x \cdot \psi' y$ , so ist  $\frac{dM}{dy} = \varphi x \cdot \psi' y$ ,

$\frac{dN}{dx} = F' x \cdot \psi' y$ , also

$$\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) \frac{1}{N} = \frac{\varphi x - F' x}{F x} = X;$$

mithin wird die Gleichung

$$(\varphi x \psi y + f x) dx + F x \psi' y dy = 0$$

durch Multiplication mit  $e^{\int X dx}$  integrirt. Setzt man  $\psi y = z$ ,

dividirt durch  $F x$  und schreibt  $\varphi x$ ,  $f x$  statt  $\frac{\varphi x}{F x}$ ,  $\frac{f x}{F x}$ ; so kommt:

$$(\varphi x \cdot z + f x) dx + dz = 0. \quad a.$$

Wird diese Gleichung mit  $e^{\int X dx}$  multiplicirt, wo  $X = \varphi x$ ; so erhält man:

$$e^{\int X dx} X z dx + e^{\int X dx} dz = -e^{\int X dx} f x dx.$$

Man sieht leicht, daß die Glieder auf der linken Seite ein vollständiges Differential bilden, so daß sich

$$d(e^{\int X dx} z) = -e^{\int X dx} f x dx$$

ergiebt. Demnach ist

$$e^{\int X dx} \cdot z = \text{Const.} - \int e^{\int X dx} f x dx,$$

oder

$$z = (C - \int e^{\int X dx} f x dx) e^{-\int X dx} \quad b.$$

das Integral der vorgelegten Gleichung a.

Wird dem Integrale  $\int X dx$  eine willkürliche Constante beigefügt, so muß diese sich mit  $C$  zu einer einzigen Constante vereinigen, da der Werth von  $z$  nur eine solche enthalten kann. Eine leichte Rechnung zeigt, daß dieses wirklich geschieht.

Kann zum integrirenden Factor eine bloße Function von  $y$ , ohne  $x$ , genommen werden, so findet ein dem vorstehenden entsprechendes Verfahren Statt, wie sich von selbst versteht.

132. Um die Differentialgleichung

$$M dx + N dy = 0$$

zu integrieren, sucht man die Veränderlichen, wenn es möglich ist, von einander zu trennen, oder die Gleichung auf die Form

$$Xdx + Ydy = 0$$

zu bringen, in welcher  $X$  eine bloße Function von  $x$  und  $Y$  eine bloße Function von  $y$  ist, und deren Glieder sich mithin, jedes besonders, integrieren zu lassen. Ist z. B. die Gleichung

$$f_x \cdot Ydx + \varphi_y \cdot Xdy = 0$$

vorgelegt, in welcher  $f_x$  und  $X$  kein  $y$ , so wie  $\varphi_y$  und  $Y$  kein  $x$  enthalten, so braucht man nur mit  $XY$  zu dividiren, wodurch

man 
$$\frac{f_x dx}{X} + \frac{\varphi_y dy}{Y} = 0$$

erhält, in welcher die Veränderlichen getrennt sind.

Die Trennung der Veränderlichen gelingt immer, wenn  $M$  und  $N$  zwei homogene Functionen von gleichem Grade sind. Man nennt eine Function  $f(x,y)$  homogen, wenn sie die Eigenschaft hat, sobald  $x, y$ , in  $tx, ty$  übergehen, in  $t^m f(x,y)$  überzugehen, so daß die Gleichung

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y) \quad a.$$

die Definition homogener Functionen von  $x$  und  $y$  ausspricht. Z. B. die Function  $xy + \sqrt{x^2 + y^2}$  geht, wenn  $tx, ty$  statt  $x, y$  gesetzt werden, in  $t^2(xy + \sqrt{x^2 + y^2})$  über, ist also homogen. Der Exponent  $m$  von  $t$  ist der Grad der homogenen Functionen. Die homogene Function vom  $m$ ten Grade  $f(x,y)$  hat die Eigenschaft, daß

$$\frac{df(x,y)}{dx} \cdot x + \frac{df(x,y)}{dy} \cdot y = mf(x,y). \quad b.$$

ist. Nimmt man nämlich von der obigen Gleichung a., die Ableitung nach  $t$ , so kommt

$$\frac{df(tx, ty)}{d(tx)} x + \frac{df(tx, ty)}{d(ty)} y = mt^{m-1} f(x, y)$$

und setzt man  $t=1$ , so erhält man

$$\frac{df(x,y)}{dx} \cdot x + \frac{df(x,y)}{dy} \cdot y = mf(x,y), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Setzt man in der Gleichung a.  $x=1$ , so kommt

$$f(t, ty) = t^m f(1, y);$$

oder wenn in dieser  $x$  statt  $t$ , und  $t$  statt  $y$  gesetzt wird,

$$f(x, tx) = x^m f(1, t). \quad \text{c.}$$

Nun seien  $M=f(x,y)$ ,  $N=\varphi(x,y)$  zwei homogene Functionen vom  $m$ ten Grade, so geht (wegen c.) die Differentialgleichung  $Mdx + Ndy = 0$ , wenn  $tx$  statt  $y$  gesetzt wird, nach Weglassung des gemeinsamen Factors  $x^m$ , über in

$$f(1,t) \cdot dx + \varphi(1,t) \cdot d(tx) = 0,$$

d. i., wenn man zur Abkürzung  $ft$  und  $\varphi t$  statt  $f(1,t)$ ,  $\varphi(1,t)$ , zugleich auch  $tdx + xdt$  statt  $d(tx)$  schreibt:

$$(ft + t\varphi t)dx + \varphi t \cdot xdt = 0,$$

oder

$$\frac{dx}{x} + \frac{\varphi t \cdot dt}{ft + t\varphi t} = 0,$$

in welcher die Veränderlichen getrennt sind.

Man kann auch leicht beweisen, daß, wenn  $M$  und  $N$  zwei homogene Functionen von gleichem Grade ( $m$ ) sind, der Ausdruck

$$\frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny}$$

ein vollständiges Differential, mithin  $\frac{1}{Mx + Ny}$  ein integrierender Factor der Gleichung  $Mdx + Ndy = 0$  ist.

Nimmt man nämlich die Ableitung von  $\frac{M}{Mx + Ny}$  nach  $y$ ,

und von  $\frac{N}{Mx + Ny}$  nach  $x$ , so kommt, mit Weglassung des Nenners  $(Mx + Ny)^2$ ,

$$(Mx + Ny) \frac{dM}{dy} - M \left( N + \frac{dM}{dy} x + \frac{dN}{dy} y \right)$$

und  $(Mx + Ny) \frac{dN}{dx} - N \left( M + \frac{dM}{dx} x + \frac{dN}{dx} y \right)$

oder  $\left( N \frac{dM}{dy} - M \frac{dN}{dy} \right) y - MN$  und  $\left( M \frac{dN}{dx} - N \frac{dM}{dx} \right) x - NM$ . d.

Nun ist aber

$$\frac{dM}{dx} x + \frac{dM}{dy} y = mM, \quad \frac{dN}{dx} x + \frac{dN}{dy} y = mN \quad (\text{nach b.});$$

folglich

$$\begin{aligned} \left( N \frac{dM}{dy} - M \frac{dN}{dy} \right) y &= N \left( mM - \frac{dM}{dx} x \right) - M \left( mN - \frac{dN}{dx} x \right) \\ &= \left( M \frac{dN}{dx} - N \frac{dM}{dx} \right) x; \end{aligned}$$

also sind die beiden Ausdrücke d. einander gleich, w. z. b. w.

133. Wenn eine Gleichung zwischen  $x$ ,  $y$  und der Ableitung  $\frac{dy}{dx}$ , in Hinsicht auf diese letztere von höherem als dem ersten Grade ist, so müßte man sie, um sie auf den ersten Grad zurückzuführen, in eine gewisse Anzahl von Factoren von der Form  $\frac{dy}{dx} - f(x, y)$  auflösen. Setzt man einen dieser Factoren  $\frac{dy}{dx} - f(x, y) = 0$ , und kann man das Integral dieser Gleichung finden, so befriedigt dasselbe auch die vorgelegte Differentialgleichung. Es sei z. B.  $\left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + a \frac{dy}{dx} + b = 0$ ,  $a$  und  $b$  Constanten, so erhält man zwei Werthe für  $\frac{dy}{dx}$ , nämlich entweder  $\frac{dy}{dx} = A$  oder  $\frac{dy}{dx} = B$ , mithin  $y - Ax = C$ , oder  $y - Bx = C'$ . Man sieht, daß, geometrisch gedeutet, die vorgelegte Differentialgleichung zwei gerade Linien zugleich darstellt, welche gegen die Abscissenaxe  $x$ , unter gegebenen Winkeln, deren Tangenten  $A$  und  $B$  sind, sich neigen, übrigens aber eine willkürliche Lage gegen

einander haben, weil die Constanten  $C$  und  $C'$  beide beliebig sind. Beide Integrale werden durch das Product:

$$(y - Ax - C)(y - Bx - C') = 0$$

zugleich dargestellt; d. h. man genügt der Differentialgleichung, wenn man einen der Factoren dieses Productes Null setzt.

Man kann auch das Integral, ohne die Differentialgleichung aufzulösen, auf folgende Art darstellen. Offenbar nämlich muß, wenn man hat:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a\frac{dy}{dx} + b = 0,$$

der Quotient  $\frac{dy}{dx}$  unveränderlich sein. Man setze  $\frac{dy}{dx} = q$ , und  $y = qx + c$ , so ist zugleich  $q^2 + aq + b = 0$ , und das Integral der vorgelegten Gleichung erhält man durch Elimination von  $q$  aus den beiden Gleichungen  $q = \frac{y-c}{x}$  und  $q^2 + aq + b = 0$ ;

nämlich:  $(y-c)^2 + a(y-c)x + bx^2 = 0$ .

Dasselbe stellt zwei gerade Linien dar, welche die Ase  $y$  in dem Punkte schneide, wo  $x = 0$ ,  $y = c$  ist.

Diese Gleichung enthält eine willkürliche Constante, und ist das vollständige Integral der vorgelegten Differentialgleichung. In der That ist jede der beiden früher gefundenen Auflösungen, nämlich  $y - Ax - C = 0$ , und  $y - Bx - C' = 0$ , einzeln genommen, in ihr enthalten.

134. Da sich über die Integration der Differentialgleichungen keine allgemein anwendbaren Regeln geben lassen, so sollen nur noch einige hierher gehörige Beispiele behandelt werden. Es sei die Gleichung

$$y^2 dy^2 + 4xy dx dy + (2x^2 - y^2) dx^2 = 0$$

vorgelegt. Dieselbe giebt

$$(y dy + 2x dx)^2 = (2x^2 + y^2) dx^2,$$

mithin  $ydy + 2xdx = dx\sqrt{2x^2 + y^2}.$

Diese Gleichung ist offenbar homogen; man setze also  $y = tx,$

so kommt  $tx(tdx + xdt) + 2xdx = xdx\sqrt{2 + t^2},$

oder  $(t^2 + 2)dx + txdt = dx\sqrt{2 + t^2};$

mithin  $\frac{dx}{x} + \frac{tdt}{2 + t^2 - \sqrt{2 + t^2}} = 0.$

Man setze  $t^2 + 2 = u^2, tdt = udu,$  so kommt

$$\frac{dx}{x} + \frac{udu}{u^2 - u} = 0, \text{ oder } \frac{dx}{x} + \frac{du}{u - 1} = 0;$$

mithin  $\log x + \log(u - 1) = \text{const.},$  folglich auch  $x(u - 1) = c.$

Setzt man für  $u$  seinen Werth, nämlich

$$u = \sqrt{t^2 + 2} = \frac{\sqrt{y^2 + 2x^2}}{x},$$

so erhält man

$$\sqrt{y^2 + 2x^2} = c + x, \text{ mithin } y^2 + x^2 = c^2 + 2cx,$$

welche Gleichung das Integral der vorgelegten ist, und mit der in §. 31. übereinkommt, wenn man  $c = a$  setzt.

135. Es werde die Gleichung einer Curve verlangt, deren Tangenten von einem gegebenen Punkte alle gleich weit abstehen. Man nehme diesen Punkt zum Anfange der Coordinaten; und setze

$$dx(v - y) - dy(u - x) = 0$$

als die Gleichung der Tangente der Curve, im Punkte  $x, y.$

Dividirt man diese Gleichung mit  $\sqrt{dx^2 + dy^2} = ds,$  und setzt  $u = 0, v = 0,$  so hat man den Ausdruck für den senkrechten Abstand  $a$  der Tangente vom Anfange der Coordinaten; mithin soll

$$\frac{x dy - y dx}{ds} = a, \text{ oder } x dy - y dx = a\sqrt{dx^2 + dy^2} \quad \text{sein.}$$

Um diese Gleichung zu integrieren, setze man  $dy = qdx;$  so kommt:

$$qx - y = a\sqrt{1 + q^2}.$$

Aus  $dy = qdx$  folgt, durch theilweise Integration,  $y = qx - \int x dq$ , oder  $qx - y = \int x dq$ , folglich muß  $\int x dq = a\sqrt{1+q^2}$  sein. Diese Gleichung giebt, differentiiert:

$$x dq = \frac{aq dq}{\sqrt{1+q^2}};$$

mithin muß man entweder haben:  $dq = 0$ , oder  $x = \frac{aq}{\sqrt{1+q^2}}$ .

Die Annahme  $dq = 0$  giebt  $q = \text{const.}$ , und folglich stellt

$$qx - y = a\sqrt{1+q^2}$$

das Integral der vorgelegten Gleichung dar, worin  $q$  die willkürliche Constante ist. Diese Gleichung bedeutet eine gerade Linie, deren senkrechter Abstand vom Anfange der Coordinaten  $a$  ist. Man genügt aber auch der Differentialgleichung, wenn man

$$x = \frac{aq}{\sqrt{1+q^2}} \text{ setzt, und diese Gleichung mit } y = qx - a\sqrt{1+q^2}$$

verbindet, indem man  $q$  aus beiden eliminiert. Aus  $x\sqrt{1+q^2} = aq$

$$\text{erhält man } q = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \sqrt{1+q^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \text{ Setzt}$$

man diese Werthe in die andere Gleichung, so kommt

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \text{ oder } -y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

also  $x^2 + y^2 = a^2$ , die Gleichung eines Kreises vom Halbmesser  $a$ .

Daß diese Gleichung der Differentialgleichung wirklich genügt, sieht man leicht, denn sie giebt  $xdx + ydy = 0$ , woraus

$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2 dx^2}{y^2} \text{ und } (x dy - y dx) = -\frac{a^2 dx}{y}$$

folgen, wie erforderlich. Dessen ungeachtet ist sie nicht in dem gefundenen Integrale enthalten, welches nur gerade Linien darstellt. Der Kreis aber vom Halbmesser  $a$ , welchen sie angiebt, hat die Eigenschaft, von allen diesen Geraden berührt zu wer-



den; woraus schon hervorgeht, daß die Auflösung durch die Gleichung  $x^2 + y^2 - a^2 = 0$  mit dem Integrale in einem engen Zusammenhange steht. Man nennt solche Gleichungen, welche einer Differentialgleichung genügen, ohne in dem vollständigen, d. h. mit einer willkürlichen Constante versehenen Integrale derselben enthalten zu sein, besondere Auflösungen der Differentialgleichung.

136. Es sei  $f(x, y, c) = 0$  das vollständige Integral einer Differentialgleichung, mit der willkürlichen Constante  $c$ ; so ist die Differentialgleichung selbst nichts anderes, als das Resultat der Elimination von  $c$  zwischen den beiden Gleichungen

$$f(x, y, c) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy = 0.$$

Man betrachte nun die Constante  $c$  als veränderlich, so giebt die Gleichung  $f(x, y, c) = 0$ , differentiiert, folgende:

$$\frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dc} dc = 0.$$

In vielen Fällen ist es möglich, die Constante  $c$  als Function von  $x$  und  $y$  so zu bestimmen, daß

$$\frac{df}{dc} = 0$$

werde. Es sei  $c = \varphi(x, y)$  der aus dieser Bedingung entworfelte veränderliche Werth von  $c$ ; setzt man denselben in das vollständige Integral, so kommt

$$f(x, y, \varphi) = 0, \quad \text{wo} \quad \varphi = \varphi(x, y).$$

Diese Gleichung befriedigt offenbar die vorgelegte Differentialgleichung; denn sie giebt

$$\frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{d\varphi} d\varphi = 0$$

und da  $\frac{df}{d\varphi} = 0$  ist, so giebt sie  $\frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy = 0$ .

Eliminirt man  $\varphi$  aus dieser Gleichung und aus  $f(x, y, \varphi) = 0$ , so erhält man offenbar dieselbe Differentialgleichung, wie vorhin bei der Elimination von  $c$ . Wofern nun die Gleichung  $f(x, y, \varphi) = 0$  nicht als ein bloßer besonderer Fall in dem vollständigen Integrale enthalten ist (was ebenfalls sein kann), so ist sie eine besondere Auflösung der Differentialgleichung. In dem vorigen Beispiele war  $qx - y = a\sqrt{1+q^2}$  das vollständige Integral;  $q$  die Constante. Nimmt man die Ableitung nach  $q$ , indem man  $x$  und  $y$  ungeändert läßt, so kommt

$$x = \frac{aq}{\sqrt{1+q^2}},$$

aus welcher Gleichung, durch Wegschaffung von  $q$ , schon oben die besondere Auflösung  $x^2 + y^2 = a^2$  gefunden wurde.

Um die geometrische Bedeutung dieser besonderen Auflösungen kennen zu lernen, sei  $f(x, y, c) = 0$  die Gleichung einer Curve, welche, indem die unbestimmte Constante  $c$  (die man auch, in Hinsicht auf die Curve, einen Parameter nennt) andere Werthe erhält, sich ebenfalls ändern wird. Denkt man sich nun den Parameter  $c$  in stetiger Aenderung begriffen, und mithin die zugehörige Curve ebenfalls, so werden, im Allgemeinen, je zwei auf einander folgende Curven einen gemeinschaftlichen Durchschnitt haben, dessen Coordinaten man erhält, wenn man die Gleichungen beider Curven mit einander verbindet. Diese sind

$$f(x, y, c) = 0 \quad \text{und} \quad f(x, y, c+dc) = 0,$$

oder auch, statt der zweiten,

$$f(x, y, c+dc) - f(x, y, c) = 0,$$

welche, für ein verschwindendes  $dc$ , auf  $\frac{df}{dc} = 0$  zurückkommt.

Wird nun  $c$  aus der Gleichung  $f(x, y, c) = 0$  mittelst  $\frac{df}{dc} = 0$  weggeschafft, so erhält man die Curve, in welcher alle jene Durchschnitte liegen; und diese ist also die besondere Auflösung derjenigen Differentialgleichung, von welcher  $f(x, y, c) = 0$

das vollständige Integral war. Für irgend einen Punkt  $P$  der Curve, welche die besondere Auflösung darstellt, und deren Gleichung  $f(x, y, \varphi) = 0$  ist, haben  $x, y, \varphi$  bestimmte Werthe. Giebt man der Constante  $c$  den Werth von  $\varphi$ , so stellen die, beiden Gleichungen  $f(x, y, c) = 0$  und  $f(x, y, \varphi) = 0$  zwei mit einander in diesem Punkte  $P$  zusammentreffende Curven dar. Diese haben zugleich in  $P$  eine gemeinschaftliche Tangente, weil der Werth von  $\frac{dy}{dx}$ , mag er aus den Gleichungen

$$f(x, y, c) = 0, \quad \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{oder aus} \quad f(x, y, c) = 0, \quad \frac{df}{dy} + \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{d\varphi} = 0, \quad \frac{df}{d\varphi} = 0$$

genommen sein, offenbar derselbe ist. Daher wird die ganze Schaar der Curven von veränderlichem Parameter, welche das vollständige Integral darstellt, von der durch die besondere Auflösung dargestellten Curve eingehüllt. So ist z. B. in der Aufgabe des vorigen §. ein Kreis die Hülle aller in gleichem Abstände  $a$  vom Anfange der Coordinaten befindlichen geraden Linien.

Das vollständige Integral der Gleichung

$$y - \frac{xdy}{dx} = \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

(in welcher  $\varphi$  eine Function anzeigt) ist

$$y - ax = \varphi a,$$

wo  $a$  die willkürliche Constante. Differentiirt man nach  $a$ , so kommt  $x = \varphi'a$ , woraus sich, nach Elimination von  $a$ , eine besondere Auflösung ergibt, welche die Gleichung einer Curve darstellt, die von allen in dem vollständigen Integrale enthaltenen geraden Linien berührt wird. Dies findet z. B. Anwendung auf die Evolute einer Curve, welche von allen Normalen dieser Curve berührt wird.

137. Es sei noch die Differentialgleichung

$$y^2(dx^2 + dy^2) = (xdx + ydy)adx$$

vorgelegt; oder geordnet:

$$y^2 dy^2 - ay dx dy + (y^2 - ax) dx^2 = 0. \quad A.$$

Wird dieselbe differentiiert, und  $d^2x = 0$  gesetzt, so kommt

$$2y^2 dy d^2y + 2y dy^3 - adx dy^2 - ay dx d^2y + (2y dy - adx) dx^2 = 0.$$

Entwickelt man hieraus den Werth von  $\frac{d^2y}{dx^2}$ , so kommt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(adx - 2y dy)(dy^2 + dx^2)}{(2y^2 dy - ay dx) dx^2}. \quad B.$$

Setzt man den gemeinschaftlichen Factor des Zählers und Nenners Null, nämlich:

$$2y dy - adx = 0,$$

so wird die vorstehende Gleichung befriedigt, ohne daß daraus ein bestimmter Werth für  $\frac{d^2y}{dx^2}$  hervorgeht. Man setze  $y^2 - ax = u$ , so geht die Gleichung A., welche sich auch, wie folgt, schreiben läßt,

$$(y dy - adx) y dy + (y^2 - ax) dx^2 = 0,$$

über in

$$(du - adx) y dy + 2u dx^2 = 0$$

oder

$$(du - adx)(du + adx) + 4u dx^2 = 0,$$

oder

$$du^2 + (4u - a^2) dx^2 = 0.$$

Diese Gleichung oder die Gleichung A. wird mithin offenbar befriedigt, wenn man setzt:  $4u - a^2 = 0$ , oder

$$y^2 - ax = \frac{1}{4}a^2. \quad C.$$

Wird ferner aus B. der gemeinschaftliche Factor  $2y dy - adx$  weggelassen, so kommt

$$y d^2y + dy^2 + dx^2 = 0,$$

eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Man bemerkt leicht,

daß

$$y d^2y + dy^2 = d(y dy)$$

ist; mithin giebt die vorstehende Gleichung;

$$d(ydy) + dx^2 = 0, \text{ oder } d\left(\frac{ydy}{dx}\right) + dx = 0;$$

daher durch einmalige Integration:

$$ydy + (x-k)dx = 0,$$

und durch eine zweite Integration

$$y^2 + (x-k)^2 = g^2;$$

wo  $k$  und  $g$  willkürliche Constanten sind.

Man setze die Werthe von  $y^2$  und  $ydy$ , aus den zuletzt gefundenen Gleichungen, in A., so kommt:

$$(x-k)^2 + a(x-k) + g^2 - (x-k)^2 - ax = 0.$$

Entwickelt man diese Gleichung, so fällt  $x$  weg, und man erhält

$$g^2 - ak = 0.$$

Folglich ist  $y^2 + (x-k)^2 = ak$  D.

das vollständige Integral der Differentialgleichung A., mit der willkürlichen Constante  $k$ . Die Gleichung C., welche ebenfalls der Differentialgleichung genügt, ist aber nicht in diesem Integrale enthalten. Denn wäre sie es, so müßte es einen beständigen Werth geben, der, für  $k$  gesetzt, die Gleichung D. in C. verwandelte. Um diesen zu befinden, wenn er vorhanden ist, eliminire man  $y$  aus C. und D., so kommt

$$ax + \frac{1}{2}a^2 + (x-k)^2 = ak;$$

Wird diese Gleichung nach  $k$  aufgelöst, so kommt

$$k^2 - (2x+a)k + (x+\frac{1}{2}a)^2 = 0,$$

oder  $(k-x-\frac{1}{2}a)^2 = 0.$

Man sieht, daß der Werth von  $k$  nicht unabhängig von  $x$  ausfällt, und daß mithin die Gleichung D. nicht dadurch in C. übergehen kann, daß man irgend einen beständigen Werth für  $k$  einsetzt. Daher ist C. eine besondere Auflösung der Differentialgleichung A. Man bemerke noch, daß dieselbe, wie auch schon die besondere Auflösung in §. 136., unabhängig von dem vollständigen Integrale, durch Differentiation der Gleichung A. ge-

funden worden ist, nämlich als der Factor, welcher, gleich Null gesetzt, die Gleichung B. befriedigte, ohne einen bestimmten Werth von  $\frac{d^2y}{dx^2}$  zu liefern. Man kann dieselbe nach der Methode des vorigen §. auch aus dem vollständigen Integrale D. erhalten, wenn dieses als bekannt vorausgesetzt wird. Zu dem Ende braucht man nur die Ableitung von D. nach  $k$  gleich Null zu setzen; man findet  $-2(x-k)=a$ , also  $k=x+\frac{1}{2}a$ , welcher Werth in D gesetzt:

$$y^2 + \frac{1}{4}a^2 = a(x + \frac{1}{2}a) \text{ oder } y^2 = ax + \frac{1}{4}a^2$$

gibt, übereinstimmend mit C.

Die Gleichung D. bedeutet eine Schaar von Kreisen, deren Mittelpunkte auf der Ase  $x$  liegen, und deren Halbmesser sich nach dem Gesetze ändern, daß, wenn  $k$  der Abstand des Mittelpunktes vom Anfange der Coordinaten ist,  $\sqrt{ak}$  den zugehörigen Halbmesser ausdrückt. Alle diese Kreise werden von der durch die Gleichung C. ausgedrückten Parabel eingehüllt.

Dies sind einige Beispiele von besonderen Auflösungen. Eine vollständige Theorie derselben würde hier zu weitläufig sein.

### Einige Beispiele von Differentialgleichungen höherer Ordnungen zwischen zwei Veränderlichen.

138. Daß es immer eine Relation zwischen  $x$  und  $y$  giebt, welche einer gegebenen Gleichung zwischen  $x$ ,  $y$  und mehreren Ableitungen von  $y$  nach  $x$ , d. i.  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$ , u. s. f. Genüge leistet, kann man sich, mit Hülfe des Taylorschen Satzes, auf ähnliche Weise klar machen, wie in §. 120. In Bezug auf die Differentialgleichungen erster Ordnung angedeutet worden ist. Nämlich wenn die Differentialgleichung z. B. von der zweiten Ordnung ist, so wird  $\frac{d^2y}{dx^2}$  durch  $x$ ,  $y$ ,  $\frac{dy}{dx}$  ausgedrückt, woraus man die

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx}, \quad \frac{d^2y}{d^2x} = m^2 \cdot e^{mx}.$$

Die Einsetzung dieser Werthe giebt, nach Weglassung des gemeinsamen Factors  $e^{mx}$ , folgende Gleichung zur Bestimmung von  $m$ :

$$m^2 + a_1 m + a_2 = 0.$$

Bezeichnet man die Wurzeln derselben mit  $m_1$  und  $m_2$ , so kommt

$$y_1 = e^{m_1 x} \quad \text{und} \quad y_2 = e^{m_2 x}.$$

Jeder dieser Werthe befriedigt die vorgelegte Gleichung und ist ein Integral derselben; da er aber keine willkürliche Constante enthält, so ist er nur ein unvollständiges Integral. Man sieht aber leicht, daß auch die Function  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ , in welcher  $C_1, C_2$  beliebige Constanten sind, dieser Gleichung genügen muß, wenn  $y_1$  und  $y_2$  ihr genügen; und da dies bei den obigen Werthen von  $y_1, y_2$  der Fall ist, so erhält man

$$y = C_1 \cdot e^{m_1 x} + C_2 \cdot e^{m_2 x}$$

als vollständiges Integral der vorgelegten Gleichung, mit den willkürlichen Constanten  $C_1$  und  $C_2$ .

Wenn die Wurzeln  $m_1$  und  $m_2$  der Gleichung

$$m^2 + a_1 m + a_2 = 0$$

imaginär sind, so setze man

$$m_1 = p + qi, \quad m_2 = p - qi;$$

so wird  $e^{m_1 x} = e^{px} \cdot e^{qxi} = e^{px} (\cos qx + i \sin qx)$

$$e^{m_2 x} = e^{px} \cdot e^{-qxi} = e^{px} (\cos qx - i \sin qx).$$

Folglich erhält man

$$y = (C_1 + C_2) e^{px} \cos qx + (C_1 - C_2) i \cdot e^{px} \sin qx,$$

oder wenn man  $C_1 + C_2 = A, (C_1 - C_2) i = B$  setzt,

$$y = e^{px} (A \cos qx + B \sin qx),$$

als die in diesem Falle passende Form des Integrals.  $A$  und  $B$  sind willkürliche Constanten.

Wenn die Wurzeln  $m_1$  und  $m_2$  einander gleich sind, so lie-

fert die Formel  $e^{mx}$  nur ein unvollständiges Integral. Alsdann erhält man ein zweites, wenn man die Ableitung von  $y_1 = e^{mx}$  nach  $m$  nimmt, d. i.  $\frac{dy_1}{dm} = x e^{mx}$ . Setzt man nämlich für  $y$  diesen Werth, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy_1}{dm}\right)}{dx} = \frac{d^2 y_1}{dm dx} = \frac{d^2 y_1}{dx dm};$$

eben so  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2\left(\frac{dy_1}{dm}\right)}{dx^2} = \frac{d^3 y_1}{dx^2 dm};$

folglich, wenn  $y_1 = e^{mx}$ ;  $y = \frac{dy_1}{dm}$  ist,

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = \frac{d^3 y_1}{dx^2 dm} + a_1 \frac{d^2 y_1}{dx dm} + a_2 \frac{dy_1}{dm} \\ &= \frac{d\left(\frac{d^2 y_1}{dx^2} + a_1 \frac{dy_1}{dx} + a_2 y_1\right)}{dm} = \frac{d(e^{mx}(m^2 + a_1 m + a_2))}{dm} \\ &= x e^{mx}(m^2 + a_1 m + a_2) + e^{mx}(2m + a_1). \end{aligned}$$

Setzt man nun  $m^2 + a_1 m + a_2 = 0$ , und sind die beiden hieraus entspringenden Werthe von  $m$  einander gleich, so wird auch zugleich  $2m + a_1 = 0$ ; folglich ist

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0$$

für  $y = e^{mx}$  und für  $y = x e^{mx}$ , wenn  $m$  die Wurzel der Gleichung  $m^2 + a_1 m + a_2 = (m + \frac{1}{2}a_1)^2 = 0$ , oder  $m = -\frac{1}{2}a_1$  ist. Das vollständige Integral der vorgelegten Gleichung ist

alsdann  $y = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx}$

oder  $y = (C_1 + C_2 x) e^{mx}.$

Auf ähnliche Weise erhält man z. B. das Integral der Gleichung

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + a_1 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_2 \frac{dy}{dx} + a_3 y = 0$$



durch die Formel

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x},$$

in welcher  $m_1, m_2, m_3$  die Wurzeln der Gleichung

$$m^3 + a_1 m^2 + a_2 m + a_3 = 0$$

sind. Wenn diese Gleichung z. B. drei gleiche Wurzeln ( $m$ ) hat, so nimmt das Integral folgende Form an:

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{mx}.$$

In diesem Falle erhält man nämlich aus dem unvollständigen Integrale  $y_1 = e^{mx}$  zwei andere, indem man die Ableitungen von diesen nach  $m$  nimmt, nämlich

$$y_2 = \frac{dy_1}{dm} = x e^{mx}, \quad y_3 = \frac{d^2 y_1}{dm^2} = x^2 e^{mx}.$$

Der Beweis wird, mit Hilfe der bekannten Sätze, welche die gleichen Wurzeln algebraischer Gleichungen betreffen, auf ähnliche Weise geführt, wie vorhin.

140. Wenn in der linearen Differentialgleichung  $n$ ter Ordnung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

die Coefficienten  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sämtlich Functionen von  $x$ , ohne  $y$ , sind, so reicht es ebenfalls hin,  $n$  unvollständige Integrale derselben zu kennen, um sofort das vollständige Integral zu erhalten. Denn es seien  $y_1, y_2, \dots, y_n$  Functionen von  $x$ , welche der vorstehenden Gleichung genügen, so genügt denselben auch, wie leicht zu sehen, die daraus zusammengesetzte Function

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

in welcher  $C_1, C_2, \dots, C_n$  Constanten sind. Sind daher die Functionen  $y_1, y_2, \dots, y_n$  alle von einander verschieden, so stellt  $y$  das vollständige Integral der vorgelegten Differentialgleichung dar.

Setzt man  $y = e^u$ , und  $\frac{du}{dx} = q$ , so wird diese Differentialgleichung auf eine andere zwischen  $q$  und  $x$  zurückgeführt, die nur nach der  $n-1$ ten Ordnung, aber nicht mehr linear ist. Die vorgelegte Gleichung sei z. B.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0,$$

$a_1$  und  $a_2$  Functionen von  $x$ , ohne  $y$ . Wird  $y = e^u$  gesetzt, so kommt  $dy = e^u \cdot du$ ,  $d^2y = e^u(d^2u + du^2)$ ; folglich geht die Gleichung in folgende über:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + a_1 \frac{du}{dx} + a_2 = 0,$$

nachdem der gemeinsame Factor  $e^u$  weggelassen worden ist.

Wird ferner  $\frac{du}{dx} = q$  gesetzt, so kommt

$$\frac{dq}{dx} + q^2 + a_1 q + a_2 = 0,$$

welche Gleichung nur noch von der ersten Ordnung, aber nicht mehr linear ist, weil  $q$  darin in der zweiten Potenz vorkommt.

141. Wenn in der lineären Differentialgleichung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = v$$

Die Coefficienten  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , so wie  $v$ , Constanten sind, so setze man  $a_n y - v = a_n z$ , woraus  $dy = dz$ ,  $d^2y = d^2z$ , u. s. f. folgt. Die Gleichung wird dadurch auf eine andere gebracht, in welcher das letzte Glied, auf der rechten Seite, Null ist, wie in §. 139. angenommen wurde. Sind aber  $a_1, a_2, \dots, a_n, v$  Functionen von  $x$ , ohne  $y$ , so läßt sich die Aufgabe wenigstens vereinfachen, wie hier an dem Beispiele einer Differentialgleichung zweiter Ordnung gezeigt werden soll. Es sei

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = v \quad \text{A.}$$

die vorgelegte Gleichung,  $a_1, a_2, v$  Functionen von  $x$ , ohne  $y$ .  
Man suche zuerst zwei unvollständige Integrale der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0, \quad B.$$

welche mit  $y_1$  und  $y_2$  bezeichnet werden mögen; so ist  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$  das vollständige Integral von B. Betrachtet man nunmehr  $C_1$  und  $C_2$  nicht als Constanten, sondern als Functionen von  $x$ , so lassen sich diese so bestimmen, daß der Werth von  $y$  der Gleichung A. Genüge leistet. Wird nämlich die Gleichung  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$  differentiirt, so kommt:

$$dy = C_1 dy_1 + C_2 dy_2 + y_1 dC_1 + y_2 dC_2.$$

Nun setze man  $y_1 dC_1 + y_2 dC_2 = 0$ ; so wird

$$dy = C_1 dy_1 + C_2 dy_2,$$

und hieraus

$$d^2y = C_1 d^2y_1 + C_2 d^2y_2 + dC_1 dy_1 + dC_2 dy_2.$$

Man erhält demnach

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = \begin{cases} C_1 \left( \frac{d^2y_1}{dx^2} + a_1 \frac{dy_1}{dx} + a_2 y_1 \right) \\ + C_2 \left( \frac{d^2y_2}{dx^2} + a_1 \frac{dy_2}{dx} + a_2 y_2 \right) \\ + \frac{dC_1}{dx} \frac{dy_2}{dx} + \frac{dC_2}{dx} \frac{dy_1}{dx} \end{cases}$$

Weil aber, nach der Annahme,

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + a_1 \frac{dy_1}{dx} + a_2 y_1 = 0, \quad \frac{d^2y_2}{dx^2} + a_1 \frac{dy_2}{dx} + a_2 y_2 = 0,$$

so folgt

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = v = \frac{dC_1}{dx} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{dC_2}{dx} \cdot \frac{dy_2}{dx}.$$

Man bestimme demnach  $\frac{dC_1}{dx}$  und  $\frac{dC_2}{dx}$  aus den Gleichungen:

$$y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dy_1}{dx} \cdot \frac{dC_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \cdot \frac{dC_2}{dx} = v;$$

so erhält man diese Größen als Functionen von  $x$  ausgedrückt,

und demnach  $\frac{dC_1}{dx} = \varphi_1 x, \frac{dC_2}{dx} = \varphi_2 x;$

oder  $C_1 = \int \varphi_1 x \cdot dx, C_2 = \int \varphi_2 x \cdot dx.$

Das vollständige Integral der vorgelegten Gleichung ist alsdann folgendes:

$$y = y_1 \int \varphi_1 x \cdot dx + y_2 \int \varphi_2 x \cdot dx.$$

Ueber die Integration einer Differentialgleichung von erster Ordnung und vom ersten Grade zwischen drei Veränderlichen.

142. Es sei die Gleichung

$$Mdx + Ndy + Pdz = 0 \quad \dots A.$$

vorgelegt, in welcher  $M, N, P$  als Functionen von  $x, y, z$  gegeben sind. Wenn es möglich ist, diese Gleichung durch eine Gleichung zwischen  $x, y, z$ , mit einer willkürlichen Constante, zu integrieren, so sei  $v = \text{const.}$  dieses Integral; alsdann muß sich offenbar

$$M:N:P = \frac{dv}{dx} : \frac{dv}{dy} : \frac{dv}{dz}$$

verhalten, also muß ein Factor  $w$  vorhanden sein, welcher giebt

$$\frac{dv}{dx} = wM, \frac{dv}{dy} = wN, \frac{dv}{dz} = wP,$$

mithin auch

$$\frac{d(wM)}{dy} = \frac{d(wN)}{dx}, \quad \frac{d(wM)}{dz} = \frac{d(wP)}{dx}, \quad \frac{d(wN)}{dz} = \frac{d(wP)}{dy},$$

so daß der Ausdruck  $w(Mdx + Ndy + Pdz)$  ein vollständiges Differential ist. §. 129. Entwickelt man die vorstehenden Gleichungen, so kommt:

$$\left. \begin{aligned} M \frac{dw}{dy} - N \frac{dw}{dx} + w \left( \frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} \right) &= 0. \\ P \frac{dw}{dx} - M \frac{dw}{dz} + w \left( \frac{dP}{dx} - \frac{dM}{dz} \right) &= 0. \\ N \frac{dw}{dz} - P \frac{dw}{dy} + w \left( \frac{dN}{dz} - \frac{dP}{dy} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad \text{B.}$$

Multipliziert man die drei Gleichungen B., der Reihe nach, mit  $P, N, M$ , so kommt durch Addition

$$P \left( \frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} \right) + N \left( \frac{dP}{dx} - \frac{dM}{dz} \right) + M \left( \frac{dN}{dz} - \frac{dP}{dy} \right) = 0. \quad \text{C.}$$

Dies ist eine Bedingungsgleichung, welche die drei Functionen  $M, N, P$  erfüllen müssen, wenn die Gleichungen B. mit einander verträglich, oder ein integrierender Factor  $w$  möglich sein soll. Vorausgesetzt, daß die Bedingung C. erfüllt ist, so hat die Gleichung A. allemal ein Integral von der Form  $v = \text{const.}$ , in welche  $v$  eine gewisse Function von  $x, y, z$  ist. Man integriere nämlich, zuerst  $z$  constant setzend, die Gleichung

$$Mdx + Ndy = 0; \quad \text{D.}$$

es sei  $u + \varphi z = 0$  das Integral, worin  $\varphi z$  die Stelle der Constante vertritt. Differentiirt man die Gleichung  $u + \varphi z = 0$ , so kommt, weil  $\frac{du}{dx} = \lambda M$ ,  $\frac{du}{dy} = \lambda N$  sein muß ( $\lambda$  der integrierende Factor von D.)

$$\lambda(Mdx + Ndy) + \left( \frac{du}{dz} + \varphi'z \right) dz = 0.$$

Diese Gleichung werde mit

$$\lambda Mdx + \lambda Ndy + \lambda Pdz = 0$$

verglichen; so muß offenbar

$$\frac{du}{dz} + \varphi'z = \lambda P,$$

oder

$$\varphi'z = \lambda P - \frac{du}{dz} \quad \text{sein.}$$

In der That kann man zeigen, daß  $\lambda P - \frac{du}{dz}$  auf eine bloße Function von  $z$  und  $\varphi z$  zurückkommt, wenn die Gleichung  $u + \varphi z = 0$  vorausgesetzt wird. Betrachtet man nämlich in dieser Gleichung  $z$  als beständig, so wird  $y$  eine Function von  $x$ , und  $\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}$ . Ferner giebt der Ausdruck  $\lambda P - \frac{du}{dz}$ , so differentiirt, als ob  $z$  beständig wäre, die Ableitung

$$\frac{d(\lambda P)}{dx} + \frac{d(\lambda P)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{d^2 u}{dx dz} - \frac{d^2 u}{dy dz} \cdot \frac{dy}{dx} = A,$$

oder, wenn man für  $\frac{du}{dx}$ ,  $\frac{du}{dy}$ ,  $\frac{dy}{dx}$  ihre Werthe  $\lambda M$ ,  $\lambda N$ ,  $-\frac{M}{N}$  setzt, und mit  $N$  multiplicirt,

$$N \frac{d(\lambda P)}{dx} - M \frac{d(\lambda P)}{dy} - N \frac{d(\lambda M)}{dz} + M \frac{d(\lambda N)}{dz} = AN,$$

oder:

$$AN = \left[ N \left( \frac{dP}{dx} - \frac{dM}{dz} \right) + M \left( \frac{dN}{dz} - \frac{dP}{dy} \right) \right] \lambda + P \left( N \frac{d\lambda}{dx} - M \frac{d\lambda}{dy} \right).$$

Nun ist aber, nach der Voraussetzung  $\frac{d(\lambda M)}{dy} = \frac{d(\lambda N)}{dx}$ , oder

$$M \frac{d\lambda}{dy} - N \frac{d\lambda}{dx} = \lambda \left( \frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy} \right);$$

folglich

$$AN = N \left( \frac{dP}{dx} - \frac{dM}{dz} \right) + M \left( \frac{dN}{dz} - \frac{dP}{dy} \right) + P \left( \frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} \right) = 0,$$

wegen C., also  $A = 0$ . Folglich ist  $\lambda P - \frac{du}{dz}$ , wenn man daraus  $y$  mit Hülfe der Gleichung  $u + \varphi z = 0$  eliminirt hat, eine bloße Function von  $z$  und  $\varphi z$ , ohne  $x$ , weil ihre Ableitung  $A$  nach  $x$  Null ist, und man erhält demnach zur Bestimmung von  $\varphi z$  die Gleichung

$$\lambda P - \frac{du}{dz} = \varphi' z,$$

welche als eine Differentialgleichung zwischen  $z$  und  $\varphi z$ , nach geschener Elimination von  $y$ , zu betrachten ist, aus der sich also  $\varphi z$  wiederum bestimmen läßt.

III. Auf diese Weise ist die vorgelegte Aufgabe auf die Integration der Differentialgleichungen zwischen zwei Veränderlichen zurückgeführt.

Beispiel. Es sei die Gleichung

$$zdx - xdy + (xz + x \log x)dz = 0$$

vorgelegt; also

$$M = z, N = -x, P = xz + x \log x;$$

welche Werthe die Bedingung C. befriedigen, wie man leicht finden wird. Man integriere  $zdx - xdy = 0$ ,  $z$  constant setzend;

so wird  $\lambda = \frac{1}{x}$ , und  $u = z \log x - y$ ; also

$$du = \frac{zdx - xdy}{x} + \log x \cdot dz;$$

folglich muß das Integral in der Form

$$z \log x - y + \varphi z = 0$$

erhalten, und zugleich

$$\varphi' z = z + \log x - \log x = z$$

sein, also

$$\varphi z = \frac{1}{2} z^2.$$

Daher hat die vorstehende Gleichung das Integral

$$z \log x - y + \frac{1}{2} z^2 = \text{const.}$$

149. Wenn die Bedingung C. nicht erfüllt wird, so giebt es auch kein Integral von  $Mdx + Ndy + Pdz = 0$  in der Form  $f(x, y, z) = 0$ . Offenbar aber kann man dieser Gleichung immer durch zwei Gleichungen zwischen  $x$ ,  $y$  und  $z$  Genüge leisten, nämlich wenn man für  $y$  eine ganz beliebige Function setzt, so wird  $z$  wieder als Function von  $x$  bestimmt. Um alle diese möglichen Auflösungen umfassend darzustellen, verfähre man wie folgt: Man integriere wieder  $Mdx + Ndy = 0$ ,  $z$

als constant betrachtend. Das Integral sei  $u + \varphi z = 0$ , wo  $\varphi z$  eine beliebige Function von  $z$  ist, die hier die Stelle der Constante vertritt. Nun differentiiere man die Gleichung  $u + \varphi z = 0$ , nach  $x, y, z$ ; so kommt, (weil  $\frac{du}{dx} = \lambda M$ ,  $\frac{du}{dy} = \lambda N$ , wie oben,)

$$\lambda M dx + \lambda N dy + \left( \frac{du}{dz} + \varphi' z \right) dz = 0.$$

Man setze  $\lambda P = \frac{du}{dz} + \varphi' z$ ; so erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$u + \varphi z = 0, \quad \lambda P - \frac{du}{dz} = \varphi' z$$

welche zusammen die vorgelegte befriedigen. Geometrisch bedeuten dieselben offenbar eine unendliche Anzahl von Curven im Raume, denen eine gemeinsame, in der Differentialgleichung ausgedrückte, Eigenschaft zukommt.

Beispiel. Die Gleichung  $y^2 dx + x^2 dy + dz = 0$  genügt der Bedingung C. nicht. Integrirt man aber zuerst  $y^2 dx + x^2 dy = 0$ , so sieht man leicht, daß  $\lambda = \frac{1}{x^2 y^2}$  ein integrierender Factor ist, wodurch  $\frac{dx}{x^2} + \frac{dy}{y^2} = 0$ , also  $u = -\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$  erhalten wird. Hieraus folgt  $\frac{du}{dz} = 0$ , und, weil  $P = 1$ ,  $\varphi' z = \lambda = \frac{1}{x^2 y^2}$ . Folglich ist das verlangte Integral in folgenden Gleichungen enthalten:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \varphi z \quad \text{und} \quad \frac{1}{x^2 y^2} = \varphi' z,$$

wo  $\varphi$  eine beliebige Function von  $z$  ist.



gegeben, in welcher  $P, Q, R$ , Functionen von  $x, y, z$  sind. Schafft man vermittelt derselben eine der Größen  $p, q$ , z. B.

$$q \text{ aus } dz = p dx + q dy$$

hinweg, so kommt

$$Q dz - R dy = p(Q dx - P dy).$$

Der einfachste Fall ist, wenn in dem Ausdrucke  $Q dx - P dy$  nur  $x$  und  $y$ , aber nicht  $z$ , und in  $Q dz - R dy$  nur  $z$  und  $y$ , aber nicht  $x$ , vorkommen. Alsdann kann man zwei integrierende Factoren  $w$  und  $w'$  finden, welche die Ausdrücke

$$w(Q dz - R dy) \text{ und } w'(Q dx - P dy)$$

zu vollständigen Differentialen machen. Es sei der erste gleich  $dM$ , der zweite gleich  $dN$ , so erhält man

$$ww'(Q dz - R dy) = pww'(Q dx - P dy)$$

oder

$$w' dM = p w dN.$$

Diese Gleichung kann wieder nur bestehen wenn  $M$  eine Function von  $N$  ist; also ist

$$M = \varphi(N)$$

das verlangte Integral; worin  $\varphi$  eine beliebige Function andeutet. Der Beweis ist der nämliche, welcher sogleich nachher für den allgemeineren Fall geführt werden wird.

Es sei z. B.  $px - qy = 0$  gegeben; so folgt  $q = \frac{px}{y}$ ,

und aus  $dz = p dx + q dy$ ,

$$dz = p \left( dx + \frac{y dy}{x} \right)$$

oder

$$dz = \frac{p}{x} (x dx + y dy) = \frac{1}{2} \frac{p}{x} d(x^2 + y^2).$$

Man setze  $x^2 + y^2 = u$ , so verlangt die vorstehende Gleichung, daß  $z$  eine Function von  $u$  sei; und das gesuchte Integral ist

$$z = \varphi(x^2 + y^2).$$

Dasselbe giebt in der That

$$p = 2x \varphi'(x^2 + y^2), \quad q = 2y \varphi'(x^2 + y^2),$$

mithin  $py = qx$ , w. g. b. w.

Diese Gleichung umfaßt alle Flächen, welche durch Umdrehung einer Curve um die Axe der  $z$  entstehen.

147. Wenn der erwähnte einfache Fall nicht Statt findet, sondern jeder der Ausdrücke

$$Qdz - Rdy \quad \text{und} \quad Qdx - Pdy$$

alle drei Veränderliche enthält, so läßt sich die vorgelegte partielle Differentialgleichung integrieren, wenn man im Stande ist, zwei Gleichungen zwischen  $x, y, z$  zu finden, welche den Gleichungen  $Qdz - Rdy = 0$  und  $Qdx - Pdy = 0$

zugleich Genüge leisten. Es seien  $a$  und  $b$  die in diesen Gleichungen vorkommenden willkürlichen Constanten, und die Gleichungen selbst dargestellt durch

$$M = a, \quad N = b,$$

wo  $M$  und  $N$  Functionen von  $x, y, z$  sind. Betrachtet man nun  $a$  als eine Function von  $b$ , setzt also  $a = \varphi b$ , so wird  $M = \varphi(N)$  eine Gleichung zwischen  $x, y, z$  sein, die der vorgelegten Genüge thut, indem sie zugleich eine willkürliche Function  $\varphi$  enthält. Nimmt man nämlich die partiellen Ableitungen von  $z$  aus

$$M = \varphi(N),$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dx} + \frac{dM}{dz} \cdot p &= \varphi' N \cdot \left( \frac{dN}{dx} + \frac{dN}{dz} \cdot p \right) \\ \frac{dM}{dy} + \frac{dM}{dz} \cdot q &= \varphi' N \cdot \left( \frac{dN}{dy} + \frac{dN}{dz} \cdot q \right); \end{aligned}$$

mithin, durch Wegschaffung von  $\varphi' N$ ,

$$\left( \frac{dM}{dx} + \frac{dM}{dz} p \right) \left( \frac{dN}{dy} + \frac{dN}{dz} q \right) = \left( \frac{dM}{dy} + \frac{dM}{dz} q \right) \left( \frac{dN}{dx} + \frac{dN}{dz} p \right),$$

oder geordnet:

$$\left( \frac{dN}{dy} \cdot \frac{dM}{dz} - \frac{dM}{dy} \cdot \frac{dN}{dz} \right) p + \left( \frac{dN}{dz} \cdot \frac{dM}{dx} - \frac{dN}{dx} \cdot \frac{dM}{dz} \right) q$$

$$= \frac{dM}{dy} \cdot \frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dx} \cdot \frac{dN}{dy}. \quad A.$$

Nach der Voraussetzung aber müssen die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dx} dx + \frac{dM}{dy} dy + \frac{dM}{dz} dz &= 0 \\ \frac{dN}{dx} dx + \frac{dN}{dy} dy + \frac{dN}{dz} dz &= 0 \end{aligned}$$

einerlei sein mit  $Qdz - Rdy = 0$ ,  $Qdx - Pdy = 0$ . Nimmt man die Verhältnisse  $dx:dy:dz$  aus den obigen Gleichungen, so kommt:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dz} \cdot \frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dy} \cdot \frac{dN}{dz} : \frac{dM}{dx} \cdot \frac{dN}{dz} - \frac{dM}{dz} \cdot \frac{dN}{dx} : \frac{dM}{dy} \cdot \frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dx} \cdot \frac{dN}{dy} \\ = dx : dy : dz; \end{aligned}$$

andererseits aber ist auch  $P : Q : R = dx : dy : dz$ ;

woraus die Uebereinstimmung der Gleichung A. mit der vorgelegten

$$Pp + Qq = R$$

hervorgeht.

Als einfaches Beispiel kann die schon in 144. betrachtete Gleichung  $\frac{dz}{dx} = p = f(x, y, z)$  dienen, deren Integration auf die der beiden Gleichungen  $dz - p dx = 0$  und  $dy = 0$  zurückkommt.

### Variations - Rechnung.

148. Zur Auflösung gewisser Arten von Aufgaben, von welchen nachher einige Beispiele folgen sollen, ist es nöthig, auszudrücken, daß eine Function  $y$  von  $x$  in eine andere Function  $Y$  übergeht, oder daß die Abhängigkeit zwischen  $y$  und  $x$  als veränderlich gedacht wird. Man leistet dies eben so einfach als allgemein dadurch, daß man für die Aenderung der Function, d. i.  $Y - y$ , welche man auch die Variation von  $y$  nennt, ein dem Differential-Zeichen  $dy$  ähnliches Zeichen  $\delta y$  einführt; so daß, wenn  $y$  die ursprüngliche,  $Y$  die geänderte Function ist, die Variation  $Y - y = \delta y$  eine ganz beliebige Function von  $x$  bedeutet.

Um aber, wie später deutlich werden wird, mehr Gleichförmigkeit in die Rechnung zu bringen, werde der Begriff der Variation noch etwas anders gefaßt. Nämlich man setze die Aenderung  $Y - y = k\psi(x, k)$ . In diesem Ausdrucke bezeichnet  $k$  eine beliebige Constante,  $\psi(x, k)$  eine willkürliche Function von  $x$  und  $k$ ; übrigens ist derselbe so gebildet, daß  $Y - y$ , für  $k = 0$ , Null, und für ein sehr kleines  $k$ , ebenfalls sehr klein wird. Nun entwickle man die Function  $\psi(x, k)$  nach Potenzen von  $k$ , und bezeichne die Coefficienten der Entwicklung mit  $\delta y$ ,  $\frac{1}{2}\delta^2 y$ , u. s. f., so daß

$$\psi(x, k) = \delta y + \frac{k\delta^2 y}{2} + \dots,$$

und 
$$k\psi(x, k) = k\delta y + \frac{k^2}{2}\delta^2 y + \dots$$

sei, und demnach der geänderte Werth von  $y$ , d. i.  $Y$  durch

$$y + k\delta y + \frac{k^2}{2}\delta^2 y + \dots$$

ausgedrückt werde. Der Coefficient von  $k$ , d. i.  $\delta y$ , welcher eine ganz beliebige Function von  $x$ , ohne  $k$ , darstellt, die aus  $\psi(x, k)$  entsteht, wenn  $k=0$  gesetzt wird, heiße die Variation von  $y$ .

Es sei  $v$  eine beliebige Function von  $x, y, z$ ; zugleich werden  $y$  und  $z$  als Functionen von  $x$  gedacht. Setzt man  $y + k\delta y + \dots, z + k\delta z + \dots$  statt  $y, z$  in  $v$ ; so sei  $V$  der hieraus entstehende geänderte Ausdruck von  $v$ . Entwickelt man nun  $V$  nach Potenzen von  $k$ , so heiße wieder der Coefficient der ersten Potenz von  $k$  die Variation von  $v$ , und werde mit  $\delta v$  bezeichnet, so daß  $V = v + k\delta v + \dots$  sei. Man sieht sofort, daß  $\delta v$  nichts Anderes ist, als der Werth, welchen der Quotient  $\frac{V-v}{k}$  für  $k=0$  erhält. Um denselben zu entwickeln, braucht man sich nur der gewöhnlichen Regeln der Differentialrechnung zu bedienen, so findet man sofort

$$\delta v = \frac{dv}{dy}\delta y + \frac{dv}{dz}\delta z.$$

Wenn  $y$  in  $y + k\delta y$  (mit Weglassung der höheren Potenzen von  $k$ ) übergeht, so verwandelt sich die Ableitung

$$y_n = \frac{d^n y}{dx^n} \text{ in } \frac{d^n(y + k\delta y)}{dx^n} = \frac{d^n y}{dx^n} + k \frac{d^n \delta y}{dx^n}.$$

Der geänderte Werth von  $y_n$  muß aber auch durch  $y_n + k\delta y_n$  bezeichnet werden; also ist

$$\delta y_n = \frac{d^n \delta y}{dx^n}, \text{ oder } \delta \left( \frac{d^n y}{dx^n} \right) = \frac{d^n \delta y}{dx^n}$$

d. h. um die Variation der Ableitung  $\frac{d^n y}{dx^n}$  zu finden, braucht man nur die  $n$ te Ableitung der Variation von  $y$  zu nehmen.

Die vollständige  $n$ te Ableitung von  $v$  werde mit  $\frac{d^n(v)}{dx^n}$  bezeichnet, so daß z. B. die erste Ableitung

$$\frac{d(v)}{dx} = \frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{dv}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

sei, in welcher Formel  $\frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{dv}{dz}$  partielle Ableitungen von  $v$ , nach  $x, y, z$  sind. Um die Variation von  $\frac{d^n(v)}{dx^n}$ , d. i.  $\delta\left(\frac{d^n(v)}{dx^n}\right)$ , zu finden, muß man in  $\frac{d^n(v)}{dx^n}$   $y+k\delta y, z+k\delta z$  statt  $y, z$  schreiben, und hierauf den Coefficienten von  $k$  entwickeln. Es ist aber offenbar einerlei, ob man zuerst  $\frac{d^n(v)}{dx^n}$  entwickelt, und hierauf  $y+k\delta y, z+k\delta z$  statt  $y, z$  schreibt, oder ob man durch Einsetzung von  $y+k\delta y, z+k\delta z$  zuerst  $v$  in  $V$  übergehen läßt, und sodann die Ableitung von  $V$  nimmt. Demnach ist

$$\delta\left(\frac{d^n(v)}{dx^n}\right) = \frac{\frac{d^n(V)}{dx^n} - \frac{d^n(v)}{dx^n}}{k} = \frac{d^n\left(\frac{V-v}{k}\right)}{dx^n} \quad \text{für } k=0;$$

und weil, mit Weglassung der höheren Potenzen von  $k$ ,

$$V = v + k\delta v$$

ist, so erhält man

$$\delta\left(\frac{d^n(v)}{dx^n}\right) = \frac{d^n(\delta v)}{dx^n}.$$

Man findet also die Variation einer beliebigen Ableitung von  $v$ , wenn man die Ableitung der Variation von  $v$  nimmt. Auf die nämliche Weise findet man auch die Variation eines beliebigen Integrals von  $v$  durch das Integral der Variation  $\delta v$ ; z. B. ist für das erste Integral:

$$\delta \int v dx = \int \delta v \cdot dx.$$

Denn man hat nach der Definition

$$\delta \int v dx = \frac{\int V dx - \int v dx}{k} = \int \left(\frac{V-v}{k}\right) dx \quad \text{für } k=0,$$

also 
$$\delta \int v dx = \int \delta v \cdot dx.$$

Hierin sind die Regeln für das Verfahren der Variationsrechnung enthalten. Dieselben gelten sowohl, wenn die in  $v$  vorkommenden Functionen  $y, z$  u. s. f. unabhängig von einander sind, als auch, wenn sie es nicht sind; z. B. also wenn außer  $y$  in  $v$  nur noch Ableitungen von  $y$  nach  $x$  vorkommen, wie im Folgenden der Fall sein wird.

149. Es sei  $v = f(x, y, y', y'')$  eine Function von  $x, y$  und den beiden ersten Ableitungen von  $y$  nach  $x$ , nämlich  $y' = \frac{dy}{dx}$  und  $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ . Je nachdem die Function  $v$  beschaffen ist, kann es entweder eine Function  $u$  von  $x, y, y'$ , nämlich  $u = \varphi(x, y, y')$ , geben, von welcher  $v$  die vollständige Ableitung ist, oder es kann eine solche Function  $u$  nicht geben. In dem ersten Falle ist  $v$  allgemein, ohne Rücksicht auf die Abhängigkeit zwischen  $x$  und  $y$ , integrabel; im anderen Falle ist  $v$  nicht allgemein integrabel, sondern das Integral  $\int v dx$  muß in jedem Falle besonders gesucht werden, je nachdem  $y$  diese oder jene Function von  $x$  ist. Die Function  $u$  kann ihrerseits wieder allgemein integrabel sein, d. h. es kann eine Function  $u_1 = \varphi_1(x, y)$  geben, aus welcher  $u = \frac{d(u_1)}{dx}$  hervorgeht, oder nicht. Die Function  $u_1$  wäre das zweite Integral von  $v$ , so wie  $u$  das erste. Die Bedingungen, unter welchen  $v$  ein erstes, und ferner ein zweites Integral hat, lassen sich mit Hülfe der Variationsrechnung finden. Man wird in der Folge leicht bemerken, daß die Methode im Wesentlichen die nämliche bleiben muß, wenn die in  $v$  vorkommenden Ableitungen von  $y$  die zweite Ordnung übersteigen, was hier der Kürze wegen nicht angenommen wird.

Wenn die Function  $v$  integrabel ist, so muß

$$u = \varphi(x, y, y') = \int v dx$$

sein. Läßt man, in  $v$  und in  $u$ ,  $y$  in  $y + k \delta y$  übergehen, und vergleicht die Coefficienten der ersten Potenzen von  $k$  mit einander, so kommt  $\delta u = \int \delta v \cdot dx$ ; d. h. wenn  $v$  integrabel ist, so

muß auch die Variation  $\delta v$  integrabel sein; und zwar ist  $\delta u$  ihr Integral. Man schreibe zur Abkürzung  $v'$  für  $\frac{dv}{dy}$ ,  $v''$  für  $\frac{dv}{dy'}$ ,

so ist 
$$\delta v = \frac{dv}{dy} \delta y + v' \frac{d\delta y}{dx} + v'' \frac{d^2 \delta y}{dx^2}$$

mithin 
$$\delta u = \int \delta v \cdot dx = \int \left[ \frac{dv}{dy} \delta y dx + v' d\delta y + v'' \frac{d^2 \delta y}{dx} \right].$$

Der vorstehende Ausdruck für  $\delta u$  läßt sich durch theilweise Integration in zwei Theile zerlegen, von welchen der eine vom Integralzeichen frei, der andere noch damit behaftet ist. Es wird sich aber zeigen, daß der unter dem Integralzeichen befindliche Theil, seiner Beschaffenheit wegen, niemals integrabel sein kann, und mithin identisch Null sein muß, wenn die Variation  $\delta v$  integrabel sein soll.

Man findet nämlich durch theilweise Integration

$$\int v' d\delta y = v' \delta y - \int d(v') \cdot \delta y;$$

wo  $d(v')$  das vollständige Differential von  $v'$  bedeutet. Ferner ist

$$\int v'' \frac{d^2 \delta y}{dx} = v'' \frac{d\delta y}{dx} - \int d(v'') \cdot \frac{d\delta y}{dx},$$

$$\int d(v'') \cdot \frac{d\delta y}{dx} = \int \frac{d(v'')}{dx} d\delta y = \frac{d(v'')}{dx} \delta y - \int \frac{d^2(v'')}{dx} \delta y;$$

folglich

$$\int v'' \frac{d^2 \delta y}{dx} = v'' \frac{d\delta y}{dx} - \frac{d(v'')}{dx} \delta y + \int \frac{d^2(v'')}{dx} \delta y.$$

Setzt man die vorstehenden Werthe in den obigen von  $\delta u$  ein, so kommt

$$\delta u = v' \delta y + v'' \frac{d\delta y}{dx} - \frac{d(v'')}{dx} \delta y + \int \left[ \frac{dv}{dy} - \frac{d(v')}{dx} + \frac{d^2(v'')}{dx^2} \right] \delta y dx.$$

Es sei 
$$\frac{dv}{dy} - \frac{d(v')}{dx} + \frac{d^2(v'')}{dx^2} = L,$$

so ist  $L$  eine Function von  $x, y$  und einigen Ableitungen von  $y$  nach  $x$ , ohne  $\delta y$ . Ist nun  $L$  nicht identisch Null, so



muß; nach der obigen Formel, wenn die Variation  $\delta v$  das In-

tegral 
$$\delta u = \frac{du}{dy} \delta y + \frac{du}{dy'} \delta y'$$

haben soll, daß Integral

$$\int L \delta y dx = P \delta y + Q \delta y'$$

sein, wo 
$$P = \frac{du}{dy} - v' + \frac{d(v'')}{dx},$$

und, weil  $\frac{d\delta y}{dx} = \delta y'$ ,  $Q = \frac{du}{dy'} - v''$  ist. Folglich muß auch, wenn man differentiirt,

$$L \delta y dx = dP \delta y + P d\delta y + dQ \delta y' + Q d\delta y'$$

sein, für jedes beliebige  $\delta y$ . Dies ist aber offenbar unmöglich, wofern die Größen  $P$ ,  $Q$ , und mithin  $L$  nicht sämtlich Null sind. Das Integral  $\delta u = \int \delta v dx$  ist also nur dann vorhanden, wenn die Gleichung

$$L = 0$$

erfüllt ist, welche demnach die Bedingung der Integrabilität von  $\delta v$  ausdrückt. Wird diese Gleichung erfüllt, so ist

$$\delta u = \left( v' - \frac{d(v'')}{dx} \right) \delta y + v'' \delta y'.$$

150. Es läßt sich ferner beweisen, daß  $u$  aus dem gefundenen Ausdrucke für  $\delta u$  allemal gefunden werden kann. Man setze zur Abkürzung

$$M = v' - \frac{d(v'')}{dx}, \quad N = v'',$$

so wird  $\delta u = M \delta y + N \delta y'$ . Da aber zugleich  $u = \varphi(x, y, y')$

sein soll, woraus  $\delta u = \frac{du}{dy} \delta y + \frac{du}{dy'} \delta y'$  folgt, so muß  $M = \frac{du}{dy}$ ,

$N = \frac{du}{dy'}$ , und folglich

$$\frac{dM}{dy'} = \frac{dN}{dy}$$

sein. Diese Bedingung (wobei §. 128. zu vergleichen,) ist erforderlich und zugleich hinreichend, damit der gefundene Ausdruck für  $\delta u$ , in Bezug auf  $y$  und  $y'$ , integrabel, oder damit die Function  $u$ , welche verlangt wird, vorhanden sei. Es soll aber sofort gezeigt werden, daß dieselbe schon in der Bedingungs-Gleichung  $L=0$  enthalten, also keine neue Bedingung ist.

Nämlich die Gleichung

$$L = \frac{dv}{dy} - \frac{d(v')}{dx} + \frac{d^2(v'')}{dx^2} = 0$$

kann offenbar nur dann, wie erfordert wird, identisch bestehen, wenn  $v''$ , d. i.  $\frac{dv}{dy}$ , unabhängig von  $y''$  ist. Denn enthielte  $v''$

noch die Ableitung  $y''$ , so würde in  $\frac{d^2(v'')}{dx^2}$  die vierte Ableitung von  $y$  als Factor eines Gliedes vorkommen; und da die übrigen Glieder offenbar nur die drei ersten Ableitungen von  $y$  enthalten können, so könnte dieses Glied sich gegen keines der übrigen aufheben; dasselbe muß also Null sein. Hieraus folgt aber weiter, daß  $y''$  in  $v$  nur als Factor eines Gliedes in der ersten Potenz vorkommen kann; demnach muß  $v$  nothwendig von folgender Form sein:

$$v = p + qy'',$$

wo  $p$  und  $q$  Functionen von  $x, y, y'$ , ohne  $y''$ , sind. Hierdurch wird

$$\frac{dv}{dy} = \frac{dp}{dy} + \frac{dq}{dy} \cdot y'', \quad v' = \frac{dp}{dy'} + \frac{dq}{dy'} \cdot y'', \quad v'' = q,$$

durch welche Werthe die Gleichung  $L=0$  in folgende übergeht:

$$L = \frac{dp}{dy} + \frac{dq}{dy} y'' - \frac{d\left(\frac{dp}{dy'}\right)}{dx} - \frac{d\left(\frac{dq}{dy'} \cdot y''\right)}{dx} + \frac{d^2(q)}{dx^2} = 0.$$

Man hat 
$$\frac{d(q)}{dx} = \frac{dq}{dx} + \frac{dq}{dy} y' + \frac{dq}{dy'} y'';$$

daher

$$\frac{d^2(q)}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dq}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{dq}{dy}y'\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{dq}{dy'}y''\right)}{dx}.$$

Wird dieser Werth von  $\frac{d^2(q)}{dx^2}$  in die vorstehende Gleichung  $L=0$

gesetzt, so fällt  $\frac{d\left(\frac{dq}{dy'}y''\right)}{dx}$ , wie man sieht, heraus, und es bleibt noch

$$L = \frac{dp}{dy} + \frac{dq}{dy}y'' - \frac{d\left(\frac{dp}{dy'}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{dq}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{dq}{dy}y'\right)}{dx} = 0.$$

Man setze zur Abkürzung

$$\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} - \frac{dq}{dy}y' = r,$$

so wird  $L = \frac{dp}{dy} + \frac{dq}{dy}y'' - \frac{d(r)}{dx} = 0.$

Nun ist aber, weil offenbar  $r$  kein  $y''$  enthält,

$$\frac{d(r)}{dx} = \frac{dr}{dx} + \frac{dr}{dy}y' + \frac{dr}{dy'}y''.$$

mithin

$$L = \frac{dp}{dy} - \frac{dr}{dx} - \frac{dr}{dy}y' + \left(\frac{dq}{dy} - \frac{dr}{dy'}\right)y'' = 0.$$

Diese Gleichung soll identisch bestehen. Da nun der nicht in Klammern eingeschlossene Theil von  $L$  offenbar kein  $y''$  enthält, so besteht sie nur dann, wenn folgende Gleichungen zugleich Statt finden:

$$\frac{dp}{dy} - \frac{dr}{dx} - \frac{dr}{dy}y' = 0,$$

$$\frac{dq}{dy} - \frac{dr}{dy'} = 0,$$

in welche also die Gleichung  $L=0$  zerfällt.

Oben war  $du = M\delta y + N\delta y',$

und  $M = v' - \frac{d(v'')}{dx}, N = v'.$

Nun muß aber  $v = p + qy''$  sein; also

$$M = \frac{dp}{dy'} + \frac{dq}{dy'} y'' - \frac{d(q)}{dx}, \quad N = q,$$

oder, wenn man  $\frac{d(q)}{dx}$  entwickelt und einsetzt,

$$M = \frac{dp}{dy'} - \frac{dq}{dx} - \frac{dq}{dy} y' = r;$$

also  $N = q$  und  $M = r.$

Da nun  $\frac{dq}{dy} = \frac{dr}{dy'}$  war, so ist auch  $\frac{dM}{dy'} = \frac{dN}{dy'}$  w. g. b. w.

Es sei z. B.  $v = \frac{yy' - xy'y' + xyy''}{y^2}$ ; so folgt

$$\frac{dv}{dy} = \frac{-yy' + 2xy'y' - xyy''}{y^2}, \quad v' = \frac{y - 2xy'}{y^2}, \quad v'' = \frac{x}{y},$$

welche Werthe der Bedingung  $L = 0$  genügen, wie man leicht findet. Daher ist  $v$  integrabel. Man erhält  $M = -\frac{xy'}{y^2},$

$N = \frac{x}{y}$ , also auch  $\frac{dM}{dy'} = \frac{dN}{dy'}$ , und

$$\delta u = \frac{-xy'\delta y}{y^2} + \frac{x\delta y'}{y} = \frac{x(y\delta y' - y'\delta y)}{y^2} = x\delta\left(\frac{y'}{y}\right);$$

folglich  $u = \int v dx = \frac{xy'}{y}.$

151. Um zu finden, ob  $v$ , wenn es ein erstes Integral hat, also die Bedingung  $L = 0$  erfüllt ist, auch ein zweites Integral hat, nehme man das erste Integral von  $\delta v$ ,

$$\delta u = v'\delta y + v''\frac{d\delta y}{dx} - \frac{d(v'')}{dx}\delta y.$$

Soll nun  $u$  integrabel sein, so muß auch  $\delta u$  integrabel sein, und man erhält wieder, durch theilweise Integration

$$\int \delta u \cdot dx = \iint \delta v dx^2 = v'' \delta y + \int \left[ v' - 2 \frac{d(v'')}{dx} \right] \delta y dx.$$

Demnach muß, wenn  $v$  ein zweites Integral haben soll, außer der Bedingung  $L=0$  noch die zweite Bedingung

$$L' = v' - 2 \frac{d(v'')}{dx} = 0$$

erfüllt werden. Man setze wieder  $v = p + qy''$ , so erhält man

$$L' = \frac{dp}{dy'} - 2 \frac{dq}{dx} - 2 \frac{dq}{dy'} y' - \frac{dq}{dy'} y'' = 0.$$

Diese Gleichung kann nur dann bestehen, wenn  $\frac{dq}{dy'} = 0$  ist, weil in den übrigen Gliedern  $y''$  nicht vorkommt. Also muß

$$\frac{dp}{dy'} - 2 \frac{dq}{dx} - 2 \frac{dq}{dy'} y' = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dq}{dy'} = 0$$

sein, wenn  $v$  ein zweites Integral haben soll. Sind diese Bedingungen erfüllt, so erhält man

$$\iint \delta v \cdot dx^2 = \int \delta u \cdot dx = v'' \delta y = q \delta y;$$

folglich findet man das zweite Integral  $\iint v dx^2$ , wenn man den Ausdruck  $q \delta y$ , worin  $q$  eine Function von  $x$  und  $y$ , ohne  $y'$  ist, in Bezug auf  $y$ , d. h. nach  $\delta$ , integriert. In dem obigen Beispiele wird die erste der beiden vorstehenden Bedingungen-Gleichungen nicht befriedigt, also findet ein zweites Integral nicht Statt.

152. Wird die Bedingung  $L=0$  nicht erfüllt, so findet man oft merkwürdige Resultate, wenn man zwischen  $x$  und  $y$  gerade die Gleichung  $L=0$  setzt, welche alsdann nicht mehr identisch besteht, sondern wodurch  $y$  von  $x$  abhängig gemacht wird.

Es sei  $v = f(x, y, y')$ ; man verlangt, wenn es angeht,  $y$  als Function von  $x$  so zu bestimmen, daß für  $x=a$ ,  $y=A$ , und für  $x=b$ ,  $y=B$  werde, und zugleich das Integral

$$u = \int_a^b f(x, y, y') dx$$

den größten oder kleinsten Werth erhalte, dessen es, unter Voraussetzung der ersten Bedingung, fähig ist. Man nehme an, daß die Function  $y$  in eine andere Function

$$y + k\delta y + \frac{k^2}{2}\delta^2 y + \dots$$

mithin  $y'$  in  $y' + k\frac{d\delta y}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d\delta^2 y}{dx} + \dots$ ;

übergehe, so geht  $v$ , auf entsprechende Weise, über in

$$V = v + k\delta v + \frac{k^2}{2}\delta^2 v + \dots$$

und mithin das Integral  $\int v dx$  in

$$\int V dx = \int v dx + k \int \delta v \cdot dx + \frac{k^2}{2} \int \delta^2 v \cdot dx + \dots$$

In dieser Reihe kann man offenbar  $k$  so klein annehmen, daß das erste Glied,  $k \int \delta v \cdot dx$ , wenn es nicht Null ist, die Summe aller übrigen übertrifft. Alsdann aber würde dieses Glied entgegengesetzte Zeichen erhalten, wenn  $k$  das eine Mal positiv, das andere Mal negativ genommen würde, und mithin wäre der Werth von  $\int v dx$  kein größter oder kleinster. Die Bedingung des Größten oder Kleinsten ist also, ganz auf ähnliche Weise, wie bei den Functionen einer Veränderlichen, die, daß der Coefficient der ersten Potenz von  $k$ , Null sei; also

$$\int_a^b \delta v \cdot dx = 0.$$

Nun war  $v = f(x, y, y')$ ; mithin

$$\delta v = \frac{dv}{dy} \delta y + v' \delta y',$$

also, wenn wieder theilweise integrirt wird,

$$\int \delta v \cdot dx = v' \delta y + \int \left[ \frac{dv}{dy} - \frac{d(v')}{dx} \right] \delta y dx.$$

In den vom Integralzeichen freien Theil des vorstehenden Ausdruckes muß man die Werthe setzen, welche  $x$ ,  $y$  und  $\delta y$ , an

den Grenzen  $a$  und  $b$  erhalten, und sodann ihren Unterschied nehmen, um den Werth des Integrals zwischen den Grenzen  $a$  und  $b$  zu finden. Nun ist aber vorgeschrieben, daß für  $x=a$ ,  $y=A$  sein soll; es muß demnach an der Grenze  $a$  die gesammte Aenderung von  $y$ , d. i.  $k\delta y + \frac{k^2}{2}\delta^2 y + \dots$ , Null sein; also müssen, für  $x=a$ , sämtliche Coefficienten von  $k$  in dem Ausdrücke der Aenderung von  $y$ , Null sein; insbesondere also  $\delta y=0$ . Eben so muß auch an der anderen Grenze  $b$ , die Variation von  $y$  Null sein, weil auch hier der Werth  $B$  von  $y$  vorgeschrieben ist. Mithin ist der vom Integralzeichen freie Theil von selbst Null, und um die Bedingung des Größten oder Kleinsten zu erfüllen, muß nur noch

$$\int_a^b \left[ \frac{dv}{dy} - \frac{d(v')}{dx} \right] \delta y \, dx = 0$$

sein, in welcher Gleichung  $\delta y$  eine ganz beliebige Function von  $x$  bedeutet, die nur an den Grenzen  $a$  und  $b$  der Bedingung, Null zu sein, unterworfen ist. Daher kann offenbar das vorstehende Integral nicht anders Null sein, als wenn

$$L = \frac{dv}{dy} - \frac{d(v')}{dx} = 0$$

ist; welche Gleichung die Bedingung des Größten oder Kleinsten darstellt. Um zu entscheiden, ob wirklich ein Größtes oder Kleinstes vorhanden ist, und welches von beiden, muß man die Glieder zweiter Ordnung des Ausdrucks

$$V = f(x, y + k\delta y + \frac{k^2}{2}\delta^2 y, y' + k\delta y' + \frac{k^2}{2}\delta^2 y' \dots)$$

entwickeln. Dieselben sind

$$\frac{k^2 \delta^2 v}{2} = \left[ \frac{1}{2} \frac{d^2 v}{dy^2} \delta y^2 + \frac{d^2 v}{dy dy'} \delta y \delta y' + \frac{1}{2} \frac{d^2 v}{dy'^2} \delta y'^2 + \frac{1}{2} \frac{dv}{dy} \delta^2 y + \frac{1}{2} \frac{dv}{dy'} \delta^2 y' \right] k^2. \quad \left. \vphantom{\frac{k^2 \delta^2 v}{2}} \right\}$$

Um das Integral  $\int \delta^2 v \cdot dx$  darzustellen, betrachte man zuerst die

beiden letzten Glieder - des vorstehenden Ausdruckes für  $\delta^2 v$ ,  
nämlich  $\left(\frac{dv}{dy} = v' \text{ gesetzt, wie oben}\right)$

$$\frac{dv}{dy} \delta^2 y + v' \delta^2 y'$$

und bemerke, daß offenbar wieder  $\delta^2 y' = \frac{d\delta^2 y}{dx}$  ist. Nimmt man nun von diesen Gliedern das Integral, so erhält man, nach theilweiser Integration,

$$\frac{dv}{dy} \delta^2 y + \int \left[ \frac{dv}{dy} - \frac{d(v')}{dx} \right] \delta^2 y dx.$$

Da nun an den Grenzen  $\delta^2 y = 0$ , und ferner überhaupt

$$\frac{dv}{dy} - \frac{d(v')}{dx} = 0$$

ist, so ist dieser Theil des Integrals  $\int \delta^2 v dx$  Null; und demnach hat man

$$\int \delta^2 v dx = \int \left[ \frac{d^2 v}{dy^2} \delta y^2 + 2 \frac{d^2 v}{dy dy'} \delta y \delta y' + \frac{d^2 v}{dy'^2} \delta y'^2 \right] dx.$$

Dieses Integral von  $a$  bis  $b$  genommen, muß sein Zeichen nicht wechseln, welche Function von  $x$  für  $\delta y$  auch gesetzt werde; was der Fall sein wird, wenn der eingeklammerte Ausdruck

$$\frac{d^2 v}{dy^2} \delta y^2 + 2 \frac{d^2 v}{dy dy'} \delta y \delta y' + \frac{d^2 v}{dy'^2} \delta y'^2,$$

(nachdem  $y$ , in  $v$ , als Function von  $x$  der Bedingung des Größten oder Kleinsten gemäß ausgedrückt ist,) für alle Werthe von  $x$  zwischen  $a$  und  $b$ , und für jeden beliebigen von  $\delta y$ , sein Zeichen nicht wechselt.

Im Folgenden werden nur solche Aufgaben vorgelegt werden, wo offenbar ist, daß ein Größtes oder Kleinstes Statt finden muß, mithin die Untersuchung der Glieder zweiter Ordnung entbehrt werden kann.

153. Es sei z. B.  $v = \sqrt{1+y'^2}$ ; man verlangt den klein-



sten Werth des Integrals  $\int v dx$  zwischen gegebenen festen Grenzen.

Da hier offenbar  $\int_a^b v dx$  nichts weiter ist, als die Länge einer Curve zwischen zwei gegebenen Punkten, indem für  $x=a$ ,  $y=A$  und für  $x=b$ ,  $y=B$  werden soll; so heißt diese Aufgabe geometrisch nichts Anderes, als daß die kürzeste Linie in einer Ebene, zwischen zwei gegebenen Punkten verlangt wird. Man erhält

$$\frac{dv}{dy}=0, \frac{dv}{dy'}=v'=\frac{y'}{v}; \quad \frac{d^2v}{dy^2}=0, \frac{d^2v}{dy dy'}=0, \frac{d^2v}{dy'^2}=\frac{1}{v^3};$$

folglich ist, nach der obigen allgemeinen Gleichung

$$\frac{dv}{dy} - \frac{d(v')}{dx} = 0,$$

die gesuchte Gleichung der kürzesten Linie

$$\frac{d\left(\frac{y'}{v}\right)}{dx} = 0;$$

also  $\frac{y'}{v} = \text{const.}$ ; woraus weil  $v = \sqrt{1+y'^2}$  ist, folgt:

$$y' = c,$$

$c$  eine Constante. Die gesuchte Linie ist demnach die Gerade, wie bekannt.

Die Glieder der zweiten Ordnung geben bloß

$$\frac{d^2v}{dy'^2} \delta y'^2 = \frac{1}{v^3} \delta y'^2;$$

folglich behält das Integral

$$\int \delta^2 v \cdot dx = \int \frac{\delta y'^2}{v^3} dx$$

für jedes beliebige  $\delta y$  beständig das nämliche Zeichen; und zwar ist dieses Zeichen positiv, wenn der Unterschied der Grenzen  $b-a$  positiv ist, wie man annehmen kann; also findet ein kleinster Werth wirklich Statt, was aber ohnehin klar ist.

Aus der Gleichung  $y' = c$  oder  $dy = c dx$  erhält man durch

weitere Integration, wenn  $h$  eine neue Constante ist,  $y = cx + h$ . Die Constanten  $c$  und  $h$  sind so zu bestimmen, daß die Linie durch die beiden gegebenen Punkte gehe; woraus man folgende Gleichung für dieselbe erhält:

$$\frac{y-B}{A-B} = \frac{x-b}{a-b}.$$

154. Es werde ferner die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten im Raume verlangt. Da die Länge derselben durch das

Integral 
$$\int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

ausgedrückt wird, so ist hier  $v = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$ , und es sind zwei Größen, nämlich  $y$  und  $z$ , als Functionen von  $x$  zu bestimmen. Die Methode ist indessen immer die nämliche. Man schreibe  $y + k\delta y + \dots$ ,  $z + k\delta z + \dots$  statt  $y$  und  $z$ , und entwickle die Variation  $\delta v$ ; so muß das Integral  $\int \delta v \cdot dx$  Null sein. Man kann die Rechnung folgendermaßen machen:

Es ist, wenn  $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = ds$  gesetzt wird,

$$\delta v = \frac{dy}{ds} \delta dy + \frac{dz}{ds} \delta dz,$$

folglich

$$\delta \int v dx = \int \delta v \cdot dx = \int \left( \frac{dy}{ds} \delta dy + \frac{dz}{ds} \delta dz \right) dx.$$

Durch theilweise Integration ergibt sich

$$\delta \int v dx = \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z - \int \left[ d\left(\frac{dy}{ds}\right) \delta y + d\left(\frac{dz}{ds}\right) \delta z \right];$$

und weil  $\delta y$ ,  $\delta z$  an den Grenzen Null sind, und  $\delta \int v dx = 0$  sein soll, muß

$$d\left(\frac{dy}{ds}\right) \delta y + d\left(\frac{dz}{ds}\right) \delta z = 0 \quad A.$$

sein. In dieser Gleichung sind  $\delta y$ ,  $\delta z$  ganz beliebig und unabhängig von einander; dieselbe kann also nur dann bestehen, wenn

$$d\left(\frac{dy}{ds}\right)=0, \quad d\left(\frac{dz}{ds}\right)=0,$$

$$\text{mithin} \quad \frac{dy}{ds}=c, \quad \frac{dz}{ds}=c'$$

ist;  $c$  und  $c'$  sind Constanten. Diese Gleichungen geben eine gerade Linie, wie leicht zu sehen ist.

Es kann aber auch die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten auf einer gegebenen Fläche verlangt werden. Da die Bogenlänge immer durch  $\int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$  ausgedrückt wird, so findet man durch Variation wieder die nämliche Gleichung A.,

$$d\left(\frac{dy}{ds}\right)\delta y + d\left(\frac{dz}{ds}\right)\delta z = 0.$$

In dieser Gleichung sind  $\delta y$  und  $\delta z$  nicht mehr unabhängig von einander, wie vorhin. Setzt man nämlich in der Gleichung der Fläche  $f(x, y, z) = 0$ ,  $y + k\delta y + \dots$ ,  $z + k\delta z + \dots$  statt  $y$  und  $z$ , und entwickelt nach Potenzen von  $k$ , so erhält man

$$f + k\delta f + \frac{k^2}{2}\delta^2 f + \dots = 0$$

und die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von  $k$  müssen, einzeln, Null sein. Nun findet man sofort

$$\delta f = \frac{df}{dy}\delta y + \frac{df}{dz}\delta z, \quad \text{also, muß} \quad \frac{df}{dy}\delta y + \frac{df}{dz}\delta z = 0$$

sein, oder, wenn der Quotient  $-\frac{df}{dy} : \frac{df}{dz}$ , d. i.  $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ , wie gewöhnlich, mit  $q$  bezeichnet wird,

$$\delta z - q\delta y = 0.$$

Demnach giebt die Gleichung A., wenn für  $\delta z$  sein Werth  $q\delta y$  gesetzt wird,

$$d\left(\frac{dy}{ds}\right) + qd\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0,$$

eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für die verlangte kürzeste Linie, welche nachher noch näher betrachtet werden soll.

155. Eine bemerkenswerthe Aenderung der Aufgabe in §. 152. entsteht, wenn die Grenzen des Integrals  $\int v dx$ , welches einen größten oder kleinsten Werth erhalten soll, nicht fest sind, sondern nur gewissen Bedingungen Genüge leisten müssen. Um die Bedeutung hiervon anschaulich zu machen, dient am besten das Beispiel der kürzesten Linie. Man kann nämlich die kürzeste Linie auf einer Fläche nicht zwischen zwei Puncten, sondern zwischen zwei, ihrer Beschaffenheit und Lage nach, gegebenen Curven verlangen. Um die Methode darzustellen, reicht es hin, wenn nur eine Grenze als veränderlich, die andere aber als fest angenommen wird, also z. B. die kürzeste Linie von einem gegebenen Puncte aus nach einer gegebenen Curve verlangt wird.

Es werde also der größte oder kleinste Werth des Integrals

$$\int f(x, y, y') dx$$

verlangt. An der einen Grenze mögen die Werthe von  $x$  und  $y$  gegeben sein (dieselbe ist in dem vorstehenden Integral unbezeichnet gelassen worden); an der anderen Grenze ist aber der Werth von  $x$ , nicht gegeben, sondern es wird nur verlangt, daß an dieser Grenze  $y$  eine gegebene Function von  $x$ , also  $y_1 = \psi x_1$  sei, wenn mit  $y_1$  der Werth von  $y$ , an der Grenze, bezeichnet wird. Man sieht, daß die Gleichung  $y_1 = \psi x_1$ , verbunden mit der Gleichung der Fläche, die begrenzende Curve bestimmt.

Man stelle sich zuerst den Werth von  $x_1$  als gefunden, oder die Grenze  $x_1$  als fest vor; so muß der Werth des Integrals

$$\int f(x, y, y') dx$$

ein größter oder kleinster unter allen denen sein, welche für die nämlichen festen Grenzen möglich sind. Es muß also genau die nämliche Gleichung für das Größte oder Kleinste gelten, wie vorhin, als die Grenzen fest waren, nämlich:

$$\frac{dv}{dy} - \frac{d(v')}{dx} = 0.$$

Um dies auch an einem Beispiele anschaulich zu machen, so ist offen:

bar, daß die kürzeste Linie zwischen zwei Curven, auf einer Fläche, auch die kürzeste zwischen ihren beiden in diesen Curven befindlichen Endpuncten sein muß; daß also die Veränderlichkeit der Grenzen keinen Einfluß auf die Differentialgleichung der Curve, sondern nur auf die Bestimmung der Constanten der Integration haben kann. Wenn nun die Grenzwerthe von  $y$  beide willkürlich gegeben sein, oder beliebigen Bedingungen unterworfen werden sollen, so kann dies nur geschehen, wenn die Gleichung

$$L = \frac{dv}{dy} - \frac{d(v')}{dx} = 0,$$

aus welcher  $y$  zu bestimmen ist, eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, deren Integration zwei willkürliche Constanten herbeiführt. Also muß  $v' = \frac{dv}{dy}$  nicht unabhängig von  $y'$  sein; denn sonst würde nur eine Differentialgleichung erster Ordnung entstehen.

Man kann sich indessen überzeugen, daß, wenn  $\frac{dv'}{dy} = 0$ , dagegen  $\frac{dv'}{dy}$  nicht Null ist, der Werth des Integrals  $\int_a^b \delta^2 v \cdot dx$  (§. 152.), dessen Ausdruck in diesem Falle folgender ist:

$$\int_a^b \left( \frac{d^2 v}{dy^2} \delta y^2 + 2 \frac{dv'}{dy} \delta y \delta y' \right) dx,$$

nicht für jedes beliebige  $\delta y$  das nämliche Zeichen behalten, also gar kein größter oder kleinster Werth des Integrals  $\int v dx$  Statt finden kann. Indessen wird dies hier nur gelegentlich bemerkt, und soll nicht weiter ausgeführt werden.

Vorausgesetzt also, daß die Gleichung  $L=0$  zweiter Ordnung ist, so liefert ihre Integration  $y = \varphi(x, c, c')$ , wo  $c$  und  $c'$  Constanten sind. Da die Werthe von  $x$  und  $y$  an der einen Grenze gegeben sind, so wird dadurch eine der Constanten eliminiert; daher erhält man nur noch  $y = \varphi(x, c)$ , und die Constante  $c$  ist aus der Bedingung zu bestimmen, daß für  $x = x_1$ ,

$y = \psi x_1 = y_1$  werde, also daß

$$y_1 = \varphi(x_1, c)$$

sein muß.

Nun soll der Werth von  $x_1$  so bestimmt werden, daß das

Integral 
$$\int^{x_1} f(x, y, y') dx$$

worin  $y = \varphi(x, c)$ , größer oder kleiner werde, als für jeden anderen Werth von  $x_1$ . Man ändere also  $x_1$  um  $\delta x_1$ , und zugleich die davon abhängige Constante  $c$  um  $\delta c$ , so werden  $y$  und  $y'$  in  $y + \frac{dy}{dc} \delta c$  und  $y' + \frac{dy'}{dc} \delta c$  übergehen, und das geänderte Integral demnach sein:

$$\int^{x_1 + \delta x_1} f\left(x, y + \frac{dy}{dc} \delta c, y' + \frac{dy'}{dc} \delta c\right) \cdot dx.$$

Man entwickle dieses Integral nach Potenzen von  $\delta x_1$  und  $\delta c$ ; so muß, wenn ein Größtes oder Kleinstes Statt finden soll, wie die Summe der der Glieder erster Ordnung Null sein. Das vorgelegte Integral läßt sich in zwei andere zerlegen, deren erstes bis  $x_1$ , das zweite von  $x_1$  bis  $x_1 + \delta x_1$  geht. Das Integral

$$\int_{x_1}^{x_1 + \delta x_1} f\left(x, y + \frac{dy}{dc} \delta c, y' + \frac{dy'}{dc} \delta c\right) dx$$

ist gleich dem Producte aus dem Intervalle  $\delta x_1$  in einen Mittelwerth der Function  $f$ ; und da man dieses Intervall beliebig klein annehmen darf, so kann man diesen Mittelwerth ohne Weiteres dem Werthe gleich setzen, welchen  $f(x, y, y')$  für  $x = x_1$  erhält; also gleich  $\delta x_1 \cdot f(x_1, y_1, y'_1)$ . Das andere Integral

$$\int^{x_1} f\left(x, y + \frac{dy}{dc} \delta c, y' + \frac{dy'}{dc} \delta c\right) dx$$

ist gleich

$$\int^{x_1} f(x, y, y') dx + \int^{x_1} \left( \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dc} \delta c + \frac{df}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dc} \delta c \right) dx,$$

und der zweite Theil von dieser Summe ergibt sich durch theil-

weise Integration, weil  $\frac{dy'}{dc} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$  ist,

$$\int^{x_1} \left( \frac{df}{dy'} \cdot \frac{dy}{dc} + \frac{df}{dy'} \cdot \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} \right) \delta c dx =$$

$$\frac{df}{dy'} \cdot \frac{dy}{dc} \delta c + \int^{x_1} \left( \frac{df}{dy} - \frac{d\left(\frac{df}{dy'}\right)}{dx} \right) \frac{dy}{dc} \delta c dx,$$

wovon aber das letzte Glied Null ist, weil

$$L = \frac{df}{dy} - \frac{d\left(\frac{df}{dy'}\right)}{dx} = 0.$$

Die Glieder der ersten Ordnung der gesammten Aenderung, welche zusammen Null sein müssen, sind demnach

$$\delta x_1 f(x_1, y_1, y'_1) + \frac{df}{dy'} \cdot \frac{dy_1}{dc} \delta c,$$

wo überall für  $x$  und  $y$  die Werthe  $x_1$  und  $y_1$  zu setzen sind.

Nun ist

$$y_1 = \varphi(x_1, c),$$

demnach, wenn  $x_1, c, y_1$  in  $x_1 + \delta x_1, c + \delta c, y_1 + \delta y_1$  übergehen,

$$\delta y_1 = \frac{dy_1}{dx_1} \delta x_1 + \frac{dy_1}{dc} \delta c,$$

also 
$$\frac{dy_1}{dc} \delta c = \delta y_1 - \frac{dy_1}{dx_1} \delta x_1 = \delta y_1 - y'_1 \delta x_1$$

und mithin die Bedingungsgleichung für die veränderliche Grenze folgende:

$$\delta x_1 f(x, y_1, y'_1) + \frac{df}{dy'} (\delta y_1 - y'_1 \delta x_1) = 0.$$

Da nun ferner  $y_1 = \psi x_1$  gegeben, mithin  $\delta y_1 = \psi' x_1 \delta x_1$  ist, so erhält man durch Elimination von  $\delta y_1$  eine von  $\delta$  unabhängige Gleichung zwischen  $x_1$  und  $y_1$ , aus welcher, nach Elimination von  $y_1$ , der Werth von  $x_1$  gefunden werden kann.

156. Wird z. B. die kürzeste Linie auf einer Fläche, von einem Punkte nach einer gegebenen Curve verlangt; so sei  $F(x, y, z) = 0$  die Gleichung der Fläche, und  $y = \psi x$  die zweite Gleichung für die auf der Fläche liegende Curve., Aus der Gleichung der Fläche hat man

$$dz = p dx + q dy, \text{ oder } z' = p + q y',$$

wo  $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ ,  $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$  als Functionen von  $x$  und  $y$  zu betrachten sind, und  $z' = \frac{dz}{dx}$ ,  $y' = \frac{dy}{dx}$  gesetzt ist. Demnach ist

$$v = f(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$$

mithin

$$\frac{df}{dy'} = \frac{y' + qz'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}$$

und folglich

$$f(x, y, y') - \frac{df}{dy'} y' = \frac{1 + pz'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}.$$

Daher erhält man folgende Bedingung für die Grenze:

$$(1 + pz')\delta x_1 + (y' + qz')\delta y_1 = 0$$

oder

$$\delta x_1 + y'\delta y_1 + z'(p\delta x_1 + q\delta y_1) = 0.$$

In dieser Gleichung müssen statt  $y'$ ,  $z'$  die Werthe  $\frac{dy_1}{dx_1}$ ,  $\frac{dz_1}{dx_1}$  gesetzt werden, welche diese Größen an der Grenze erhalten; setzt man noch für  $p\delta x_1 + q\delta y_1$  seinen Werth  $\delta z_1$  ein, und dividirt mit  $\delta x_1$ , so kommt:

$$1 + \frac{dy_1}{dx_1} \cdot \frac{\delta y_1}{\delta x_1} + \frac{dz_1}{dx_1} \cdot \frac{\delta z_1}{\delta x_1} = 0. \quad a.$$

In vorstehender Gleichung bezieht sich das Zeichen  $d$  auf die kürzeste Linie,  $\delta$  auf die Grenzcurve, so daß die Tangente der kürzesten Linie, in ihrem Endpunkte, durch die Gleichungen

$$\frac{u - x_1}{dx_1} = \frac{v - y_1}{dy_1} = \frac{w - z_1}{dz_1},$$

dagegen die Tangente der Grenzcurve, in demselben Punkte,



durch 
$$\frac{u-x_1}{\delta x_1} = \frac{v-y_1}{\delta y_1} = \frac{w-z_1}{\delta z_1}$$

ausgedrückt werden. Beide Tangenten stehen senkrecht auf einander, wenn

$$dx_1 \delta x_1 + dy_1 \delta y_1 + dz_1 \delta z_1 = 0 \quad b.$$

ist. Da diese Gleichung mit der obigen a. einerlei ist, so besteht die Grenzbedingung, geometrisch ausgedrückt, darin, daß die kürzeste Linie senkrecht auf der Grenzcurve stehen muß.

157. Die kürzeste Linie auf einer Fläche hat merkwürdige Eigenschaften, deren vollständiger Beweis jedoch eine geometrische Untersuchung voraussetzt, die hier zunächst folgen soll. Man denke sich nämlich auf einer gegebenen krummen Fläche eine beliebige Curve gezeichnet, und (nach §. 81.) eine abwickelbare Berührungsfläche an dieselbe gelegt. Man verlangt zu wissen, was aus dieser Curve wird, wenn die Berührungsfläche in eine Ebene ausgebreitet, und mit ihr die Curve abgewickelt wird.

Die gegebene Fläche sei zuerst eine Kugel, und die darauf gezeichnete Curve ein Kreis. Die berührende Fläche ist alsdann ein gerader Kegel, oder, wenn der Kreis ein größter ist, ein Cylinder. Man kann aber den letzteren Fall als im ersten allgemeinen Fall enthalten ansehen, und demnach nur diesen betrachten. Es sei  $R$  der Halbmesser des Kreises,  $\rho$  die Seite des Berührungseckels, von der Spitze des Kegels bis zu dem berührten Kreise;  $i$  die Neigung von  $R$  gegen die Berührungsebene der Kugel, also auch gegen die Seite  $\rho$  des Kegels; so lehrt die geometrische Anschauung sehr leicht, daß  $\rho \cos i = R$  ist.

Wickelt man nun den Kreis von der Kugel, vermittelt des Kegels, ab, so geht derselbe in einen Kreisbogen über, dessen Halbmesser die Seite  $\rho$  des Kegels ist. Es findet also zwischen dem Kreise und seiner Abwicklung der Zusammenhang Statt, welchen die Gleichung  $\rho \cos i = R$  ausspricht, in welcher sich  $\rho$  als der Krümmungshalbmesser der abgewickelten Curve betrachten läßt.

Nun sei ferner eine beliebige Curve auf einer beliebigen Fläche gegeben, und die abwickelbare Berührungsfläche angelegt. Es sei  $R$  der Krümmungshalbmesser der Curve in irgend einem Punkte  $B$ , und  $\rho$  der Krümmungshalbmesser der abgewickelten Curve, in dem entsprechenden Punkte; ferner  $i$  die Neigung des Krümmungshalbmessers  $R$  gegen die Berührungsebene der Fläche, in demselben Punkte  $B$ . Man errichte noch in  $B$  die Normale der Fläche, und in dem Mittelpunkte des Krümmungskreises ein Loth auf der Ebene  $K$  desselben, so ist offenbar, daß dieses Loth die Normale der Fläche in einem gewissen Punkte  $A$  treffen muß, weil eine durch den Krümmungshalbmesser  $R$  und die Normale der Fläche gelegte Ebene senkrecht auf der Ebene  $K$  des Krümmungskreises steht. Diesen Punkt  $A$  nehme man zum Mittelpunkte, und das Stück der Normale von  $A$  bis zum Berührungspunkte  $B$  zum Halbmesser einer Kugel; so ist der Krümmungskreis vom Halbmesser  $R$  ein Parallelkreis dieser Kugel, welche mit der Fläche die Berührungsebene im Punkte  $B$  gemein hat. Das Bogenelement der Curve in  $B$  kann nun angesehen werden als dem Krümmungskreise selbst angehörig, und das ihm entsprechende Element der abwickelbaren Berührungsfläche als ein Element des Kegels, welcher die Kugel vom Halbmesser  $AB$  in dem Kreise  $R$  berührt. Folglich gilt für dieses Element wiederum die Gleichung  $\rho \cos i = R$ , in welcher  $\rho$  zunächst die Seite des berührenden Kegels bedeutet, die aber, nach vollzogener Abwicklung, in den Krümmungshalbmesser der abgewickelten Curve übergeht. Hierdurch erhält man folgenden merkwürdigen Satz:

Eine Curve werde von einer Fläche, vermittelt einer angelegten abwickelbaren Berührungsfläche, abgewickelt; es sei  $R$  der Krümmungshalbmesser der Curve in irgend einem Punkte  $B$ ,  $\rho$  der Krümmungshalbmesser der abgewickelten Curve in dem entsprechenden Punkte, und  $i$  die Neigung des Krümmungshalbmessers  $R$  gegen die an  $B$  gelegte Berührungsebene der Fläche; so ist  $\rho \cos i = R$  oder  $\frac{1}{\rho} = \frac{\cos i}{R}$ .

Nun ist die Gleichung der anschließenden Ebene oder der Ebene des Krümmungskreises folgende:

$$A(u-x) + B(v-y) + C(w-z) = 0,$$

wo A, B, C dasselbe sind, wie in §. 70.; und die der Berührungsebene:

$$-p(u-x) - q(v-y) + w-z = 0.$$

Man setze  $\mu = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ ,  $\nu = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ , so erhält man für die Neigung  $i$  der berührenden gegen die anschließende Ebene

$$\mu\nu \cdot \cos i = C - Ap - Bq.$$

Man setze  $d^2s = 0$ , also  $dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z = ds d^2s = 0$ , und schaffe mit Hülfe dieser Gleichung  $d^2x$  aus C und B weg, so findet man leicht:

$$\begin{aligned} -Bdx &= dy dz d^2y + dz^2 d^2z + dx^2 d^2z, \\ Cdx &= dy^2 d^2y + dz dy d^2z + dx^2 d^2y, \end{aligned}$$

und hieraus, wenn man die Glieder, welche  $d^2y$ , und wieder die, welche  $d^2z$  enthalten, zusammenfaßt, und gehörig reducirt:

$$(C - Ap - Bq)dx = ds^2(d^2y + qd^2z).$$

Demnach erhält man

$$\mu\nu \cos i \cdot dx = ds^2(d^2y + qd^2z).$$

Ferner ist der Krümmungshalbmesser  $R = \frac{ds^3}{\mu}$ ; (§. 70.), also wird

$$\frac{\cos i}{R} = \frac{d^2y + qd^2z}{\nu dx \cdot ds} = \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right) + qd\left(\frac{dz}{ds}\right)}{\nu dx} = \frac{1}{\rho},$$

der Ausdruck für den Krümmungshalbmesser  $\rho$  der abgewickelten Curve.

158. Soll also eine Gleichung für die abgewickelte ebene Curve gefunden werden, so nehme man in der Ebene derselben beliebige rechtwinkliche Coordinaten  $u$  und  $v$  an; und drücke das Bogenelement  $ds$  und den Krümmungshalbmesser  $\rho$  der abge-

wickelten Curve durch die Coordinaten  $u$  und  $v$  vermittelt der folgenden bekannten Formeln aus:

$$ds = \sqrt{du^2 + dv^2} \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{(du^2 + dv^2)^{\frac{3}{2}}}{du d^2 v - dv d^2 u}.$$

Offenbar muß das Bogenelement der abgewickelten Curve dem entsprechenden Bogenelement der gegebenen Curve, auf der Fläche, gleich sein. Demnach erhält man folgende Gleichung:

$$du^2 + dv^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad 1.$$

Ferner ist, nach dem Obigen,  $\varrho = \frac{R}{\cos i}$ , also

$$\frac{(du^2 + dv^2)^{\frac{3}{2}}}{du d^2 v - dv d^2 u} = \frac{R}{\cos i}, \quad 2.$$

Die Größe  $\frac{R}{\cos i}$  ist als Function von  $x, y, z$  ausgedrückt worden.

Da nun vermöge der Gleichungen der Curve,  $y$  und  $z$  Functionen von  $x$  sind, so erhält man durch Wegschaffung von  $y$  und  $z$ , zur Bestimmung der abgewickelten Curve, zwei Gleichungen von der Form:

$$\sqrt{du^2 + dv^2} = \varphi x \cdot dx$$

und

$$\frac{du d^2 v - dv d^2 u}{(du^2 + dv^2)^{\frac{3}{2}}} = \psi x,$$

wo  $\varphi x$  und  $\psi x$  zwei bekannte Functionen von  $x$  sind. Multiplicirt man dieselben in einander, so kommt

$$\frac{du d^2 v - dv d^2 u}{du^2 + dv^2} = \psi x \cdot \varphi x \cdot dx$$

Die Größe links ist aber gleich  $d \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{dv}{du} \right)$ ; also erhält

man durch Integration  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{dv}{du} = \int \psi x \cdot \varphi x \cdot dx + \text{Const.}$ ,

und mithin

$$\frac{dv}{du} = \operatorname{tg} [c + \int \psi x \cdot \varphi x \cdot dx] = \operatorname{tg} X.$$

Hieraus folgt  $1 + \left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 X}$ , also

$$du = \sqrt{du^2 + dv^2} \cdot \cos X, \quad dv = \sqrt{du^2 + dv^2} \cdot \sin X,$$

mithin, wenn man für  $\sqrt{du^2 + dv^2}$  seinen Werth  $\varphi x \, dx$  setzt,

$$du = \varphi x \cdot \cos X \cdot dx, \quad dv = \varphi x \cdot \sin X \cdot dx;$$

also durch Integration

$$u - a = \int \varphi x \cdot \cos X \cdot dx, \quad v - b = \int \varphi x \cdot \sin x \cdot dx;$$

$a$  und  $b$  willkürliche Constanten.

Vermittelt diese Gleichungen wird man  $u, v$  als Functionen von  $x$  ausgedrückt erhalten, und durch Elimination von  $x$  aus beiden Ausdrücken die Gleichung zwischen  $u$  und  $v$  finden, welche die der abgewickelten Curve ist. Dieselbe enthält drei willkürliche Constanten, deren Bestimmung von der Wahl der Coordinatenachsen  $u, v$  in der Ebene der abgewickelten Curve abhängt. Die Auflösung der in diesem §. vorgelegten Aufgabe, nämlich die Gleichung der abgewickelten Curve zu finden, ist hier nur kurz angedeutet worden, weil dieselbe, obschon als geometrische Aufgabe bemerkenswerth, doch im Folgenden nicht weiter in Gebrauch kommen wird.

159. Man hat nach §. 157.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos i}{R} = \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right) + q d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{v dx}.$$

Für die kürzeste Linie auf einer krummen Fläche war

$$d\left(\frac{dy}{ds}\right) + q d\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0,$$

also  $\cos i = 0$ . Dies bedeutet, daß der Krümmungshalbmesser der kürzesten Linie in jedem Punkte senkrecht auf der Berührungsebene der Fläche steht, mithin in die Normale der Fläche fällt; was die erste allgemeine Eigenschaft der kürzesten Linie auf einer Fläche ausmacht. Ferner ist auch

$\frac{1}{\rho} = 0$ , d. h. wird die kürzeste Linie, vermittelt einer angelegten abwickelbaren Berührungsfläche, von der gegebenen Fläche in eine Ebene abgewickelt, so geht sie in eine gerade Linie über (weil das Krümmungsmaß  $\frac{1}{\rho}$  der abgewickelten ebenen Curve Null ist). Aus dieser zweiten allgemeinen Eigenschaft der kürzesten Linie auf einer Fläche kann man sofort schließen, daß die kürzeste Linie auf einer Kugel ein Bogen eines größten Kreises, und auf einem Kreiscylinder ein Bogen einer Schraubenlinie ist. Will man die letztere durch Rechnung finden, so führe man Polarcoordinaten  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  ein; alsdann ist  $r = a$  die Gleichung des Cylinders, und man erhält für das Bogenelement einer beliebigen Curve auf dem Cylinder:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = r^2 d\varphi^2 + dr^2 + dz^2 = a^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

Man muß also die Variation des Integrales  $\int \sqrt{a^2 d\varphi^2 + dz^2}$  Null setzen. Die Rechnung giebt, wenn nach  $z$  variirt wird,

$$\begin{aligned} \delta \int \sqrt{a^2 d\varphi^2 + dz^2} &= \delta \int ds = \\ \int \frac{dz \delta dz}{ds} &= \frac{dz}{ds} \delta z - \int d\left(\frac{dz}{ds}\right) \delta z; \end{aligned}$$

mithin  $d\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0$ , oder  $dz = c ds$  als Gleichung der kürzesten Linie. Nun ist aber  $ds = \sqrt{a^2 d\varphi^2 + dz^2}$ ; folglich

$$\begin{aligned} dz^2 &= c^2 (a^2 d\varphi^2 + dz^2); \\ dz &= \frac{ac}{\sqrt{1 - c^2}} d\varphi = k d\varphi, \end{aligned}$$

also  $z = k\varphi + k'$ , die Gleichung für eine Schraubenlinie, in welcher  $k$  und  $k'$  willkürliche Constanten sind.

Um die kürzeste Linie auf einem geraden Keg. zu finden, sei

$$z = r \operatorname{tg} \alpha$$

die Gleichung desselben; und  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Man erhält

$$ds = r^2 d\varphi^2 + dr^2 + dz^2 = r^2 d\varphi^2 + dr^2 (1 + \tan^2 \alpha),$$

oder 
$$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + \frac{dr^2}{\cos^2 \alpha}.$$

Setzt man nun  $\delta \int \sqrt{r^2 d\varphi^2 + \frac{dr^2}{\cos^2 \alpha}} = 0$ , und entwickelt die Variationen, so kommt, wenn  $\delta r = 0$  gesetzt, also nur nach  $\varphi$  variirt wird,

$$\delta \int ds = \int \frac{r^2 d\varphi \delta d\varphi}{ds} = \frac{r^2 d\varphi}{ds} \delta \varphi - \int d\left(\frac{r^2 d\varphi}{ds}\right) \delta \varphi.$$

Folglich muß, für die kürzeste Linie,

$$d\left(\frac{r^2 d\varphi}{ds}\right) = 0, \quad r^2 d\varphi = c ds \quad \text{sein.}$$

Diese Gleichung giebt

$$r^4 d\varphi^2 = c^2 \left( r^2 d\varphi^2 + \frac{dr^2}{\cos^2 \alpha} \right);$$

mithin 
$$d\varphi = \frac{c dr}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{r \sqrt{r^2 - c^2}},$$

oder, wenn man  $\frac{1}{r} = v$  setzt,

$$d\varphi = -\frac{c}{\cos \alpha} \cdot \frac{dv}{\sqrt{1 - c^2 v^2}};$$

also 
$$\cos \alpha \cdot d\varphi = d \operatorname{arc} \cos (cv);$$

oder 
$$\operatorname{arc} \cos (cv) = \varphi \cos \alpha + k,$$

mithin 
$$cv = \frac{c}{r} = \cos (\varphi \cos \alpha + k);$$

oder 
$$r \cos (\varphi \cos \alpha + k) = c,$$

als Gleichung der kürzesten Linie auf dem geraden Kegel; in welcher  $k$  und  $c$  willkürliche Constanten sind. Dieselben werden bestimmt, wenn die beiden Endpunkte der kürzesten Linie gegeben sind.

160. Es wird die Gleichung derjenigen Curve verlangt,

welche, auf einer gegebenen krummen Fläche, mit gegebenem Umringe, den größten Flächenraum einschließt. Diese Aufgabe ist von den bisherigen dadurch unterschieden, daß sie ein bedingtes Maximum verlangt, nämlich den größten Flächenraum unter der Bedingung eines gegebenen Umringes. Um dem Leser das Verständniß zu erleichtern, soll zuerst die Ebene als die gegebene Fläche angenommen werden. Es sei  $a$  der Anfang der Coordinaten (Fig. 28.),  $ab$  die Axe der  $x$ ,  $m$  und  $n$  zwei gegebene Punkte, deren Coordinaten  $am' = c$ ,  $m'm = g$ ,  $an' = c'$ ,  $n'n = g'$  sind; so sollen die Punkte  $m$  und  $n$  durch einen Bogen von gegebener Länge  $mn$  so mit einander verbunden werden, daß der Raum  $F = mm'n'n$  so groß als möglich sei.

Die Gleichung der gesuchten Curve sei  $y = fx$ ; der gesuchte Raum  $\int y dx$  sei  $F$ , und der Bogen  $L = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} =$  der gegebenen Größe  $\lambda$  (die Integrale sind von  $x = c$  bis  $x = c'$  zu nehmen). Man bilde den Ausdruck

$$F + hL,$$

in welchem  $h$  eine beliebige beständige Größe anzeigt, setze die Variation desselben

$$\delta(F + hL) = \delta F + h\delta L = 0,$$

und entwickle sie nach den bisherigen Regeln; so wird man diejenige Gleichung zwischen  $x$  und  $y$  erhalten, welche, für ein beliebiges  $h$ , den Gesamtwerth von  $F + hL$  zu einem größten macht; so daß, wenn man eine andere Gleichung (B.) zwischen  $x$  und  $y$  annimmt, die nur den vorgeschriebenen Grenzbedingungen Genüge thut, der daraus entstehende Werth  $(F' + hL')$  des obigen Ausdruckes nothwendig kleiner ist, als der aus (A.) berechnete. In der Gleichung A. ist aber noch  $h$ , als eine unbestimmte Constante, nach Erfüllung aller Grenzbedingungen, enthalten; wird demnach aus A. der Werth von  $L$  entwickelt, so wird auch dieser noch  $h$  enthalten. Man bestimme  $h$  aus der Gleichung  $L = \lambda$ ; so wird  $h$  eine Function von  $\lambda$ , und mithin als eine gegebenen Größe anzusehen sein. Der gefundene Werth



von  $h$  sei  $h'$ ; so liefert die Gleichung A. den größten Werth, den der Ausdruck  $F + h'L$  erhalten kann, und giebt zugleich  $L = \lambda$ . Gäbe es es nun noch eine Gleichung B., welche  $F' > F$  und zugleich  $L' = \lambda$  lieferte, so müßte auch offenbar

$$F' + h'L' > F + h'L$$

sein; also wäre  $F + h'L$  nicht das unbedingte Maximum, was gegen die Annahme ist.

Man findet also diejenige Gleichung zwischen  $x$  und  $y$ , welche den größten Werth von  $F$  und den gegebenen Werth von  $L$  liefert, d. h. man findet das bedingte Maximum von  $F$ , wenn man zuerst das unbedingte Maximum von

$$F + hL$$

nach den Regeln der Variationsrechnung sucht, und hierauf  $h$  so bestimmt, daß  $L$  seinen gegebenen Werth erhalte. Hieraus entspringt folgende, für die Anwendung der Variationsrechnung sehr wichtige Regel:

Es seien  $v$  und  $w$  zwei Functionen von  $x, y, y', y'',$  u. s. f. Wenn nun der größte oder kleinste Werth des Integrals  $F = \int v dx$  verlangt wird, unter der Bedingung, daß zugleich  $L = \int w dx$  einen gegebenen Werth habe; so multiplicire man  $L$  mit einer willkürlichen Constante  $h$ , und mache die Summe

$$F + hL$$

zu einem unbedingten Maximum oder Minimum, indem man, nach den früheren Regeln, die Variation  $\delta F + h\delta L = 0$  setzt. Hieraus wird sich eine Gleichung zwischen  $x$  und  $y$  ergeben, welche, nach gehöriger Bestimmung der Constanten, namentlich auch der Größe  $h$ , das verlangte bedingte Maximum oder Minimum von  $F$ , für einen gegebenen Werth von  $L$ , liefern muß. Diese Regel soll sogleich an dem vorgelegten Beispiele erläutert werden. Um die verlangte Curve zu finden, welche, bei gegebener Länge  $L$ , die größte Fläche  $F$  begränzt, bilde man die Summe

$$F + hL = \int y dx + h \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

und setze ihre Variation Null. Wird nach  $y$  variirt, so kommt

$$\delta \int y dx = \int \delta y dx,$$

$$\text{und } \delta / ds = \delta \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \frac{dy \delta dy}{ds} = \frac{dy}{ds} \delta y - \int d\left(\frac{dy}{ds}\right) \delta y,$$

$$\text{folglich } \delta \int y dx + h \delta / ds = \frac{dy}{ds} \delta y + \int \left( dx - h d\left(\frac{dy}{ds}\right) \right) \delta y.$$

Diese Variation muß Null sein, und da, wegen der Unveränderlichkeit der Grenzen, das Glied außerhalb des Integralzeichens von selbst Null ist, so erhält man folgende Gleichung für die gesuchte Curve:

$$dx - h d\left(\frac{dy}{ds}\right) = 0,$$

und durch Integration:

$$x - a = h \frac{dy}{ds};$$

$$\text{folglich } (x - a)^2 [dx^2 + dy^2] = h^2 dy^2;$$

$$\text{oder } \frac{(x - a) dx}{\sqrt{h^2 - (x - a)^2}} = dy;$$

$$\text{woraus sofort } y - b = \sqrt{h^2 - (x - a)^2},$$

$$\text{oder } (x - a)^2 + (y - b)^2 = h^2.$$

folgt. In dieser Gleichung sind  $a$  und  $b$  die willkürlichen Constanten. Sie giebt einen Kreis, dessen Halbmesser  $h$  nach Maßgabe der gegebenen Bogenlänge zu bestimmen ist.

161. Wird allgemein die Curve verlangt, welche auf einer gegebenen krummen Fläche mit einem gegebenen Umringe den größten Raum einschließt, so erhält man das doppelte Integral  $\iint \sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot dx dy$  als Ausdruck der Oberfläche, und  $\int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$  als Ausdruck des Bogens. Man bilde nun die Summe  $\iint y dy dx + h / ds$  und setze ihre Variation Null. (In diesen Formeln ist  $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ ,  $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$ ,  $v = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$  gesetzt.) Demnach

ist zu setzen:

$$\delta \iint v dy dx + h \delta s = 0.$$

Um die Rechnung so viel als möglich zu vereinfachen, denke man sich  $p = \frac{dz}{dx}$ ,  $q = \frac{dz}{dy}$  als Functionen von  $x$  und  $y$  gegeben, also auch  $v$  als eine Function von  $x$  und  $y$ , und die Integration von  $v$  in Bezug auf  $y$  vollzogen. Man setze  $\int v dy = w$ , so ist  $w$  eine ebenfalls gegebene Function von  $x$  und  $y$ , so bestimmt, daß  $\frac{dw}{dy} = v$ . Alsdann geht  $\iint v dy dx$  in  $\int w dx$  über, und man erhält demnach die Gleichung

$$\delta \int w dx + h \delta s = 0.$$

Variirt man nach  $y$ , so kommt

$$\delta w = \frac{dw}{dy} \delta y = v \delta y,$$

also 
$$\delta \int w dx = \int \delta w dx = \int v \delta y dx;$$

$$\begin{aligned} \delta s &= \delta \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int \frac{dy \delta dy + dz \delta dz}{ds} \\ &= \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z - \int \left( d\left(\frac{dy}{ds}\right) \delta y + d\left(\frac{dz}{ds}\right) \delta z \right) \end{aligned}$$

und, weil  $\delta z = q \delta y$  ist,

$$\delta \int w dx + h \delta s =$$

$$\frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z + \int \left[ v dx - h d\left(\frac{dy}{ds}\right) - h q d\left(\frac{dz}{ds}\right) \right] \delta y = 0.$$

Die vom Integralzeichen freien Glieder sind von selbst Null, wenn  $\delta y$  an den Grenzen der Integration Null ist, d. h. wenn die Curve durch zwei gegebenen Punkte gehen soll. Man erhält ferner als Gleichung der gesuchten Curve

$$v dx - h \left[ d\left(\frac{dy}{ds}\right) + q d\left(\frac{dz}{ds}\right) \right] = 0,$$

oder

$$d\left(\frac{dy}{ds}\right) + q d\left(\frac{dz}{ds}\right) = \frac{v dx}{h}.$$

Die vorstehende Gleichung ist, wie man sieht, einerlei mit  $\frac{\cos i}{R} = \frac{1}{h}$  (§. 157.), oder sie giebt  $\rho = h$ , und lehrt mithin folgende merkwürdige Eigenschaft der gesuchten Curve kennen: Wird die Curve des kürzesten Umringes vermittelst einer angelegten abwickelbaren Berührungsfläche in eine Ebene abgewickelt, so ist der Krümmungshalbmesser der abgewickelten ebenen Curve von beständiger Größe, und diese demnach ein Kreis oder ein Kreisbogen.

Dies ist die charakteristische Eigenschaft der Curven kürzesten Umringes auf beliebigen Flächen; d. h. derjenigen Curven, welche, unter allen von gleichem Umringe und durch dieselben zwei gegebenen Punkte gehenden, den größten Raum auf der Fläche einschließen.

Man ersieht aus dieser Eigenschaft sofort, daß auf der Regel die Curve des kürzesten Umringes ein Kreis ist.

162. Will man die Gleichung dieser Curve noch für den Kreis=Cylinder und den geraden Regel entwickeln, so lege man wieder die Gleichungen  $r = a$  und  $z = r \operatorname{tg} \alpha$  dieser Flächen (§. 159.) zu Grunde. Der Ausdruck für ein beliebiges Bogenelement auf dem Cylinder war

$$ds^2 = a^2 d\varphi^2 + dz^2;$$

und giebt, verglichen mit dem allgemeinen Ausdrucke in §. 107., indem man sich die Coordinaten  $x, y, z$  als Functionen von  $p = \varphi, q = z$  denkt,

$$E = a^2, F = 0, G = 1;$$

also  $EG - F^2 = a^2$ , und mithin  $a d\varphi dz$  der Ausdruck des Flächenelementes. Um nun die Curve des kürzesten Umringes zu finden, muß man setzen:

$$d \int a d\varphi dz + h \int \sqrt{a^2 d\varphi^2 + dz^2} = 0,$$

oder wenn noch nach  $z$  integriert wird,

$$a d\varphi + h \int \sqrt{a^2 d\varphi^2 + dz^2} = 0.$$

Die Variation nach  $z$  giebt

$$\int \left[ a d\varphi - h d\left(\frac{dz}{ds}\right) \right] dz = 0,$$

also  $a d\varphi = h d\left(\frac{dz}{ds}\right)$  als die gesuchte Gleichung. Integriert man dieselbe, so kommt

$$a(\varphi - \alpha) = h \frac{dz}{ds},$$

$\alpha$  die willkürliche Constante. Hieraus erhält man weiter, weil  $ds = \sqrt{a^2 d\varphi^2 + dz^2}$ ,

$$a^2(\varphi - \alpha)^2(a^2 d\varphi^2 + dz^2) = h^2 dz^2,$$

und folglich

$$a^4(\varphi - \alpha)^2 d\varphi^2 = (h^2 - a^2(\varphi - \alpha)^2) dz^2,$$

oder, wenn zur Abkürzung  $\varphi$  statt  $\varphi - \alpha$  gesetzt wird,

$$\frac{a^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{h^2 - a^2 \varphi^2}} = dz,$$

mithin  $z = c - \sqrt{h^2 - a^2 \varphi^2}$ , oder  $(z - c)^2 + a^2 \varphi^2 = h^2$  als Gleichung der gesuchten Curve, in welcher  $c$  eine neue beliebige Constante ist.

Um sich von dieser Curve eine deutliche Anschauung zu verschaffen, darf man nur bedenken, daß, wenn der Cylinder in eine Ebene ausgebreitet wird, diese Curve die Gestalt eines Kreises annehmen muß. Dasselbe gilt auch von der folgenden Curve auf dem geraden Kegels, so wie überhaupt von den Curven kürzesten Umrings auf allen abwickelbaren Flächen.

163. Auf dem geraden Kegels, dessen Gleichung  $z = r \operatorname{tg} \alpha$ , erhält man den Ausdruck eines Flächenelementes nach der Formel

$$\sqrt{r^2 + r^2 \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2} \cdot dr d\varphi$$

des §. 108. Man hat nämlich  $\frac{dz}{dr} = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $\frac{dz}{d\varphi} = 0$ , folglich das

Flächenelement gleich

$$\frac{r dr d\varphi}{\cos \alpha}.$$

Demnach muß gesetzt werden:

$$\delta \iint \frac{r dr d\varphi}{\cos \alpha} + h \delta \int \sqrt{r^2 d\varphi^2 + \frac{dr^2}{\cos^2 \alpha}} = 0,$$

oder 
$$\delta \int \frac{\varphi r dr}{\cos \alpha} + h \delta \int \sqrt{r^2 d\varphi^2 + \frac{dr^2}{\cos^2 \alpha}} = 0.$$

Variirt man nach  $\varphi$ , so kommt:

$$\delta \int \frac{\varphi r dr}{\cos \alpha} = \int \frac{r dr \delta \varphi}{\cos \alpha}.$$

Die Variation des Bogens ist schon früher (§. 159.) berechnet. Fügt man dieselbe hinzu, und setzt die unter dem Integralzeichen befindlichen Glieder Null, so findet sich folgende Gleichung

$$\frac{r dr}{\cos \alpha} - h d\left(\frac{r^2 d\varphi}{ds}\right) = 0.$$

Man setze zur Abkürzung  $h \cos \alpha = k$ , so giebt die vorstehende Gleichung durch eine erste Integration

$$\frac{r^2 + k^2 - c^2}{2k} - \frac{r^2 d\varphi}{ds} = 0,$$

in welcher Formel  $c$  eine willkürliche Constante bedeutet. Nun ist

$$ds = \sqrt{r^2 d\varphi^2 + \frac{dr^2}{\cos^2 \alpha}}.$$

Wird dieser Werth eingesetzt, und weiter entwickelt, so kommt

$$4k^2 r^4 d\varphi^2 = (r^2 + k^2 - c^2)^2 \left( r^2 d\varphi^2 + \frac{dr^2}{\cos^2 \alpha} \right),$$

also

$$\sqrt{(4k^2 r^2 - (r^2 + k^2 - c^2)^2)} r d\varphi = \frac{(r^2 + k^2 - c^2) dr}{\cos \alpha}.$$

Man bemerke, daß

$$4k^2 r^2 - (r^2 + k^2 - c^2)^2 = 4c^2 r^2 - (r^2 + c^2 - k^2)^2,$$

und schreibe demnach

$$\cos \alpha \cdot d\varphi = \frac{(r^2 + k^2 - c^2)dr}{r\sqrt{4c^2r^2 - (r^2 + c^2 - k^2)^2}}.$$

Nun sei  $r^2 + c^2 - k^2 = 2cr \cdot u$  oder

$$u = \frac{r}{2c} + \frac{c^2 - k^2}{2cr},$$

so kommt  $du = \left(\frac{1}{2c} - \frac{c^2 - k^2}{2cr^2}\right)dr = \frac{r^2 + k^2 - c^2}{2cr^2}dr;$

$$\text{und weil } \cos \alpha \cdot d\varphi = \frac{\frac{r^2 + k^2 - c^2}{2cr^2} \cdot dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{r^2 + c^2 - k^2}{2cr}\right)^2}},$$

so erhält man  $\cos \alpha \cdot d\varphi = \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}},$

folglich durch Integration (m eine willkürliche Constante)

$$\varphi \cos \alpha + m = \arcsin u,$$

$$u = \sin(\varphi \cos \alpha + m),$$

$$r^2 + c^2 - k^2 = 2cr \sin(\varphi \cos \alpha + m),$$

$$\text{oder } r^2 - 2cr \sin(\varphi \cos \alpha + m) + c^2 = k^2,$$

die Gleichung der Curve kürzesten Umringes auf dem geraden Regel. Wird statt  $m$ ,  $m + \frac{1}{2}\pi$  gesetzt, so erhält diese Gleichung die Form:

$$r^2 - 2cr \cos(\varphi \cos \alpha + m) + c^2 = k^2.$$

### Einige nachträgliche Zusätze.

Zu §. 45. Es versteht sich, daß man die Gleichung der Tangente auch in der anderen Form, nämlich  $u - x = \frac{dx}{dy}(v - y)$ , berachten muß, um diejenigen Asymptoten zu finden, für welche  $\frac{dy}{dx}$  unendlich groß, also  $\frac{dx}{dy} = 0$  wird, und die mithin der Ordinate  $y$  parallel sind.

Zu §. 56. Gesezt man fände für  $x = c$  z. B. folgende Zeichenreihe:

$$c. \quad ++00-+000-0+-00.$$

Dann würde man für  $c + dc$  folgende Zeichenreihe erhalten, wie aus der Darstellung in §. 56. folgt:

$$c+dc. \quad ++++-++++-++-5 \text{ Z. W.}$$

Wem man da, wo vorher 0 stand, immer nur das links zunächst stehende Zeichen zu setzen hat. Diese Reihe enthält 5 Zeichenwechsel. Dagegen erhält man an der oberen Grenze  $c - dc$  folgende Zeichenreihe:

$$c-dc. \quad +-+-+--+-+--++-+-11 \text{ Z. W.}$$

gebildet wird, wenn man da, wo vorher Nullen standen, abwechselnde Zeichen setzt, und zwar so, daß das statt der ersten Null, von der Linken an, zu setzende Zeichen dem links zunächst stehenden Zeichen entgegengesetzt ist; also so, daß z. B. aus  $-00-$  die Zeichenreihe  $+-+--$  entsteht, oder aus  $+000-$  die Reihe  $+-+--$ , und aus  $-0+$  die Reihe  $--++$ . Die Reihe für  $c - dc$  hat, wie man sieht, 11 Zeichenwechsel; gehen also bei  $c$   $11 - 5 = 6$  Zeichenwechsel verloren, und da gleich  $f_0 = 0$ ,  $f_c = 0$ , also zwei gleiche Wurzeln  $c$  vorhanden



sind, so gehen 4 Zeichenwechsel durch das Verschwinden der Ableitungen verloren; mithin sind vier Wurzeln als fehlend zu zeigen. Wenn man die vorstehenden Zeichenreihen genau verfolgt, so wird man hinreichende Beispiele zur Erläuterung §. 56. C. 102., Z. 3—27. aufgestellten Sätze finden.

Zu §. 81. C. 148. Z. 3. v. u. Nimmt man in der Ebene Tangenten die abwickelbare Fläche erzeugen, drei aufeinander folgende Punkte  $a, b, c$ , an, und legt durch dieselbe Ebene, so nähert sich diese Ebene desto mehr der anschließenden Ebene in  $b$ , je näher  $a$  und  $c$  von beiden Seiten an  $b$  rücken. Die anschließende Ebene kann mithin als die Ebene der Tangenten auf einander folgenden unendlich kleinen Sehnen  $ab$  und  $bc$  angesehen werden. Nach §. 80. aber ist diese Ebene zugleich die Berührungsebene der abwickelbaren Fläche.

Zu §. 99. C. 190. Z. 1. v. o. Um das Integral  $\int \frac{d \cos x}{1 - \cos x}$

zu finden, darf man nur  $\cos x = z$  setzen, und den Bruch  $\frac{1}{1-z}$  zerlegen. Man findet

$$\frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+z} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-z},$$

mithin  $\int \frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{1+z} + \frac{1}{2} \int \frac{dz}{1-z} = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z},$

also  $-\int \frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1-z}{1+z} \right) + C,$

welches der in Zeile 2. zuerst angegebene Ausdruck ist.

binden an  
fehlend  
genau  
terung der  
den.

in der Ent  
drei auf  
dieselben  
anschließen  
an h ist  
e der bei  
ab und  
der Lang  
bene po  
rungs

$$\int \frac{d\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$\phi \frac{1}{1+}$$





Handbuch  
der  
**Differential- und Integral-  
Rechnung**

und ihrer Anwendungen

auf

**Geometrie und Mechanik.**

Zunächst

zum Gebrauche in Vorlesungen

herausgegeben

(Ernst) von (Adolph)  
**Dr. Ferdinand Minding.**

---

**Zweiter Theil,  
enthaltend die Mechanik.**

---

Mit zwei Figurentafeln.

---

Berlin 1838,  
bei F. Dümmler.

**H a n d b u c h**  
**der**  
**theoretischen Mechanik.**

**Zunächst**  
**zum Gebrauche in Vorlesungen**

**herausgegeben**

**von**

**Dr. Ferdinand Minding.**

---

**Mit zwei Figurentafeln.**

---

**Berlin 1838,**  
**bei F. Dümmler.**



---

## **Vorrede zum zweiten Theile.**

---

Dieser Theil enthält eine von den ersten Elementen bis zu einer gewissen Grenze systematisch fortgeführte Darstellung der theoretischen Mechanik, von welcher jedoch die Mechanik der Flüssigkeiten für jetzt noch ausgeschlossen worden ist.

In Betreff der Grundsätze, welche mich bei dieser Arbeit geleitet haben, will ich nur bemerken, daß es allerdings wesentlich darauf ankam, die Anwendung der Differential- und Integral-Rechnung auf die Mechanik in einem gewissen Umfange zu zeigen; daß es mir jedoch keinesweges bloß um Rechnungen, sondern, und ganz hauptsächlich, um Entwicklung deutlicher Begriffe, um Darlegung des Sinnes und des Zusammenhanges der mechanischen Gesetze zu thun gewesen ist.



Es schien mir passend, einige statische Untersuchungen, welche ich vor längerer Zeit angestellt, und in Crelles Journal (Band 14. und 15.) bereits bekannt gemacht hatte, hier in einer neuen Bearbeitung aufzunehmen. Leser, welche mit der Statik schon anderweitig bekannt sind, werden mir vielleicht darin ihre Zustimmung nicht versagen, daß durch die Einführung des Mittelpunctes der Kräfte in einer Ebene (man sehe S. 11.) die systematische Entwicklung schon in den ersten Elementen nicht unbeträchtlich gefördert wird. Der hauptsächlichste Theil jener Untersuchungen geht von Seite 78 bis 110; außerdem führt noch ihre Verbindung mit dem Gesetze der virtuellen Geschwindigkeiten zu einigen Sätzen, von denen meines Wissens bisher nur einzelne Fälle bekannt waren.

Herr Professor Möbius hat seinerseits ähnliche Untersuchungen angestellt, und ebenfalls zuerst in Crelles Journal (Band 16.) im Auszuge, sodann ausführlicher in seinem vor einigen Monaten erschienenen Lehrbuche der Statik mitgetheilt. Ein solches Zusammentreffen scheint mir jedenfalls zu Gunsten der Sache zu sprechen.

Auf die Statik fester Körper folgt hier, wie in Werken dieser Art gewöhnlich, die Theorie des Seilpolygons und der biegsamen Systeme überhaupt, mit welcher ich sodann die der elastisch-biegsamen in die engste Verbindung gebracht habe. Der Gedanke

hierzu ist eben so einfach, als der Aufklärung der Sache förderlich. Als wichtigstes Ergebniß meiner Untersuchungen über die elastische Feder, von der ich jedoch hier nur Biegungen in einer Ebene betrachtet habe, erlaube ich mir den Seite 150 aufgestellten Satz hervorzuheben, welcher angiebt, wie viele Biegungen einer elastischen Feder, unter den dort vorausgesetzten Umständen, überhaupt möglich sind, d. h. den Bedingungen des Gleichgewichtes genügen. Diese Frage ist, wenn ich nicht irre, bisher noch nicht beantwortet worden; die Lehrbücher, unter denen ich z. B. dasjenige von Poisson nenne, (man sehe die zweite Ausgabe desselben, Band 1. Seite 612) beschränken sich nur darauf, zu untersuchen, in welchen Fällen es unter den möglichen Biegungen eine sehr kleine giebt, wobei die übrigen ganz unbeachtet bleiben. Der erwähnte Satz lehrt hingegen, wie viele Biegungen in jedem Falle möglich sind, es mag darunter eine sehr kleine sein oder nicht.

Die allgemeine Untersuchung über die Bedingungen des Gleichgewichtes folgt, von Seite 165 — 191, größtentheils der *théorie générale de l'équilibre et du mouvement des systèmes*, einer Abhandlung von Poisson, die man in der sechsten Ausgabe seiner *Statik* findet. Daß auch die schöne Theorie der Kräftepaare, welche hier nicht fehlen durfte, von diesem um die Mechanik so sehr verdienten Mathematiker herrührt, ist allge-

mein bekannt. Noch habe ich das Lehrbuch von **P o i s-  
son**, das **Résumé de leçons sur l'application de la mé-  
canique** von **Navier**, und den **Calcul de l'effet des  
machines** von **Coriolis** an einigen Stellen benutzt.  
Das Lesen in der **théorie mathématique des effets du  
jeu de billard**, ebenfalls von **Coriolis**, deren erstes  
Capitel von der Bewegung einer Kugel auf einer ho-  
rizontalen Ebene, mit Rücksicht auf Reibung, handelt,  
veranlaßte mich, über die Bewegung einer Kugel auf  
einer schiefen Ebene, mit Rücksicht auf Schwere und  
Reibung, eine Untersuchung anzustellen, die ich der  
Hauptsache nach hier aufnehmen zu dürfen geglaubt  
habe.

Berlin im December 1837.

Der Verfasser.

---

## Berichtigungen.

- S. 5. Z. 17. v. u. streiche einmal wird.  
 S. 38. Z. 9. v. u. l. Fig. 7.  
 S. 39. Z. 13. v. o. statt werden lies worden.  
 S. 44. Z. 1. v. o. st. Fig. 11. l. Fig. 11. a.  
 S. 55. Z. 14. v. o. l.  $a_1(v_1 \Sigma P - \Sigma P y_1)$ .  
 S. 56. Z. 15. v. o. l. des Dreiecks ABC.  
     Z. 6. v. u. st. ABC l. A, B, C, und st. BED l. B, C, D.  
 S. 62. Z. 9. v. u. st.  $K=x_1$  l.  $GK=x_1$ .  
 S. 65. Z. 7. u. Z. 13. v. u. statt  $\int yx dx$  l.  $\int yx dy$ .  
 S. 68. Z. 3. v. o. st.  $256a^4q^2$  l.  $256a^4q^3$ .  
 S. 70. Z. 3. v. o. st.  $AB=\psi'$  l.  $CB=\psi'$ .  
 S. 72. Z. 3. v. o. l. positiv.  
 S. 75. Z. 14. v. o. l.  $w/dV=fz dV$ .  
 S. 82. Z. 13. v. o. l. in einzigen Punct.  
     Z. 6. v. u. st. denselben l. derselben.  
 S. 85. Z. 2. v. u. l.  $D'a'$ ,  $D''a''$ .  
 S. 86. Z. 16. v. u. st. Man l. Denn man.  
 S. 92. Z. 1. v. u. st.  $-a$ ,  $-b$ ,  $-c$  l.  $-a'$ ,  $-b'$ ,  $-c'$ .  
 S. 108. Z. 15. v. o. st. denselben l. demselben.  
 S. 127. Z. 2. v. o. st. dt l. t.  
 S. 138. Z. 5. v. u. fehlt im letzten Gliede des Werthes von  $Q'$  der Factor a.  
 S. 141. Z. 10. v. o. l. Paare (Bc, Cc'), (Ed, Dd').  
     Z. 13. v. o. st. an l. in.  
 S. 204. Z. 9. v. o. vor einer fehlt in.  
 S. 205. Z. 6. v. o. vor ein fehlt in.  
 S. 209. Z. 12. v. o. st. 64 l. 65.  
 S. 217. Z. 5. v. o. l.  $Y=0$ ,  $Z=0$ .  
 S. 252. Z. 10. v. u. streiche und 71.  
 S. 281. Z. 12. v. o. l.  $\int xy dm=0$ .  
 S. 307. Z. 14. v. u. streiche um.  
 S. 308. Z. 2. v. o. nach die fehlt sich.  
 S. 309. Z. 6. v. o. st. 16. 17. l. 16. a. b.

## Im ersten Theile.

§. 9. 3. 5. v. u. l.  $\frac{1}{k} \left[ \frac{f(x+k)}{\varphi(x+k)} - \frac{fx}{\varphi x} \right]$ .

§. 54. 3. 4. und 5. v. u. st. und l. um.

§. 78. 3. 12. v. o. st.  $v-y=v_1$  l.  $v=v_1$ .

§. 117. 3. 3. u. 3. 8. v. u. l. 001112.

§. 132. 3. 10. v. o. fehlt  $+$  vor  $d^2z^2$ .

§. 135. 3. 3. v. u. im Zähler l.  $(d^2y^2+d^2z^2)dx^2$ .

§. 137. 3. 3. v. o. l.  $\frac{d^2z}{dx^2}$ .

§. 163. 3. 10. v. o. st.  $-\frac{u}{a}$  l.  $+\frac{u}{a}$ .

§. 170. 3. 9. v. u. st.  $-\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$  l.  $+\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$ .

§. 191. 3. 7. v. o. l.  $dx = \frac{du}{eu}$ .

§. 222. 3. 7. v. u. st.  $a \sin \varphi$  l.  $b \sin \varphi$ .

§. 223. 3. 11. v. o. l. so kommt.

# Inhalt.

§. 1—4.	Einleitung .....	S. 1
---------	------------------	------

## St a t i l.

§. 5—9.	Statik des Punctes .....	11
	Einige Lehrsätze der analytischen Geometrie .....	13
10—38.	Statik fester Systeme .....	26
	Mittelpunct zweier Kräfte in einer Ebene .....	29
	Von den Kräftepaaren .....	33
	Zusammensetzung der Kräfte an einem festen Systeme ...	40
	Analytische Darstellung derselben .....	43
	Insbefondere der Bedingungen des Gleichgewichtes .....	46
	Mittelpunct einer beliebigen Anzahl von Kräften in einer Ebene .....	50
	Mittelpunct paralleler Kräfte .....	52
	Erweiterung der Lehre von den Mittelpuncten der Kräfte .....	78
39—45.	Statik biegsamer Systeme. Seilpolygon .....	111
	Kettenlinie .....	121
	Allgemeine Bedingungen des Gleichgewichtes eines biegsamen Fadens .....	127
46—52.	Biegung elastischer Federn, in einer Ebene .....	139
	Anwendung auf einen biegsamen Stab .....	161
53—64.	Allgemeine Untersuchung über die Bedingungen des Gleichgewichtes .....	165
	Hauptsatz derselben .....	181
	Entwicklung des allgemeinen Ausdruckes der Geschwindigkeit .....	184
	Satz der virtuellen Geschwindigkeiten .....	187
	Anwendungen desselben .....	191

## D y n a m i k.

65—72.	Bewegung eines Punctes .....	203
73—78.	Bewegung mehrerer Puncte, unter gegenseit. Anziehungen .....	226
	Unveränderlichkeit der Resultante und des zusammengesetzten Paares der Bewegungsmomente .....	227
	Bewegung zweier Puncte, nach dem Gravitationsgesetze ..	230

	Anhang über die Anziehung einer Kugel und die Schwere	S. 239
§. 79—87.	Bewegung eines Systemes von Punkten; Gleichgewicht zwischen den verlorenen Kräften .....	244
	Bei einem freien Systeme gilt die Resultante der be- schleunigenden Kräfte derjenigen der Beschleunigungs- momente, und das zusammengesetzte Paar von jenen dem von diesen in jedem Augenblicke gleich .....	247
	Satz der lebendigen Kräfte .....	251
	Anwendung desselben auf das physische Pendel .....	253
	Gegenseitige Vertauschbarkeit der Drehungs- und Schwin- gungs-Are .....	257
	Druck auf die Drehungsaxe ....	261
	Anwendung des Satzes der lebendigen Kräfte auf das Rad an der Welle .....	265
	Anwendung auf die Unterscheidung des sicheren und un- sicheren Gleichgewichtes .....	267
	Anhang vom Stöße der Körper .....	271
88—92.	Von den Hauptaxen der Körper und den Trägheitsmomenten	275
93—96.	Bewegung fester Körper. Entwicklung der zur Bestim- mung derselben dienenden analytischen Ausdrücke .....	291
97.	Differentialgleichungen für die freie Bewegung eines fe- sten Körpers .....	304
98—101.	Differentialgleichungen für die Drehung um einen unbe- weglichen Punkt .....	307
	Drehung ohne beschleunigende Kräfte .....	308
	Einiges über die Drehung eines schweren Körpers um einen vom Schwerpunkte verschiedenen Punkt .....	323
102—106.	Bewegung eines Körpers auf einer festen Ebene .....	325
	Als beschleunigende Kräfte werden Schwere und eine dem Drucke proportionale Reibung angenommen ....	330
	Bewegung einer Kugel auf einer schiefen Ebene .....	333
	und auf einer horizontalen .....	345

---

## Einleitung.

---

1. Die Beobachtung läßt uns zwar immer nur relative Ruhe und Bewegung wahrnehmen; es ist aber klar, daß jedem Körper, oder jedem materiellen Puncte, entweder absolute Ruhe oder irgend eine absolute Bewegung zukommt. Von diesen muß Folgendes angenommen werden:

Ein materieller Punct kann nicht aus absoluter Ruhe in Bewegung übergehen, wenn nicht eine von ihm verschiedene Ursache vorhanden ist, welche ihn zur Bewegung bestimmt. Diese Ursache heißt Kraft.

Wirkt eine Kraft auf den ruhenden Punct, so geht derselbe in gerader Linie fort, und zwar mit gleichförmiger Geschwindigkeit, d. h. in gleichen Zeiten gleiche Räume durchlaufend.

Die Richtung, nach welcher der Punct geht, wird nur durch die Kraft selbst bestimmt, und heißt daher die Richtung der Kraft.

Diese Sätze stellen, zusammengenommen, das Gesetz der Trägheit, in Bezug auf absolute Bewegung, dar. Sie lassen sich auch in einen Satz zusammenfassen, von welchem sie nur die Entwicklung sind, nämlich daß die Materie sich gegen absolute Ruhe und Bewegung gänzlich gleichgültig verhält. Dieses Gesetz der Trägheit, in Bezug auf die absolute Bewegung, ist das erste Axiom der Mechanik. Das zweite Axiom



betrifft die relative Bewegung, und dehnt dasselbe Gesetz der Trägheit auch auf sie aus.

Nämlich der bewegliche Punct (P), welcher so eben im ersten (absoluten) Raume A gedacht wurde, kann auch gedacht werden als enthalten in einem zweiten (relativen) Raume B, welcher mit P zugleich in A beweglich ist. Wird nun P durch die Kraft in Bewegung gesetzt, so stelle man sich vor, daß alle Puncte von B sich mit der nämlichen Geschwindigkeit in der nämlichen Richtung, wie P, fortbewegen; alsdann befindet sich P, während seiner absoluten Bewegung, beständig an dem nämlichen Orte des Raumes B, d. h. P ist in B in relativer Ruhe. Als zweites Axiom wird nun festgesetzt:

Wirkt eine Kraft auf den im Raume B relativ ruhenden Punct, so erfolgt eine relative Bewegung in B, und zwar genau die nämliche, welche Statt finden würde, wenn der Raum B, und mit ihm der Punct P, gar keine absolute Bewegung hätte.

Ein in dem Raume B befindlicher, die absolute Bewegung desselben nicht wahrnehmender, Beobachter wird mithin den Punct P in einer scheinbar ruhenden geraden Bahn gleichförmig fortgehen sehen. Während aber P in dieser Bahn fortgeht, gehen in der That alle Puncte dieser Bahn, mit der ihnen, wie jedem Puncte von B, zukommenden gleichförmigen Geschwindigkeit, unaufhörlich im Raume A gerade fort. Hieraus ergibt sich sogleich, welche Bewegung der Punct P, durch das Zusammenwirken zweier Kräfte, im absoluten Raume erhält.

Denn man denke sich den Punct, vermöge dieser durch zwei Kräfte veranlaßten Bewegung, aus einem Orte O in einen anderen Ort O' des absoluten Raumes gelangend, so folgt aus dem eben Gesagten, daß die Gerade OO' die Diagonale eines Parallelogrammes ist, dessen eine Seite der Weg ist, welchen der Punct in seiner relativen Bahn in B, von O aus, in der Zwischenzeit gleichförmig durchlaufen hat, während die zweite Seite

Die von jedem Punkte der Bahn inzwischen durchlaufene Strecke darstellt.

Wirken demnach auf einen Punkt zwei Kräfte, in beliebigen Richtungen, gleichviel ob gleichzeitig oder die eine nach der andern; so ziehe man aus dem Orte  $O$ , welchen der Punkt in dem Augenblicke einnimmt, da die zweite Kraft auf ihn einwirkt, zwei gerade Linien in den Richtungen der Kräfte, und zwar jede von  $O$  aus nach derjenigen Seite, nach welcher die entsprechende Kraft den Punkt hintreibt; nehme auf beiden Geraden zwei Strecken  $a$  und  $b$ , welche der Punkt in gleichen Zeiten durchlaufen würde, wenn das eine Mal die eine, das andere Mal die andere Kraft allein ihn in Bewegung setzte; vollende aus den Seiten  $a$  und  $b$  das Parallelogramm, und ziehe aus  $O$  die Diagonale  $OO'$ ; — so bewegt sich der Punkt in dieser Diagonale mit gleichförmiger Geschwindigkeit fort, und gelangt in den Endpunkt  $O'$  derselben in dem nämlichen Augenblicke, in welchem er die eine der Strecken  $a$  oder  $b$  durchlaufen haben würde, wenn er durch die in der Richtung derselben wirkende Kraft allein, von  $O$  aus, in Bewegung gesetzt worden wäre.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folgerung aus den beiden aufgestellten Axiomen, oder aus dem für die absolute wie für die relative Bewegung auf gleiche Weise als gültig angenommenen Gesetze der Trägheit.

Da sich zwei gleichförmige Geschwindigkeiten verhalten, wie die in gleichen Zeiten, vermöge ihrer, durchlaufenen Wege, so verhalten sich die Längen der Seiten  $a$  und  $b$ , und der Diagonale  $OO'$  ( $d$ ) des Parallelogrammes zu einander, wie die Geschwindigkeiten, welche jede der beiden Kräfte, allein wirkend, und die, welche beide, zusammenwirkend, dem Punkte ertheilen; und mithin stellen diese Linien die ihnen entsprechenden Geschwindigkeiten nicht allein der Richtung, sondern auch der Größe nach dar.

2. Aus der Construction des Parallelogrammes ergeben sich sofort folgende Zusätze, als besondere Fälle:

a) Werden einem Punkte von zwei Kräften die Geschwindigkeiten  $a$  und  $b$  in der nämlichen Richtung und in dem nämlichen Sinne ertheilt, so bewegt er sich in diesem Sinne mit der zusammengesetzten Geschwindigkeit  $a + b$ .

b) Ist aber die Geschwindigkeit  $b$  der andern  $a$  gerade entgegengesetzt, so erhält der Punkt die Geschwindigkeit  $a - b$ , und geht mit dieser in dem Sinne von  $a$  oder in dem Sinne von  $b$  fort, je nachdem  $a$  größer oder kleiner ist als  $b$ .

c) Sind endlich beide Geschwindigkeiten einander gleich und entgegengesetzt, so ist die zusammengesetzte Geschwindigkeit Null.

Wirkt also die Kraft  $P$  zweimal in demselben Sinne auf den Punkt, so ertheilt sie ihm jedesmal die nämliche Geschwindigkeit  $a$ , und der Punkt erhält die zusammengesetzte Geschwindigkeit  $2a$ . Wirkt überhaupt die Kraft  $P$   $n$  mal auf den Punkt, jedesmal in demselben Sinne, so erhält der Punkt auch die Geschwindigkeit  $na$ . Denn diese Behauptung ist richtig für  $n=2$ ; hieraus folgt sie aber wieder für  $n=3$ , u. s. f. Und es ist, in Bezug auf die zuletzt hervorgehende zusammengesetzte Geschwindigkeit, einerlei, ob die einzelnen  $P$  gleichzeitig oder nach einander wirken.

Zwei Kräfte sind von gleicher Intensität, oder sie sind einander gleich, wenn sie dem nämlichen Punkte gleiche Geschwindigkeiten ertheilen. Wirken auf einen Punkt gleichzeitig  $n$  gleiche Kräfte ( $P$ ) in gleichem Sinne, so wirkt auf ihn eine Kraft, welche die  $n$ fache von  $P$  ist. Es ertheilt aber, nach dem Vorhergehenden, diese Kraft  $nP$  dem Punkte die Geschwindigkeit  $na$ , wenn die Kraft  $P$  allein ihm die Geschwindigkeit  $a$  ertheilt. Hieraus folgt, daß die Intensitäten der Kräfte den Geschwindigkeiten proportional sind, welche sie demselben Punkte mittheilen.

Es seien  $P$  und  $Q$  die Intensitäten zweier Kräfte,  $a$  und  $b$  die ihnen proportionirten Geschwindigkeiten, welche jede einzeln, und  $d$  die zusammengesetzte Geschwindigkeit, welche beide, zusammen wirkend, dem Punkte ertheilen. Alsdann kann man sich

eine dritte Kraft von der Intensität  $R$  vorstellen, welche in der Richtung von  $d$  allein angebracht, dem Punkte gerade die nämliche Geschwindigkeit  $d$  ertheilen würde. Diese Kraft  $R$  heißt die Resultante von  $P$  und  $Q$ , so wie  $P$  und  $Q$  die Componenten von  $R$  heißen. Da die Kräfte  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  in den Richtungen derjenigen Linien wirken, welche, als Seiten und Diagonale eines Parallelogrammes, die Geschwindigkeiten  $a$ ,  $b$ ,  $d$  darstellen, und da ihre Intensitäten den Längen dieser Linien proportionirt sind; so stellen dieselben Linien auch die Richtungen der Kräfte und die Verhältnisse ihrer Intensitäten dar. Man erhält also den Satz:

Zwei Kräfte  $P$  und  $Q$ , an demselben Punkte (Angriffspunkte) angebracht, lassen sich allemal durch eine dritte Kraft (Resultante) ersetzen, welche genau das Nämliche wirkt, wie diese Kräfte (Componenten). Zieht man aus dem Orte des Angriffspunktes zwei Linien, welche die Componenten nach Richtung und Größe (Intensität) darstellen, und vollendet aus ihnen das Parallelogramm, so wird die Resultante, nach Richtung und Größe, durch die von dem Angriffspunkte ausgehende Diagonale dargestellt.

Dieser Satz führt den Namen des Parallelogrammes der Kräfte.

3. Bisher ist nur von einem einzigen frei beweglichen Punkte die Rede gewesen, auf welchen Kräfte wirkten. Sind Kräfte an verschiedenen Angriffspunkten gegeben, so kann man ihre Intensitäten keineswegs durch die Geschwindigkeiten messen, welche die Punkte erhalten; vielmehr muß man die Kräfte, deren Intensitäten mit einander verglichen werden, sämmtlich an einem und demselben Punkte anbringen, um sie alsdann durch die erzeugten Geschwindigkeiten zu messen. Werden die Intensitäten der Kräfte (oder vielmehr ihre Verhältnisse zu einer beliebig angenommenen Einheit von Kraft) auf diese Weise als bestimmt betrachtet, so können nunmehr die nämlichen Kräfte auf verschiedene Angriffspunkte wirkend gedacht werden. Dabei blei-

ben die Geschwindigkeiten der Angriffspuncte noch unbekannt, wenn auch die Intensitäten der Kräfte als bekannt angesehen werden. Es ist aber für jetzt nicht nöthig, etwas Näheres über die Geschwindigkeiten der verschiedenen Puncte zu sagen.

Mehrere Puncte, die auf irgend eine Weise mit einander verbunden sind, so daß sie sich nicht unabhängig von einander bewegen können, bilden ein System von Puncten.

Wirken auf ein System von Puncten beliebige Kräfte, so sind, nach der eben gegebenen Erklärung, die Bewegungen der Puncte im Allgemeinen von denen verschieden, welche die Puncte, als frei gedacht, erhalten würden. Es müssen folglich noch andere Kräfte, außer den angebrachten, vorhanden sein, welche zu den Bewegungen der Puncte beitragen. Diese Kräfte rühren von der gegenseitigen Verbindung der Puncte her, und werden Widerstände, auch innere Kräfte genannt, im Gegensatze der an dem System beliebig angebrachten Kräfte, welche äußere Kräfte heißen.

Zwischen mehreren, an einem Systeme angebrachten Kräften besteht Gleichgewicht, wenn die Bewegungen, welche durch einige derselben veranlaßt, durch die anderen gerade aufgehoben werden. Es besteht z. B. Gleichgewicht zwischen zwei gleichen und entgegengesetzten, an demselben Puncte angebrachten, Kräften (§. 2. c.).

Man sagt auch, wenn mehrere Kräfte an einem Systeme (oder an einem Puncte, der als das einfachste System betrachtet werden kann) einander Gleichgewicht halten, das System sei, unter diesen Kräften, in Gleichgewicht. Hieraus folgt aber nicht, daß das System sich darum in Ruhe befinden muß; dasselbe kann vielmehr schon irgend eine Bewegung besigen. Wenn aber mehrere Kräfte das System, in einem Augenblicke, so treffen, daß zwischen ihnen Gleichgewicht besteht, so haben sie keinen Einfluß auf die Bewegung desselben, wenn eine solche vorhanden ist.

4. Das Vorstehende enthält die allgemeinsten Grundlagen der Mechanik. Diese Wissenschaft zerfällt in zwei Theile.

Der erste Theil heißt die Statik. In demselben werden die Bedingungen untersucht, unter denen Kräfte, an einem gegebenen Systeme, einander Gleichgewicht halten; oder es werden auch Kräfte gesucht, welche anderen, an dem Systeme angebrachten Kräften, zwischen denen nicht Gleichgewicht besteht, Gleichgewicht halten. Wenn zwischen den Kräften ( $P, P', P'', \dots$ ) einerseits, und den Kräften ( $Q, Q', Q'', \dots$ ) andererseits, an einem Systeme Gleichgewicht besteht, und wenn wiederum, anstatt der Kräfte ( $P, P', P'', \dots$ ), andere Kräfte ( $p, p', p'', \dots$ ), an demselben Systeme angebracht, den nämlichen Kräften ( $Q, Q', Q'', \dots$ ) Gleichgewicht halten; so sind die Kräfte ( $P, P', P'', \dots$ ) und ( $p, p', p'', \dots$ ) gleichgeltend, oder es lassen sich allemal die einen durch die anderen ersetzen. Nämlich die Bewegungen, welche die Kräfte ( $P, P', \dots$ ), ohne die Kräfte ( $Q, Q', \dots$ ) an dem Systeme angebracht, veranlassen, müssen einerlei sein mit denen, welche durch die Kräfte ( $p, p', \dots$ ) veranlaßt würden, wenn diese allein wirkten; weil sowohl jene als diese Bewegungen sich gegen die durch die Kräfte ( $Q, Q', Q'', \dots$ ) hervorgebrachten Bewegungen, nach der Voraussetzung, gerade aufheben. Die Untersuchung der Bedingungen des Gleichgewichts ist daher zugleich die Untersuchung der Bedingungen, unter welchen mehrere Kräfte ( $P, P', P'', \dots$ ), anderen Kräften ( $p, p', p'', \dots$ ) gleichgelten, oder die Statik hat ebensowohl die eine als die andere zum Gegenstand.

Die Wichtigkeit der Statik beschränkt sich daher keinesweges allein darauf, daß sie die Bedingungen des Gleichgewichtes kennen lehrt; sondern sie ist auch, wenn nicht Gleichgewicht besteht, für die Untersuchung der durch die Kräfte veranlaßten Bewegungen eine nothwendige Vorbereitungs-Wissenschaft. Indem sie nämlich die Regeln angiebt, nach welchen beliebige Kräfte an einem Systeme in andere gleichgeltende zu verwandeln sind, macht sie es möglich, unter diesen Verwandlungen

diejenige auszuwählen, welche zur Bestimmung der gesuchten Bewegungen dienlich ist.

Der zweite Theil der Mechanik wird die Mechanik im engeren Sinne, oder auch die Dynamik genannt. Derselbe beschäftigt sich mit den durch die Kräfte veranlaßten Bewegungen.

---

**S t a t i f .**

---





## S t a t i f.

### Kräfte an einem Punkte.

5. Wirken an einem Punkte A zwei Kräfte P, Q, nach Richtung und Größe dargestellt durch die Linien AB, AC (Fig. 1.); so wird ihre Resultante R durch die Diagonale AD des Parallelogrammes ABDC, nach Richtung und Größe dargestellt (§. 2.). Bringt man an A eine der R gleiche und entgegengesetzte Kraft (AE) an, so hält diese den Kräften P und Q Gleichgewicht, weil sie der ihnen gleichgeltenden Resultante Gleichgewicht hält.

Da  $AE=AD$ , so verhält sich, wie leicht zu sehen (Fig. 1.),

$$AE:AC:AB = \sin(CAB):\sin(EAB):\sin(EAC);$$

d. h. drei Kräfte, die um einen Punkt im Gleichgewichte sind, verhalten sich zu einander der Reihe nach, wie die Sinus der von den jedesmaligen beiden andern eingeschlossenen Winkel.

Hieraus folgt auch:

$$AC \cdot AB \cdot \sin(CAB) = AB \cdot AE \cdot \sin(BAE) = AE \cdot AC \cdot \sin(EAC)$$

oder, wenn man sich in Fig. 1. die Geraden EC, CB, BE gezogen denkt,

$$\triangle ABC = \triangle BAE = \triangle EAC,$$

d. h. stellen die Linien AB, AC, AE drei um einen Punkt im Gleichgewichte befindliche Kräfte dar, und werden ihre Endpunkte B, C, E durch Gerade verbunden, so sind die hierdurch entstehenden drei Dreiecke, welche A zur gemeinsamen Spitze haben, einander an Flächeninhalt gleich.

Sind der Kräfte mehr als zwei, so kann man zuerst zwei derselben mit einander, sodann ihre Resultante mit einer dritten Kraft zusammensetzen u. s. f., bis die Resultante aller an A angebrachten Kräfte gefunden ist. Bei drei Kräften, deren Richtungen nicht in eine Ebene fallen, wird die Resultante dargestellt durch die Diagonale des Parallelepipedums, dessen Seiten die Kräfte darstellen.

Für eine beliebige Anzahl von Kräften gilt folgender Satz: Es seien  $AB, AC, AD, \dots AF$  Linien, welche die an A angebrachten Kräfte darstellen. Aus dem Endpunkte B der einen,  $AB$ , ziehe man, in dem Sinne von  $AC$ , eine der  $AC$  parallele und gleiche Linie  $BC'$ ; ferner aus  $C'$ , in dem Sinne von  $AD$ , eine der  $AD$  parallele und gleiche,  $C'D'$ , u. s. f., wodurch eine gebrochene Linie  $ABC'D' \dots F'$  erhalten wird. Verbindet man nun den Anfangspunkt A dieser gebrochenen Linie mit dem Endpunkte  $F'$ , so stellt  $AF'$  die Resultante aller Kräfte dar. Die Richtigkeit dieses Satzes ergiebt sich leicht aus dem Parallelogramm der Kräfte. Für zwei Kräfte ( $AB, AC$ , Fig. 1.) wäre  $ABD$  die gebrochene Linie, mithin  $AD$  die Resultante. Soll insbesondere zwischen allen Kräften Gleichgewicht bestehen, so muß die Resultante  $AF'$  Null sein, oder die gebrochene Linie  $ABC'D' \dots F'$  ein geschlossenes Vieleck bilden.

So wie man mehrere Kräfte an einem Punkte durch ihre Resultante ersetzen kann, so läßt sich auch umgekehrt eine Kraft durch mehrere andere ersetzen, von denen sie die Resultante ist. Nimmt man irgend drei Richtungen an, die nur nicht alle einer Ebene parallel sein dürfen, so läßt sich jede gegebene Kraft  $R$  in drei diesen Richtungen parallele Componenten zerlegen, und zwar nur auf eine Weise. Nämlich die Componenten sind die, im Angriffspunkte von  $R$  zusammenstoßenden, der Richtung nach gegebenen, Seiten eines Parallelepipedums, dessen Diagonale  $R$  ist, und dadurch offenbar völlig bestimmt.

Will man bei der Zusammensetzung mehrerer Kräfte an ei-

nem gemeinsamen Angriffspuncte, Rechnung anwenden, so ist es zweckmäßig, jede Kraft zuerst nach drei willkürlich angenommenen Richtungen zu zerlegen. Denn alsdann lassen sich alle in die nämliche Richtung fallenden Componenten in eine einzige Kraft vereinigen, welche ihrer Summe gleich ist, und werden die so erhaltenen drei Summen oder Kräfte wieder in eine zusammen gesetzt, so ist diese die gesuchte Resultante. Um die einfachsten Formeln zu erhalten, wählt man gewöhnlich drei auf einander senkrechte Richtungen der Zerlegung, wie auch im Folgenden geschehen soll.

Die bei dieser Rechnung erforderlichen, besonders die analytische Bestimmung der Lage gerader Linien betreffenden, Sätze, sind in dem ersten Theile dieses Handbuchs, wo von den Anwendungen der Differential-Rechnung auf die Geometrie die Rede war, als dem Leser bekannt, mit Recht vorausgesetzt worden. Denn ihre Herleitung bedarf der Hülfe der Differential-Rechnung nicht, und sollte, nach der sachgemäßen Ordnung, dem Studium derselben schon vorausgegangen sein. Indessen mögen, für einige Leser, jene Sätze, mit ihren Beweisen, hier noch nachträglich eine Stelle finden.

6. Fällt man aus zwei Puncten A, B einer der Lage nach gegebenen geraden Linie (Fig. 2.) die Lothe AC, BD auf eine zweite, beliebig im Raume gegebene Gerade, so heißt das zwischen den Endpunkten der Lothe enthaltene Stück (CD) der zweiten Geraden die senkrechte Projection, oder im Folgenden schlechthin die Projection von AB.

a. Bezeichnet man die Neigung der Geraden AB gegen ihre Projection CD mit  $\alpha$ , und setzt  $AB=l$ ,  $CD=p$ , so ist  $p=l \cdot \cos \alpha$ .

Zum Beweise ziehe man aus A eine Gerade AE (Fig 2.) parallel mit CD, falle aus B ein Loth BF auf die Ebene ACD, ziehe FD, welche von AE in E geschnitten wird, und verbinde B mit E. Nach einem aus den Elementen der Stereometrie bekannten Satze ist der Winkel CDF ein rechter, mithin auch,

weil  $AE$  parallel  $CD$ ,  $\angle AEF$  ein rechter, woraus folgt, daß auch  $AEB$  ein rechter Winkel ist. Da  $CDEA$  ein Rechteck, so ist auch  $CD=AE$ . In der Voraussetzung liegt ferner, daß  $\angle BAE=\alpha$  ist, und man hat  $AE=AB \cdot \cos \alpha$ , folglich auch  $CD=AB \cdot \cos \alpha$ , oder  $p=l \cos \alpha$ , w. z. b. w.

Hieraus folgt noch, daß die Projectionen einer Geraden auf zwei einander parallele Linien, einander gleich sind.

b. Bei dem Gebrauche der Projectionen muß auch der Sinn unterschieden werden, in welchem die zu projecirende Linie zu nehmen ist. Ist z. B. in Fig. 2. die Neigung der Linie  $AB$  gegen die Projections-Linie ( $Age$ ) gleich  $\alpha$ , so ist die Neigung der nämlichen Linie, im entgegengesetzten Sinne genommen, also  $BA$ , gegen die in unverändertem Sinne genommene Projections- $Age$ , gleich  $\pi - \alpha$ ; also ist  $CD=l \cdot \cos \alpha$  die Projection von  $AB$ , und  $DC=l \cos(\pi - \alpha) = -l \cos \alpha$  die Projection von  $BA$ . Man setze allemal zuerst fest, welcher Sinn in der Projections- $age$  der positive sein soll, und wähle für die Neigung der  $AB$  gegen die  $Age$  denjenigen Winkel, welchen  $AB$  mit einer der  $Age$  parallelen und vom Anfangspuncte  $A$  im positiven Sinne ausgehenden Geraden  $AE$  bildet, betrachte auch die Länge  $l$  von  $AB$  immer als positiv; so stellt der Ausdruck  $l \cos \alpha$  die Projection von  $AB$  auf die  $Age$  nicht allein der Größe nach, sondern auch, durch sein Zeichen, den Sinn derselben dar. Ist  $\alpha$  spitz, so ist die Projection positiv, ist  $\alpha$  stumpf, so ist sie negativ. Diese Zeichen sind wesentlich zu beachten, sobald mehrere Linien auf dieselbe  $Age$  projecirt werden. Man kann indessen auch, wenn  $AB=l$  positiv ist, die Länge von  $BA=-l$  oder negativ setzen, muß aber alsdann den Winkel  $\alpha$  in beiden Fällen als den nämlichen betrachten. Denn hierdurch verwandelt sich der Werth ( $l \cos \alpha$ ) der Projection von  $AB$ , für die von  $BA$  in  $-l \cos \alpha$ , wie erforderlich ist. Obgleich die zuerst angegebene Betrachtungsweise vor dieser manche Vorzüge hat, so bedient man sich doch häufig auch der letztern, namentlich wenn die pro-

ilicirten Linien Coordinaten sind, welche sowohl positiv, wie negativ genommen zu werden pflegen.

c. Wird eine Gerade  $AB=l$  auf drei gegen einander senkrechte Axen projectirt, so ist die Summe der Quadrate ihrer Projectionen dem Quadrate ihrer Länge gleich:

Denn man ziehe aus dem Anfange A von AB drei Gerade parallel mit den Axen, und projectire auf sie die AB, so sind die Projectionen jenen auf die anfänglichen Axen, der Reihe nach, gleich, und bilden offenbar die Kanten eines rechtwinklichen Parallelepipedums, dessen Diagonale AB ist. In einem solchen ist aber das Quadrat der Diagonale gleich der Summe der Quadrate dreier zusammenstoßender Kanten; woraus das Behauptete folgt.

Nennt man demnach  $\alpha, \beta, \gamma$  die Winkel, welche AB mit den Projections-Axen bildet, und sind mithin  $l \cos \alpha, l \cos \beta, l \cos \gamma$  die Projectionen von AB, so hat man:

$$l^2 = l^2 \cos^2 \alpha + l^2 \cos^2 \beta + l^2 \cos^2 \gamma,$$

folglich  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$  A.

Also: Die Summe der Quadrate der Cosinus der Winkel, welche eine Gerade mit drei auf einander senkrechten Axen bildet, ist der Einheit gleich.

d. Es sei eine zusammenhängende gebrochene Linie (sie heiße ABCD) gegeben. Werden die einzelnen geraden Stücke derselben, AB, BC, CD, in dem durch die Folge der Buchstaben angedeuteten Sinne genommen, auf eine beliebige Axe projectirt, so ist die Summe ihrer Projectionen, mit gehöriger Rücksicht auf deren Zeichen, gleich der Projection der die Endpunkte der gebrochenen Linie verbindenden AD, auf die nämliche Axe. Bildet die gebrochene Linie ein geschlossenes Viereck, so ist die Summe der Projectionen aller Seiten, auf eine beliebige Axe, Null.

e. Die gebrochene Linie bestehe aus zwei Stücken  $AB=l, BD=l$  (Fig. 1.). Man denke sich drei auf einander senkrechte Axen,  $x, y, z$ , mit welchen  $l$  der Reihe nach die Winkel  $\alpha, \beta,$

$\gamma$ ;  $l'$  die Winkel  $\alpha', \beta', \gamma'$  bilde; so daß  $l \cos \alpha, l \cos \beta, l \cos \gamma$  und  $l' \cos \alpha', l' \cos \beta', l' \cos \gamma'$  die Projectionen von  $l$  und  $l'$  auf die Axen  $x, y, z$ , und mithin, nach d),

$$l \cos \alpha + l' \cos \alpha', l \cos \beta + l' \cos \beta', l \cos \gamma + l' \cos \gamma'$$

die Projectionen der gebrochenen Linie, auf diese Axen, sind. Es sei noch  $AD = r$ , und  $\lambda, \mu, \nu$  die Neigungen von  $AD$  gegen die Axen, also  $r \cos \lambda, r \cos \mu, r \cos \nu$  die Projectionen von  $AD$ ; so hat man:

$$r \cos \lambda = l \cos \alpha + l' \cos \alpha'$$

$$r \cos \mu = l \cos \beta + l' \cos \beta'$$

$$r \cos \nu = l \cos \gamma + l' \cos \gamma'.$$

Addirt man die Quadrate dieser Gleichungen, und setzt, wegen A.,

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \cos^2 \alpha' + \cos^2 \beta' + \cos^2 \gamma' = 1, \\ \cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1,$$

so kommt:

$$r^2 = l^2 + l'^2 + 2ll'(\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma').$$

Aus dem Anfange A der gebrochenen Linie ABD werde AC parallel mit BD und in dem Sinne von BD gezogen (Fig. 1.), so ist  $\angle CAD$  die Neigung der Geraden AB, BD, gegen einander. Es sei  $\angle CAD = i$ , mithin  $ABD = \pi - i$ , und

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 + 2AB \cdot BD \cdot \cos i,$$

oder 
$$r^2 = l^2 + l'^2 + 2ll' \cos i.$$

Dieser Werth von  $r^2$ , mit dem vorigen verglichen, giebt die Formel:

$$\cos i = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma', \quad B.$$

durch welche die gegenseitige Neigung zweier Geraden, aus ihren Neigungen gegen die Axen, gefunden wird. Daß diese Geraden einander nicht zu schneiden brauchen, versteht sich von selbst; denn es kommt hier überhaupt nur auf ihre Richtung, nicht auf ihren Ort im Raume an. Sind z. B. beide einander parallel, und werden sie in gleichem Sinne genommen (also z. B. auch,

wenn BD die Verlängerung von AB ist), so ist  $\alpha = \alpha'$ ,  $\beta = \beta'$ ,  $\gamma = \gamma'$  und  $i = 0$ , wodurch wieder die Formel A erhalten wird. Sind sie zwar parallel, aber dem Sinne nach entgegengesetzt, so ist  $\alpha = \pi - \alpha'$ ,  $\beta = \pi - \beta'$ ,  $\gamma = \pi - \gamma'$  und  $i = \pi$ . Stehen sie senkrecht auf einander, so ist  $i = \frac{1}{2}\pi$ , und

$$\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = 0,$$

eine häufig vorkommende Bedingungsgleichung.

f. Durch den Anfang O senkrechter Coordinaten-Axen ziehe man eine beliebige Gerade OQ, setze in jeder dieser Linien den Sinn fest; welcher der positive sein soll, und nenne  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  die Winkel, welche OQ mit den Axen  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , der Reihe nach bildet; wobei alle Linien im positiven Sinne zu nehmen sind. Ferner werde im Raume ein Punkt P beliebig gewählt; es seien  $x$ ,  $y$ ,  $z$  seine Coordinaten, mithin  $x \cos \alpha$ ,  $y \cos \beta$ ,  $z \cos \gamma$  die Projectionen derselben auf OQ, in deren Ausdrücken  $x$ ,  $y$ ,  $z$  mit ihren Zeichen zu nehmen sind (vgl. b.). Denkt man sich die Coordinaten von P in eine von O nach P gehende gebrochene Linie (OP) zusammengesetzt, und nennt man  $q$  die Projection von OP auf OQ, welche positiv oder negativ ist, je nachdem sie, von O aus, auf OQ im positiven oder negativen Sinne fortgeht, so hat man:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = q, \quad C.$$

zugleich auch

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Der Ort aller Punkte P, für welche in der Gleichung C.  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $q$  ungedändert bleiben, während  $x$ ,  $y$ ,  $z$  verändert werden, ist offenbar eine Ebene, welche senkrecht auf OQ, in dem Abstände  $= q$  vom Anfange der Coordinaten, steht. Ist also die Gleichung einer Ebene in der Form:

$$ax + by + cz = k$$

gegeben, so setze man zuerst  $m = \pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ , dividire die Gleichung mit  $m$ , und vergleiche sie mit der Formel C., so ergibt sich:



$$\cos \alpha = \frac{a}{m}, \cos \beta = \frac{b}{m}, \cos \gamma = \frac{c}{m}, q = \frac{k}{m}.$$

Hierdurch ist die Richtung der Normale der Ebene bestimmt; doch bleibt das Zeichen der Wurzelgröße  $m$  zweideutig, so lange nicht festgesetzt ist, welcher Sinn, in der Normale, der positive sein soll.

Soll nun die gegenseitige Neigung zweier Ebenen gefunden werden, so ist klar, daß man dafür die gegenseitige Neigung ihrer Normalen setzen kann. Sind also  $ax + by + cz = k$  und  $a'x + b'y + c'z = k'$  die Gleichungen der Ebenen, und  $i$  ihre Neigung, so setze man  $\cos \alpha = \frac{a}{m}$ , u. s. f., eben so  $\cos \alpha' = \frac{a'}{m'}$ ,  $\cos \beta' = \frac{b'}{m'}$ ,  $\cos \gamma' = \frac{c'}{m'}$ ,  $m' = \pm \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}$ , wodurch die Neigungen der Normalen gegen die Aren bestimmt werden. Setzt man ferner die Werthe dieser Cosinus in die Formel B., so kommt für die gegenseitige Neigung der Normalen, oder für die der Ebenen:

$$\cos i = \frac{aa' + bb' + cc'}{mm'},$$

in welchem Ausdrucke noch eine Zweideutigkeit von Seiten der Zeichen übrig ist, die auch nothwendig Statt finden muß, weil die Neigung der Ebenen oder ihrer Normalen eben so gut ein spitzer als ein stumpfer Winkel ist. Diese Zweideutigkeit wird beseitigt, wenn der Sinn festgesetzt ist, in welchem jede der Normalen genommen werden soll.

Im Folgenden wird von diesen Sätzen sehr häufig, ohne weitere Erinnerung, Gebrauch gemacht werden.

7. Die Intensität einer Kraft werde immer als eine positive Größe gedacht. Stellt man ferner mehrere an einem gemeinsamen Angriffspunkte A wirkende Kräfte durch Linien dar, so versteht sich, daß man jede Linie, von A aus, nur nach einer Seite ziehen muß, und zwar entweder jede nach der, nach wel-

cher die Kraft den Punkt zu bewegen strebt, oder jede nach der entgegengesetzten. Nach der ersten Art werden die Kräfte durch die Linien als ziehend, nach der zweiten als stoßend dargestellt. Es ist einerlei, welche dieser Annahmen gemacht wird, nur muß man bei der einmal gewählten bleiben. Werden nun durch A drei auf einander senkrechte Axen  $x, y, z$  gelegt, und auf sie die Linien AB, AC..., welche die Kräfte P, P'... darstellen, projecirt, so stellen die Projectionen, nach Größe und Zeichen, die Componenten der Kräfte dar. Nennt man also  $\alpha, \beta, \gamma$  die Neigungen der Linie AB, welche die Kraft P darstellt, gegen die im positiven Sinne genommenen Axen, so sind  $P \cos \alpha, P \cos \beta, P \cos \gamma$  die Componenten von P. Auf ähnliche Weise seien  $\alpha', \beta', \gamma'$  die Neigungen von P' gegen die Axen, mithin  $P' \cos \alpha', P' \cos \beta', P' \cos \gamma'$  die Componenten von P'; u. s. f. Wird die Summe aller in die Axe x fallenden Componenten mit X bezeichnet, so ist

$$X = P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \dots$$

oder kürzer  $X = \Sigma P \cos \alpha.$

Werden eben so die Componenten nach y in eine Summe Y, und die nach z in eine Summe Z vereinigt, so hat man

$$Y = P \cos \beta + P' \cos \beta' + P'' \cos \beta'' + \dots$$

$$Z = P \cos \gamma + P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + \dots$$

oder  $Y = \Sigma P \cos \beta, Z = \Sigma P \cos \gamma.$

Es sei R die Resultante der Kräfte P, P', P'',... und  $\lambda, \mu, \nu$  ihre Neigungen gegen die Axen, also  $R \cos \lambda, R \cos \mu, R \cos \nu$  die Componenten von R nach den Axen, so folgt unmittelbar:

$$R \cos \lambda = X, R \cos \mu = Y, R \cos \nu = Z.$$

Addirt man die Quadrate dieser Ausdrücke, so kommt

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \text{ und } R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

wo der Wurzel das positive Zeichen zu geben ist. Die Richtung

und der Sinn der Resultante, deren Intensität hierdurch bekannt ist, werden durch die Formeln:

$$\cos \lambda = \frac{X}{R}, \quad \cos \mu = \frac{Y}{R}, \quad \cos \nu = \frac{Z}{R}$$

ohne Zweideutigkeit bestimmt.

Setzt man in den Ausdruck für  $R^2$ , statt  $X, Y, Z$  ihre Werthe  $\sum P \cos \alpha, \dots$  ein, so ergibt sich die Intensität der Resultante unmittelbar ausgedrückt durch die Kräfte  $P, P' \dots$  und ihre gegenseitige Neigungen, welche sich mit  $(PP'), (P'P'') \dots$  u. s. f. am deutlichsten bezeichnen lassen. Man findet nämlich, bei gehöriger Anwendung der Formeln A. und B. des vorigen §., wenn z. B. nur drei Kräfte  $P, P', P''$  gegeben sind:

$$R^2 = P^2 + P'^2 + P''^2 + 2PP' \cos (PP') + 2P'P'' \cos (P'P'') + 2P''P \cos (P''P),$$

d. h. das Quadrat der Resultante ist gleich der Summe der Quadrate aller Kräfte, vermehrt um die doppelte Summe der Producte, welche man erhält, indem man jede Kraft mit jeder andern, und ihr Product in den Cosinus ihrer gegenseitigen Neigung, multiplicirt.

Dieser Satz gilt für jede beliebige Anzahl von Kräften.

Soll insbesondere zwischen den Kräften Gleichgewicht bestehen, so muß die Resultante  $R$  Null sein. Da nun die Resultante die Diagonale eines Parallelepipedums ist, dessen Seiten die Componenten  $X, Y, Z$  sind, und die Diagonale nie Null wird, wenn nicht die Seiten des Parallelepipedums einzeln Null sind; so folgt, daß die Componenten einzeln Null sein müssen. Dieser Schluß würde auch gelten, wenn man die Kräfte nicht nach senkrechten, sondern nach schiefen Axen, zerlegt hätte. Man erhält also

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=0$$

oder  $\sum P \cos \alpha = 0, \quad \sum P \cos \beta = 0, \quad \sum P \cos \gamma = 0,$

als die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen des Gleichgewichtes.

8. Es werde jetzt angenommen, daß der Angriffspunct sich auf einer unbeweglichen Fläche befindet, von welcher er sich zwar entfernen kann, die ihm aber kein Eindringen gestattet. Wirken auf ihn gleichzeitig die Kräfte  $P, P', P''$  etc. so setze man dieselben zuerst in eine einzige Resultante  $R$  zusammen, und zerlege diese sodann in eine auf der Fläche normale und eine der Berührungsebene parallele Seitenkraft. Der letzteren setzt die Fläche keinen Widerstand entgegen; in Hinsicht auf die erste sind zwei Fälle möglich; entweder nämlich die normale Kraft drückt den Punct gegen die Fläche, oder sie treibt ihn, sich in der Richtung der Normale von der Fläche zu entfernen. In dem zweiten dieser Fälle ist es offenbar eben so, als ob die Fläche gar nicht vorhanden, oder der Punct frei beweglich wäre. Im ersten Falle aber, wenn der Punct gegen die Fläche gedrückt wird, welche ihm kein Eindringen gestattet, wird der normale Druck durch einen gleichen und entgegengesetzten von der Fläche dargebotenen Widerstand aufgehoben. Soll also Gleichgewicht bestehen, so muß die tangential Componente von  $R$  Null sein, und die Kraft  $R$  muß den Punct normal gegen die Fläche drücken. Um diese Bedingungen analytisch darzustellen, nenne man die Intensität des normalen Widerstandes  $N$ , und  $\lambda, \mu, \nu$  die Winkel, welche die Richtung desselben mit den Axen bildet, zerlege ferner die Kraft  $R$  nach den Axen in die drei Componenten  $X, Y, Z$ ; so muß, für das Gleichgewicht, sein:

$$X + N \cos \lambda = 0, \quad Y + N \cos \mu = 0, \quad Z + N \cos \nu = 0. \quad 1.$$

Bezeichnet man die Gleichung der Fläche durch  $L=0$ , so sind

$$\frac{u-x}{\frac{dL}{dx}} = \frac{v-y}{\frac{dL}{dy}} = \frac{w-z}{\frac{dL}{dz}}$$

die Gleichungen ihrer Normale. Wird ferner zur Abkürzung

$$\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2 = U^2$$

gesetzt, so hat man, für die Neigungen der Normale gegen die

Seien  $x, y, z$  die Ausdrücke:

$$\cos \lambda = \frac{1}{U} \cdot \frac{dL}{dx}, \cos \mu = \frac{1}{U} \cdot \frac{dL}{dy}, \cos \nu = \frac{1}{U} \cdot \frac{dL}{dz}, \quad 2.$$

in welchen aber das Zeichen der Wurzelgröße  $U$  noch zweideutig ist. Die Bedingungen des Gleichgewichtes gehen demnach in folgende Gleichungen über:

$$X + \frac{N}{U} \cdot \frac{dL}{dx} = 0, \quad Y + \frac{N}{U} \cdot \frac{dL}{dy} = 0, \quad Z + \frac{N}{U} \cdot \frac{dL}{dz} = 0. \quad 3.$$

Wird aus diesen drei Gleichungen der Quotient  $\frac{N}{U}$  weggeschafft, so kommt:

$$\frac{X}{\frac{dL}{dx}} = \frac{Y}{\frac{dL}{dy}} = \frac{Z}{\frac{dL}{dz}}, \quad 4.$$

welche Gleichungen nichts anderes besagen, als daß die Resultate der Kräfte  $X, Y, Z$  auf der Fläche normal ist. Sind die Componenten  $X, Y, Z$  als Functionen der Coordinaten  $x, y, z$  ihres Angriffspunctes gegeben, so wird durch diese beiden Gleichungen, in Verbindung mit  $L=0$ , der Ort bestimmt, in welchem der Punct, unter der Wirkung der gegebenen Kräfte, auf der Fläche ruhen kann, oder überhaupt der Ort, in welchem diese Kräfte, wenn sie ihn während der Bewegung treffen, keinen Einfluß auf die Bewegung haben. Dazu gehört aber, daß die Kraft  $R$  ihn gegen die Fläche drücke, nicht aber ihn von derselben zu entfernen strebe, und diese Bedingung ist in den vorstehenden Gleichungen nicht enthalten. Um hierüber zu entscheiden, entwickle man aus 4. mit Hülfe der Gleichung  $L=0$ , zuerst die Werthe von  $x, y, z$ , so werden dadurch zugleich die entsprechenden Werthe von  $X, Y, Z, \frac{dL}{dx}, \frac{dL}{dy}, \frac{dL}{dz}$ , mithin auch  $U$ , bis auf das Zeichen, bekannt. Diese Werthe setze man in die Gleichungen 3. ein, und bestimme das Zeichen von  $U$  so, daß der Werth von  $N$  positiv werde, was immer möglich und erforderlich ist. Alsdann sind auch die Größen  $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$  nach 2., be-

kannt, und mithin die Richtung des Widerstandes vollständig bestimmt. Am klarsten ist es nun, sich die Fläche als eine unendlich dünne Schale zu denken, und zunächst anzunehmen, daß der Punct sowohl innerhalb als außerhalb der Schale sich befinden kann. Die gefundenen Werthe von  $\cos \lambda$ ,  $\cos \mu$ ,  $\cos \nu$  lehren alsdann, indem sie die Richtung des Widerstandes angeben, auf welcher Seite der Fläche der Punct sich befinden muß, um durch den Widerstand derselben in Ruhe gehalten zu werden. Soll sich nun der Punct z. B. bloß auf der äußeren Seite befinden, so wird man diejenigen Auflösungen verwerfen, nach welchen er sich auf der inneren Seite befinden müßte.

Es sei z. B. die Fläche eine Kugel, und die auf den Punct wirkende Kraft die Schwere, so ist klar, daß der Punct, wenn die Kugeloberfläche als eine unendlich dünne Schale gedacht wird, oben auf der Kugel außerhalb, unten innerhalb der Schale ruhen kann. Dieses zeigt nun die Rechnung auf folgende Art:

Man nehme den Mittelpunkt zum Anfange der Coordinaten, die  $x$ ,  $y$  horizontal, die  $z$  vertical und positiv nach oben. Der Halbmesser sei  $a$ , also die Gleichung der Kugel

$$L = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0.$$

Für die auf den Punct wirkende Kraft kann man sein Gewicht  $p$  setzen. Die Richtung derselben bildet mit den Axen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  der Reihe nach die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , deren Cosinus  $0$ ,  $0$ ,  $-1$  sind; also  $\cos \alpha = 0$ ,  $\cos \beta = 0$ ,  $\cos \gamma = -1$ , und mithin

$$X = 0, Y = 0, Z = -p. \quad \text{Ferner ist} \quad \frac{dL}{dx} = 2x, \quad \frac{dL}{dy} = 2y,$$

$$\frac{dL}{dz} = 2z; \quad \text{daher gehen die Gleichungen 4. über in}$$

$$\frac{0}{2x} = \frac{0}{2y} = \frac{-p}{2z},$$

und hieraus folgt  $x = 0$ ,  $y = 0$ , mithin  $z = \pm a$ . Auch ist  $U = \pm 2a$ .

Von den Gleichungen 3. fallen die beiden ersten von selbst

weg, weil  $X=0$ ,  $Y=0$ ,  $\frac{dL}{dx}=0$ ,  $\frac{dL}{dy}=0$ ; die letzte giebt, für  $z=+a$ ,  $\frac{dL}{dz}=+2a$ , und mithin

$$-p + \frac{N}{\pm 2a} \cdot 2a = 0,$$

folglich  $U=+2a$ , und  $N=p$ . Also ist (nach 2.)  $\cos \lambda=0$ ,  $\cos \mu=0$ ,  $\cos \nu=+1$ ; der Widerstand  $N$  wirkt mithin parallel der Axe  $z$  aufwärts. Der Punct befindet sich nun, weil  $z=+a$ , oben auf der Kugelschaale, und da der Widerstand  $N$  ihn hindert abwärts zu gehen, so muß die Fläche unterhalb des Punktes gedacht werden, oder der Punct sich außerhalb der Kugelschaale befinden.

Setzt man aber  $z=-a$ , so befindet sich der Punct unten an der Kugel. Alsdann giebt die dritte der Gleichungen 3.:

$$-p - \frac{N}{\pm 2a} \cdot 2a = 0,$$

folglich  $U=-2a$ ,  $N=p$ , und mithin, nach 2.,  $\cos \lambda=0$ ,  $\cos \mu=0$ ,  $\cos \nu=-1$  (weil  $\frac{dL}{dz}=-2a$ ). Der Widerstand wirkt also wieder aufwärts, oder die Fläche muß sich wieder unterhalb des Punktes befinden, d. h. der Punct muß innerhalb der Kugelschaale liegen.

Der Leser wird aus diesem Beispiele entnehmen, daß die Rechnung allemal die Richtung und den Sinn des Widerstandes deutlich anzeigt, woraus sich sodann schließen läßt, auf welcher Seite der Fläche sich der Punct befinden muß, da der Sinn des Widerstandes immer von der Fläche nach dem Puncte geht.

Im Vorhergehenden ist angenommen, daß der Punct sich ohne Widerstand von der Fläche entfernen kann. Er kann aber auch unbedingt auf derselben zu bleiben gezwungen sein. Alsdann kann man sich statt der Fläche zwei überall gleich und unendlich wenig von einander abstehende Schaalen vorstellen, zwischen welchen der Punct sich befindet. In diesem Falle findet

jede normale Kraft, in welchem Sinne sie auch wirke, einen Widerstand, der ihr Gleichgewicht hält; wirkt eine tangentiale Kraft auf den Punct, so ist derselbe im ersten Augenblicke nicht gehindert, nach der Richtung derselben fortzugehen, und muß also in diesem Sinne sich zu bewegen anfangen; wie er dann weiter gehen wird, ist hier nicht zu untersuchen. Wenn also Gleichgewicht bestehen soll, so muß die Resultante aller auf den Punct wirkenden Kräfte auf der Fläche normal sein. Die Bedingungen des Gleichgewichtes sind daher die nämlichen wie vorhin. Und zwar ist jede Auflösung, welche den Gleichungen 4. in Verbindung mit der Gleichung  $L=0$  genügt, zulässig, da der Widerstand in der Normale sowohl in dem einen als in dem andern Sinne stattfinden kann.

9. Ist der Angriffspunct auf einer Curve beweglich, so hat man zwischen seinen Coordinaten zwei Gleichungen, die durch  $L=0$  und  $M=0$  bezeichnet seien. Jede derselben drückt eine Fläche aus, auf welcher der Punct sich befindet, und welche seinem Eindringen einen gewissen normalen Widerstand entgegenzusetzen wird. Der Punct befindet sich also unter dem Einflusse zweier Widerstände, die man aber in jedem Augenblicke in einen einzigen  $N$  zusammensetzen kann, dessen Richtung in die Normal-Ebene der Curve fallen muß. Bezeichnet man mit  $\lambda, \mu, \nu$  die Neigungen von  $N$  gegen die Azen, und bemerkt, daß die Gleichungen der Tangente an der Curve folgende:

$$\frac{u-x}{dx} = \frac{v-y}{dy} = \frac{w-z}{dz},$$

und mithin die Cosinus der Neigungen der Tangente gegen die Aze folgende sind:  $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ , so ergibt sich, weil die Richtung von  $N$  senkrecht auf der Tangente steht, die Gleichung:

$$\cos \lambda \frac{dx}{ds} + \cos \mu \frac{dy}{ds} + \cos \nu \frac{dz}{ds} = 0. \quad 1.$$

Ferner ist, für das Gleichgewicht, erforderlich, daß sei:



$$X + N \cos \lambda = 0; \quad Y + N \cos \mu = 0; \quad Z + N \cos \nu = 0.$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  und addirt die Producte, so kommt, wegen 1.

$$X dx + Y dy + Z dz = 0. \quad 2.$$

Werden aus dieser Gleichung die Differentialverhältnisse  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{dz}{dx}$  weggeschafft, deren Werthe sich aus den Gleichungen der Curve ergeben, so geht dieselbe in eine endliche Gleichung zwischen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  über, welche in Verbindung mit den Gleichungen der Curve, den Ort des Gleichgewichtes bestimmt. Hierbei finden übrigens noch die nämlichen Unterscheidungen Statt, wie bei den Flächen, je nachdem sich der Punkt von der Curve entfernen kann oder nicht; es wird aber in jedem Falle der Sinn des normalen Widerstandes durch die Rechnung genau bestimmt, wonach dann das Uebrige beurtheilt werden kann, wie bei den Flächen.

### Kräfte an einem festen Systeme;

10. Zwei Punkte sind mit einander fest verbunden, wenn ihre gegenseitige Entfernung ungeändert bleibt, welche Kräfte auch an ihnen angebracht werden. Ein System, dessen Punkte fest mit einander verbunden sind, heiße ein festes System. Es braucht kaum bemerkt zu werden, daß es ein unbedingt festes System, oder einen unbedingt festen Körper, in der Natur nicht giebt; dessen ungeachtet können die Bedingungen des Gleichgewichtes an einem festen Systeme Gegenstand einer theoretischen, auch auf Körper der Natur in vielen Fällen anwendbaren, Untersuchung sein. Diese Untersuchung setzt einen höchst einfachen Grundsatz voraus, der sogleich angegeben werden soll. Zur Abkürzung nenne man zwei Kräfte, welche in der Richtung der geraden Linie zwischen ihren Angriffspuncten, die eine im entgegengesetzten Sinne der andern, wirken, einander entgegen-

gerichtet. Entgegengerichtete Kräfte sind also allemal einander parallel und entgegengesetzt; aber die Umkehrung dieses Satzes gilt im Allgemeinen nicht. Der Grundsatz, auf welchem die Lehre von dem Gleichgewichte an einem festen Systeme beruht, ist nun folgender:

Zwei gleiche und entgegengerichtete Kräfte, und nur zwei solche, an fest verbundenen Punkten angebracht, halten einander Gleichgewicht.

Es wird an einer anderen Stelle dieses Buches von diesem Grundsatz noch die Rede sein; hier mag nur folgende Bemerkung hinzugefügt werden. Da die Kräfte nicht unmittelbar auf denselben Punkt wirken, so kommt auch zwischen ihnen das Gleichgewicht nicht unmittelbar, sondern nur vermittelt der Widerstände oder inneren Kräfte zu Stande, durch welche die gegenseitige Entfernung der Punkte unverändert erhalten wird. Man muß sich also vorstellen, daß an den Punkten zwei einander und den Kräften gleiche Widerstände auftreten, so daß an jedem Punkte zwischen der an ihm angebrachten äußeren und der an ihm auftretenden inneren Kraft Gleichgewicht besteht. Diese Widerstände bilden die Spannung der beide Punkte verbindenden Geraden.

Aus vorstehendem Grundsatz folgt, daß man den Angriffspunkt einer Kraft an jeden in ihrer Richtung befindlichen und mit dem vorigen fest verbundenen Punkt beliebig verlegen kann. Denn es sei A der anfängliche Angriffspunkt der Kraft, B ein mit A fest verbundener, in der Richtung der Kraft liegender Punkt; so kann man an B zwei einander gleiche und entgegengesetzte Kräfte anbringen, welche einander aufheben. Fallen nun diese Kräfte zugleich in die Richtung der vorigen Kraft und sind sie dieser gleich, so heben auch die an A und B angebrachten gleichen und entgegengerichteten Kräfte einander auf, und es bleibt also nur noch die andere an B angebrachte Kraft übrig, welche man als die vorher an A angebrachte, jetzt an den Angriffspunkt B verlegte Kraft ansehen kann.

Hierbei ist vorausgesetzt, was sich auch von selbst versteht, daß man an jedem Systeme Kräfte, zwischen denen Gleichgewicht besteht, beliebig hinzufügen oder auch wegnehmen kann, ohne etwas zu ändern.

Und eben so ist klar, daß das Gleichgewicht zwischen mehreren Kräften an einem Systeme niemals gestört wird, wenn man zu dem Systeme noch beliebig viele materielle Punkte hinzufügt, und solche mit den Punkten des Systems beliebig verbindet. Oder allgemeiner:

Besteht zwischen den Kräften  $(P, P' \dots)$  an dem Systeme A, und zwischen den Kräften  $(Q, Q' \dots)$  an dem Systeme B Gleichgewicht, so wird weder das eine noch das andere gestört, wenn man die Punkte des einen Systems mit den Punkten des anderen beliebig verbindet; ohne übrigens die Verbindung zwischen den Punkten jedes einzelnen Systems zu stören. Denn da die Kräfte keinem der Systeme eine Bewegung ertheilen, so werden durch die Verbindung beider Systeme keine gegenseitigen Einwirkungen zwischen ihnen veranlaßt, und mithin besteht das Gleichgewicht fort.

Dieses gilt eben so gut in Bezug auf das Gleichgewicht von Kräften an ruhenden wie an bewegten Systemen; denn daß durch die Verbindung der Systeme die Bewegung in ihrem Fortgange geändert wird, gehört nicht hierher. Es wird nur gesagt, daß die Kräfte, zwischen denen an jedem Systeme Gleichgewicht besteht, auf die Bewegung keinen Einfluß haben, und auch keinen erhalten, wenn die Systeme beliebig mit einander verbunden werden.

Uebrigens aber kann der Leser sich die Angriffspunkte für jetzt immerhin bloß als ruhend vorstellen, wenn ihm dies eine Erleichterung zu sein scheint.

### Zwei Kräfte in einer Ebene.

11. An den Punkten A und B (daß die Punkte fest verbunden sind, und außerdem mit beliebigen anderen Punkten fest

verbunden sein oder werden können, braucht nicht immer wieder ausdrücklich gesagt zu werden) wirken zwei Kräfte  $P$  und  $Q$ , in den Richtungen  $AP$ ,  $AQ$ , welche im Punkte  $C$  einander schneiden (Fig. 3.). Bringt man an  $C$  zwei der  $P$  und  $Q$  beziehungsweise gleiche und entgegengerichtete Kräfte an, so besteht Gleichgewicht. Für diese kann man auch ihre Resultante  $R$  setzen, deren Richtung  $Cr$  sei. Der Angriffspunkt von  $R$  kann ferner an jeden beliebigen Punkt  $M$  in der Richtung der Geraden  $Cr$  verlegt werden, ohne das Gleichgewicht zu stören. Oder eine der  $Cr$  gleiche und entgegengerichtete Kraft  $MR$  an  $M$  angebracht, ist die Resultante von  $P$  und  $Q$ .

Durch die Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  lege man einen Kreis, und nehme zum Angriffspunkte der Resultante  $R$  den zweiten Durchschnit  $M$  der Geraden  $Cr$  mit diesem Kreise. So lange die Kräfte  $P$  und  $Q$  der Intensität nach ungeändert bleiben, und ihre gegenseitige Neigung ( $ACB$ ) ebenfalls ungeändert bleibt, ändert sich offenbar auch die Intensität der Resultante  $R$  nicht. Läßt man nun die Kräfte, unter den obigen Voraussetzungen, sich in ihrer Ebene um ihre Angriffspunkte  $A$  und  $B$  drehen, so durchläuft der Durchschnit ihrer Richtungen  $C$ , bei fortgesetzter Drehung, den ganzen Umring des Kreises  $CAMB$ . Es sei, durch diese Drehung, der Punkt  $C$  nach  $C'$ , und die Kräfte in die Richtungen  $AP'$ ,  $BQ'$  gekommen, so muß die Resultante jetzt den Winkel  $AC'B$  in die nämlichen Theile theilen, wie vorhin den Winkel  $ACB$ ; folglich muß auch die Resultante aus  $C'$  den Bogen  $AMB$  in die nämlichen Theile theilen, wie vorhin die Resultante aus  $C$ , und mithin muß die Resultante aus  $C'$  den Kreis in dem nämlichen Punkte, wie die Resultante aus  $C$ , d. i. in  $M$ , zum zweiten Male schneiden.

Gelangt ferner der Durchschnit der Richtungen beider Kräfte in den Bogen  $AMB$ , z. B. nach  $C''$ , wobei die Kräfte in die Geraden  $AP''$  und  $BQ''$  fallen; so geht die Resultante  $C''R$  wieder durch  $M$ , wie der Leser leicht einsehen wird.

Es verhält sich  $P:Q:R = \sin MCB : \sin ACM : \sin ACB$ , oder, weil  $ABM = ACM$ ,  $BAM = BCM$ ,  $ACB = 2R - AMB$  ist,

$$P:Q:R = \sin MAB : \sin MBA : \sin AMB.$$

Zieht man demnach  $AM$ ,  $MB$ , so ist auch

$$P:Q:R = MB:MA:AB.$$

Der so bestimmte Punkt  $M$ , durch welchen die Resultante der beiden Kräfte  $P$  und  $Q$  beständig geht, wenn diese Kräfte, ohne Aenderung ihrer gegenseitigen Neigung, in ihrer Ebene um ihre Angriffspunkte gedreht werden, heiße der Mittelpunkt der Kräfte  $P$  und  $Q$ .

Die vorstehende Construction des Mittelpunctes gilt auf gleiche Weise, es mag die Neigung ( $ACB$ ) der Kräfte  $P$  und  $Q$  gegen einander spitz oder stumpf sein. Wäre sie stumpf, so würde nur der Bogen  $AMB$ , in welchen der Mittelpunkt fällt, größer als der auf der anderen Seite der Sehne  $AB$  befindliche Theil des Kreises, also größer als der Halbkreis sein (Fig. 4.). Der Mittelpunkt fällt in dem Bogen  $AMB$  allemal, wie leicht zu sehen, näher an den Angriffspunct der größeren, als an den der kleineren Kraft; ist z. B.  $P > Q$ , so ist Bogen  $AM <$  Bogen  $MB$ . Ist aber  $P = Q$ , so ist auch Bogen  $AM =$  Bogen  $MB$ .

Man denke sich jetzt (Fig. 3.) die Neigung  $ACB$  der Kräfte als spitz, und nehme an, daß dieselbe sich immer mehr der Null nähere. Alsdann wächst der Durchmesser des Kreises über alle Grenzen hinaus, und der Bogen  $AMB$  fällt immer genauer mit der Sehne  $AB$  zusammen. Man sieht also, daß, wenn die Kräfte parallel werden, der Mittelpunkt  $M$  endlich in einen Punct der Sehne  $AB$  fallen muß. Dabei gilt immer die Proportion  $P:Q = MB:MA$ , durch welche die Lage dieses Mittelpunctes, in der Sehne  $AB$  und zwischen den Endpuncten derselben, genau bestimmt ist. Die Resultante  $R$  aber geht in die Summe  $P+Q$  über, und wirkt mit beiden Kräften parallel und in gleichem Sinne.

Man nehme ferner an (Fig. 4.), daß der Winkel  $ACB$

stumpf: sei und sich immer mehr zwei Rechten nähert; zugleich sei  $P > Q$ . Alsdann fällt nicht allein Bogen  $BCA$  immer genauer in die Sehne  $BA$ ; sondern es fällt auch der Bogen  $BCAM$  immer genauer mit seiner Sehne  $BM$  zusammen, weil  $\angle ABM = \angle ACM$  ist; und dieser sich dem Null nähert, indem  $\angle ACB$  sich zwei Rechten nähert. Wird also endlich  $\angle ACB = 2R$ , so fällt  $BM$  mit  $BA$  in eine gerade Linie zusammen; dabei bleibt aber  $BM$  größer als  $BA$ , oder der Punkt  $M$  fällt in die von  $A$  ausgehende Verlängerung der Sehne  $BA$ . Und man hat immer  $P:Q = MB:MA$ ; zugleich aber  $R = P - Q$ . Der Mittelpunkt fällt demnach in die Verlängerung der Sehne  $BA$ , auf die Seite der größeren von beiden Kräften  $P$  und  $Q$ ; die Resultante aber ist den Kräften parallel, ihrem Unterschiede gleich, und wirkt in dem Sinne der größeren.

Ist aber  $P = Q$ , so ist  $\angle ACM = \angle BCM$ , oder Bogen  $AM =$  Bogen  $MCB$  (Fig. 4.), und Sehne  $AM = MB$ . Nähert sich nun der Winkel  $ACB$  zwei Rechten, während  $AB$ , wie immer, unveränderlich gedacht wird, so wachsen  $MA$ ,  $MB$  über alle Grenzen hinaus, oder der Mittelpunkt rückt in unendliche Entfernung von  $A$  und  $B$ . Zugleich aber wird die Resultante immer genauer dem Unterschiede beider Kräfte gleich, also immer genauer Null. Dieser Fall macht also eine bemerkenswerthe Ausnahme von den übrigen.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich:

Zwei Kräfte in einer Ebene lassen sich, mit Ausnahme des einzigen Falles, wenn beide einander gleich, parallel und entgegengesetzt sind, immer durch eine dritte, in der nämlichen Ebene wirkende Kraft ersetzen. Diese ersetzende Kraft kann an jedem beliebigen Punkte ihrer Richtung angebracht werden; es giebt aber unter diesen Punkten einen, der vor den übrigen ausgezeichnet ist und der Mittelpunkt der Kräfte genannt wird. Dreht man nämlich die Kräfte, in ihrer Ebene, um ihre Angriffspunkte so, daß ihre gegenseitige Neigung beständig die nämliche bleibt,

so geht die ersetzende Kraft, in jeder Stellung des Systemes, durch diesen Mittelpunkt.

Oder bringt man an diesem Mittelpunkte eine der Resultante gleiche und entgegengerichtete Kraft an, so besteht zwischen dieser und den beiden andern Kräften immer Gleichgewicht; wie auch das System ihrer festverbundenen Angriffspunkte in seiner Ebene verschoben werde, wenn die Kräfte mit unveränderlichen Intensitäten in unveränderlichen Richtungen an ihren Angriffspunkten haften. Wird z. B. der Mittelpunkt  $M$  (Fig. 3.) als unbeweglich angenommen, so besteht zwischen den Kräften  $P$  an  $A$  und  $Q$  an  $B$  immer Gleichgewicht, wie auch das Dreieck  $AMB$ , in seiner Ebene, um  $M$  gedreht werde, während die Kräfte immer in den nämlichen Richtungen auf ihre Angriffspunkte wirken; weil ihre Resultante beständig durch den unbeweglichen Punkt geht.

Anmerkung. Sollte im Vorhergehenden, bei dem Uebergange von geneigten Kräften zu parallelen, noch nicht genug erwiesen scheinen, daß zwei parallele Kräfte, mit Ausnahme des schon erwähnten besonderen Falles, sich immer durch eine einzige Kraft ersetzen lassen; so kann dies noch auf folgende Weise geschehen. Sind an  $A$  und  $B$  zwei parallele Kräfte  $P$  und  $Q$  gegeben, so bringe man noch zwei gleiche und entgegengerichtete Kräfte  $N$  und  $N'$  an  $A$  und  $B$  an (Fig. 5.); durch welche nichts geändert wird. Setzt man nun  $N$  mit  $P$  in die Resultante  $P'$ , eben so  $N'$  mit  $Q$  in  $Q'$  zusammen, so werden die Richtungen von  $P'$  und  $Q'$  allemal einander schneiden, wenn nicht  $P$  und  $Q$  einander gerade gleich und entgegengesetzt sind, welcher Fall ausgeschlossen ist. Werden nun die Kräfte  $P'$  und  $Q'$  an den Durchschnitte  $C$  ihrer Richtungen übertragen, und statt ihrer wieder die Componenten  $N$  und  $P$ ,  $N'$  und  $Q$  gesetzt, so heben sich die gleichen und entgegengesetzten Componenten  $N$  und  $N'$  an  $C$  auf, und es ergibt sich mithin an  $C$  eine Resultante, welche der Summe (oder Differenz) der Kräfte  $P$  und  $Q$  gleich und ihnen parallel ist; wie oben gefunden wurde.

## Von den Kräftepaaren.

12. Zwei gleiche, parallele und an festverbundenen Angriffspunkten in entgegengesetztem Sinne wirkende Kräfte (welche im Vorhergehenden eine Ausnahme machten), nennt man ein Kräftepaar, oder auch häufig, sobald kein Mißverständnis zu besorgen ist, schlechthin ein Paar. Der senkrechte Abstand zweier ein Paar bildender Kräfte von einander wird die Breite, und die gerade Linie zwischen den Angriffspunkten der Arm des Paares genannt. Da man aber die Angriffspunkte der Kräfte in ihren Richtungen beliebig verlegen kann, so kann man auch den Arm des Paares immer seiner Breite gleich machen, und dieses soll im Folgenden in der Regel als geschehen vorausgesetzt werden. Alsdann stehen die Kräfte senkrecht auf dem Arme des Paares; oder dieses ist rechtwinklich. Man pflegt die Kräfte eines Paares durch entgegengesetzte Zeichen, wie  $P$  und  $-P$  zu unterscheiden, und das von ihnen gebildete Paar der Kürze wegen durch  $(P, -P)$  zu bezeichnen.

Ein Paar, dessen Kräfte nicht Null sind, oder dessen Breite nicht Null ist, kann offenbar nicht für sich im Gleichgewichte sein, auch niemals durch eine einzelne Kraft im Gleichgewichte gehalten werden. Denn hielte eine Kraft  $R$  dem Paare Gleichgewicht; so kann man allemal eine der  $R$  gleiche, parallele und entgegengesetzte Kraft  $(-R)$  annehmen, welche sich gegen das Paar ganz in der nämlichen, nur gerade entgegengesetzten Lage befindet, wie  $R$ , und welche dem Paare eben so gut, wie  $R$ , Gleichgewicht halten muß, weil in beiden Fällen Alles gleich ist. Man bringe demnach die Kraft  $(-R)$  und zugleich, um nichts zu ändern, eine ihr gleiche und entgegengerichtete Kraft  $(R')$  an. Das Gleichgewicht, welches zwischen den Kräften  $P, -P$  und  $R$ , nach der Annahme besteht, wird durch Hinzufügung von  $-R$  und  $R'$  nicht gestört. Da aber auch  $P, -P$  und  $-R$  für sich im Gleichgewichte sind, so müßte zwischen den beiden noch übrigen parallelen, gleichen und in gleichem Sinne wirkenden



den Kräften ( $R$  und  $R'$ ) Gleichgewicht bestehen, was dem Grundsatz in §. 10 widerspricht.

Ein Kräftepaar ist demnach eine eigenthümliche Verbindung von Kräften, welche niemals durch eine einzelne Kraft ersetzt werden kann. Auf welche Weise aber Paare durch andere Paare ersetzt werden können, soll jetzt gezeigt werden.

13. a. Ein Kräftepaar kann man, in seiner Ebene oder im Raume, parallel mit sich selbst, beliebig verlegen, ohne seine Wirkung zu ändern; vorausgesetzt, daß die neuen Angriffspunkte mit den vorigen fest verbunden sind.

Denn es sei (Fig. 6.) ( $P, -P$ ) das Kräftepaar, an dem Arme  $AB$ . Dasselbe werde zur Abkürzung mit  $\alpha$  bezeichnet. Aus einem beliebigen Punkte  $A'$  ziehe man in dem Sinne von  $AB$  die der  $AB$  parallele und gleiche Gerade  $A'B'$ , bringe an  $A'$  die der  $P$  gleiche Kraft  $P'$  in derselben Richtung und in dem Sinne an, in welcher  $P$  an  $A$  wirkt, und füge, zugleich die ihr gleiche und entgegengesetzte ( $P''$ ) an  $A'$  hinzu; eben so bringe man an  $B'$  die Kraft  $-P'$  parallel mit der an  $B$  wirkenden gleichen Kraft, in dem Sinne derselben und zugleich im entgegengesetzten Sinne an; so erhält man an dem Arme  $A'B'$  zwei Kräftepaare, nämlich ( $P', -P'$ ) und ( $P'', -P''$ ), die einander Gleichgewicht halten. Von diesen werde das erstgenannte mit  $\beta$ , das zweite mit  $\gamma$  bezeichnet. Man kann nun, unter der Voraussetzung, daß  $A'B'$  mit  $AB$  fest verbunden ist, beweisen, daß zwischen den Paaren  $\alpha$  und  $\gamma$  Gleichgewicht besteht. Verbindet man nämlich  $A'$  mit  $B$  und  $B'$  mit  $A$  durch gerade Linien, so schneiden diese Linien einander gegenseitig in ihren Mitten  $m$ . Nun kann man die Kraft  $P''$  an  $A'$  mit der ihr gleichen und in gleichem Sinne parallel wirkenden ( $-P$ ) an  $B$  in eine Resultante ( $Q$ ) vereinigen, welche, der Summe beider Kräfte gleich und ihnen parallel, durch den Punkt  $m$  geht, der, nach §. 11., der Mittelpunkt dieser beiden gleichen und parallelen Kräfte ist. Von der andern Seite lassen sich aber auch die Kräfte  $P$  an  $A$  und  $-P'$  an  $B'$  in eine

der vorigen gleiche und entgegengesetzte, an dem nämlichen Puncte  $m$  wirkende, Resultante ( $-Q$ ) vereinigen, welche jener mithin Gleichgewicht hält. Also befindet sich das Paar  $\alpha$  mit dem Paare  $\gamma$  im Gleichgewicht, so daß nur noch das Paar  $\beta$  übrig bleibt, welches demnach mit dem anfänglich vorhandenen Paare  $\alpha$  gleichgeltend sein muß; w. z. b. w.

b. Ein Kräftepaar kann, in seiner Ebene, beliebig gedreht werden, ohne seine Wirkung zu ändern. Denn es sei (Fig. 7.)  $(P, -P)$  das gegebene Paar, von der Breite  $AB$ . Durch die Mitte  $m$  von  $AB$  ziehe man beliebig die Gerade  $A'B' = AB$ , doch so, daß auch ihre Mitte in  $m$  falle; bringe an  $A'$  und  $B'$  je zwei auf der Richtung von  $A'B'$  senkrechte, einander entgegengesetzte Kräfte  $P', P'', -P', -P''$  an, deren jede an Intensität der Kraft  $P$  gleich sei; so hat man an  $A'B'$  zwei Paare  $(P', -P')$  und  $(P'', -P'')$ , die einander Gleichgewicht halten. Von diesen hält aber das eine, nämlich in der Figur  $(P'', -P'')$  auch dem anfänglichen Paare  $(P, -P)$  Gleichgewicht; denn verlängert man die Richtungen der Kräfte  $P$  und  $P'$  bis zu ihrem Durchschnitte in  $\alpha$ , so geben sie eine Resultante, die von  $\alpha$  aus offenbar (weil  $P = P''$ ) durch  $m$  geht; eben so geben auch auf der anderen Seite die Kräfte  $-P'', -P$  eine von ihrem Durchschnitte  $\beta$  aus durch  $m$  gehende, der vorigen gleiche und entgegengerichtete Resultante; also besteht Gleichgewicht zwischen  $(P, -P)$  und  $(P'', -P'')$ . Mithin bleibt nur noch das Paar  $(P', -P')$  an  $A'B'$  übrig, welches dem Paare  $(P, -P)$  demnach gleichgilt, durch dessen Drehung um  $m$  es hervorgebracht werden kann.

Die Sätze a. und b., nach welchen sich überhaupt ein Paar in seiner Ebene, oder in parallelen Ebenen beliebig verschieben läßt, sind in Bezug auf die Kräftepaare das nämliche, was für eine einzelne Kraft die willkürliche Verlegung des Angriffspunctes in der Richtungslinie der Kraft ist.

Denkt man sich für einen Augenblick den Punct  $m$  (Fig. 7.) als unbeweglich, so ist einleuchtend, daß die Kräfte  $P, -P$  den Arm  $AB$  in ihrer Ebene um  $m$  zu drehen streben; und der

Sinn, in welchem das Paar  $(P, -P)$  seinen Arm zu drehen strebt, ist demjenigen entgegengesetzt, in welchem das Paar  $(P'', -P'')$  den seinigen zu drehen strebt. Auf diese Weise wird man jederzeit leicht unterscheiden, ob zwei Paare in einer Ebene in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne wirken.

14. Das Product aus der Breite eines Paares in die Intensität einer der Kräfte (Seitenkräfte) desselben heißt das **Moment** des Paares. Zwei Paare von gleichen Momenten, die in derselben Ebene (oder in parallelen Ebenen, was einerlei ist) in entgegengesetztem Sinne wirken, halten einander Gleichgewicht.

Denn es sei (Fig. 8.)  $(P, -P)$  das eine der Paare, von der Breite  $b = AB$ , so kann das andere Paar  $(P', -P')$ , von der Breite  $b' = AB'$ , in der Ebene so verlegt werden, daß die Arme  $AB$  und  $AB'$ , von dem nämlichen Punkte  $A$  ausgehend, theilweise zusammenfallen. Nach der Voraussetzung ist nun  $Pb = P'b'$ , folglich, wenn  $b > b'$ ,  $P < P'$ .

Demnach hat man an  $A$  die Kraft  $P' - P$ , welche parallel und in gleichem Sinne mit  $P$  wirkt, und außerdem an  $B'$  die Kraft  $P'$ , welche im entgegengesetzten Sinne der vorgenannten wirkt. Werden nun die Kräfte  $P' - P$  und  $P$  in eine Resultante zusammengesetzt, so findet man, daß dieselbe ihrer Summe  $P' - P + P$  oder  $P'$  gleich, ihnen parallel sein, und durch den Punkt  $B'$  gehen muß.

Denn man hatte  $P'b' = Pb$ , folglich  $(P' - P)b' = P(b - b')$  oder

$$P' - P : P = b - b' : b' = B'B : B'A;$$

folglich ist  $B'$  (nach §. 11.) der Mittelpunkt der Kräfte  $P' - P$  an  $A$  und  $P$  an  $B$ . Die Resultante ist demnach der noch übrigen Kraft  $-P'$  genau gleich und entgegenrichtet, und hält mithin dieser Gleichgewicht, w. z. b. w.

Paare von gleichen Momenten, die in einer Ebene in gleichem Sinne wirken, kann man also für einander setzen, oder sie sind gleichgeltend.

Hat man an einem Punkte  $C$  eine einzelne Kraft  $P$  (Fig. 9.),

und ist außerdem ein anderer Punct A mit C fest verbunden, so pflegt man auch das Product aus der Kraft P in ihren senkrechten Abstand  $AB=b$  von A, das Moment der Kraft P, in Bezug auf den Punct A, zu nennen. Dieses Moment kann man sich allemal als das eines Kräftepaares denken, welches entsteht, wenn man an A eine der P gleiche, parallele und entgegengesetzte Kraft ( $-P$ ) anbringt, und zugleich, um nichts zu ändern, eine dritte Kraft, der P ebenfalls gleich und parallel, und in gleichem Sinne mit ihr, an A hinzufügt. Da der Angriffspunct von P sich von C nach B verlegen läßt, so hat man das Kräftepaar ( $P, -P$ ) an dem Arme AB, dessen Moment  $Pb$  ist, und außerdem noch die einzelne Kraft P an A; und diese drei Kräfte sind zusammen der vorigen Kraft P gleichgeltend. Wenn in der Folge von dem Momente einer Kraft in Bezug auf einen Punct die Rede ist, so ist darunter das Moment des auf die angegebene Weise entstehenden Paares zu verstehen.

15. Nach dem Vorstehenden ist es leicht, beliebige Paare, die in einer Ebene wirken, in ein einziges gleichgeltendes Paar zu vereinigen. Denn da Paare von gleichen Momenten, in gleichem Sinne in derselben Ebene wirkend, sich für einander setzen lassen, so kann man zuerst alle gegebene Paare auf dieselbe Breite bringen, und hierauf alle an den nämlichen, dieser Breite gleichen, Arm verlegen. Alsdann vereinigen sich alle in dem nämlichen Sinne wirkenden Paare in ein einziges, dessen Moment der Summe der Momente der einzelnen Paare gleich ist, und ebenso vereinigen sich die in dem entgegengesetzten Sinne wirkenden Paare wieder in eines, welches die Summe ihrer Momente zum Moment hat. Diese beiden zusammengesetzten Paare geben aber ein einziges Paar, dessen Moment der Differenz ihrer Momente gleich ist, und welches im Sinne des größeren von ihnen wirkt.

Sind ferner zwei Paare in nicht parallelen Ebenen gegeben, so kann man auch diese sehr leicht in ein gleichgeltendes Paar zusammensetzen. Denn man bringe beide Paare auf gleiche Brei-

ten, und verlege sie an einen gemeinschaftlichen Arm in dem Durchschnitte ihrer Ebenen. Sind nun  $P$ ,  $-P$  und  $P'$ ,  $-P'$  die Kräfte der Paare, so gedacht, daß  $P$  und  $P'$  an dem einen,  $-P$  und  $-P'$  an dem anderen Endpunkte des gemeinschaftlichen Armes wirken, so geben  $P$  und  $P'$  eine Resultante  $R$ , und  $-P$ ,  $-P'$  eine ihr gleiche und entgegengesetzte  $-R$ ; beide bilden das zusammengesetzte Paar  $(R, -R)$ , dessen Breite die nämliche ist, wie die der vorigen Paare.

Auch lassen sich Kräftepaare durch Linien eben so darstellen, wie einzelne Kräfte. Sind nämlich mehrere Paare an beliebig geneigten Ebenen gegeben, so kann man alle diese Ebenen durch einen und denselben willkürlich angenommenen Punkt  $m$  legen, und jedem Paare in seiner Ebene eine solche Lage geben, daß die Mitte seines Armes in den Punkt  $m$  treffe. Errichtet man nun auf der Ebene jedes Paares ein seinem Momente proportionales Loth aus  $m$ , welches die Axe des Paares heiße; so ist klar, daß diese Axe durch ihre Richtung die (auf ihr senkrechte) Ebene und durch ihre Größe das Moment des Paares bezeichnet. Wird ferner festgesetzt, daß die Drehung, welche ein Paar zu bewirken strebt, einem in dem Endpunkte der Axe befindlichen, nach einem der Angriffspunkte hinblickenden Auge immer in demselben Sinne, etwa von der Linken zur Rechten fortgehend erscheinen soll; so ist es auch nicht mehr zweifelhaft, auf welcher Seite der Ebene des Paares die Axe, aus  $m$ , zu errichten ist, und mithin stellt die Axe auch den Sinn des Paares gehörig dar. Denkt man sich z. B. in Fig. 8. die Kräfte sämtlich als stoßend, und die Ebene der Paare  $(P, -P)$ ,  $(P'', -P'')$  horizontal, so muß die Axe des Paares  $(P, -P)$  von  $m$  aus vertical nach oben, dagegen die des entgegenwirkenden Paares  $(P'', -P'')$  von  $m$  aus vertical nach unten gehen. Denn alsdann wird z. B. die Kraft  $P$  an  $A$ , für ein in dem Endpunkte der Axe des Paares  $(P, -P)$  befindliches, nach  $A$  gewandtes Auge, den Punkt  $A$  von der Linken zur Rechten fortzutreiben streben, und wendet sich das Auge nach  $B$ , so wird die Kraft

—P eben so den Punkt B von der Linken nach der Rechten hinführen. Hieraus ist einleuchtend, wie durch die Axe nicht allein Ebene und Moment, sondern auch der Sinn eines Paares bezeichnet wird.

Werden zwei gegebene Paare auf gleiche Breiten gebracht, so verhalten sich ihre Momente und mithin ihre Axen, wie ihre Seitenkräfte. Man verlege beide an einen gemeinsamen, im Durchschnitte ihrer Ebenen liegenden, Arm; es seien (Fig. 10.) AP und AP' zwei zusammenstoßende Seitenkräfte der Paare, beide senkrecht auf dem gemeinsamen Arm, dessen Endpunkt A ist; so ist die Diagonale AR des Parallelogrammes APRP' die Seitenkraft des zusammengesetzten Paares, wie oben schon bemerkt werden. Stellen ferner AQ, AQ' die Axen der Paare (P, —P) und (P', —P') vor, so ist  $AQ:AP=AQ':AP'$ ,  $\angle QAQ'=PAP'$ ,  $QAP=Q'AP'=R$ ; folglich auch, nach Vollendung des Parallelogrammes aus AQ, AQ', die Diagonale AR':AR= $AQ:AP$ , und  $\angle R'AR=R$ ; mithin ist AR' die Axe des zusammengesetzten Paares (R, —R). Daß die Axen AQ, AQ' hier aus dem einen Endpunkte A des Armes errichtet sind, während sie oben in der Mitte des Armes errichtet wurden, macht offenbar keinen Unterschied.

Da also die Axe eines aus zwei gegebenen zusammengesetzten Paares die Diagonale des aus den Axen dieser Paare zu bildenden Parallelogrammes ist, so folgt überhaupt, daß die Zusammensetzung der Paare, vermittelt der Axen, ganz nach den nämlichen Regeln geschieht, wie die Zusammensetzung einzelner Kräfte.

Man kann daher auch Paare eben so zerlegen, wie einzelne Kräfte. Geht man bei dieser Zerlegung von den Axen aus, so ergeben sich auch sogleich die nöthigen Formeln, um namentlich ein gegebenes Paar in drei auf einander senkrechte Seiten-Paare zu zerlegen. Es sei G das Moment dieses Paares, positiv genommen, oder auch die Länge seiner Axe,  $\lambda, \mu, \nu$  die Neigungen dieser Axe gegen die Axen x, y, z; so sind  $G \cos \lambda,$

$G \cos \mu$ ,  $G \cos \nu$  die den  $x$ ,  $y$ ,  $z$  parallelen Axen der Seitenpaare, aus deren Zeichen sich zugleich der Sinn dieser Paare entnehmen läßt. Bezeichnet man die Momente dieser Paare mit  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , und zwar so, daß jedes Moment als positiv oder als negativ gilt, je nachdem seine Axen in den positiven oder negativen Theil der entsprechenden Coordinaten-Axe fällt, so hat man:

$$G \cos \lambda = L, \quad G \cos \mu = M, \quad G \cos \nu = N,$$

und 
$$G^2 = L^2 + M^2 + N^2.$$

### Kräfte im Raume, an einem festen Systeme.

16. Nach diesen Vorbereitungen braucht man sich bei besonderen Fällen nicht weiter aufzuhalten, sondern kann sogleich zur Betrachtung beliebiger Kräfte im Raume, an festverbundenen Punkten, übergehen.

Es seien  $P$ ,  $P'$ ,  $P'' \dots$  die an den Punkten des Systemes wirkenden Kräfte. An einem beliebig gewählten Punkte  $A$  des Systemes bringe man eine der  $P$  gleiche, parallele und mit ihr in gleichem Sinne wirkende Kraft, und zugleich eine ihr gleiche und entgegengesetzte an, so erhält man, auf die in §. 14. angegebene Weise, die einzelne Kraft  $P$  an  $A$  und ein Kräftepaar  $(P, -P)$ . Auf die nämliche Weise verfähre man mit den übrigen Kräften, so daß man für  $P'$  wieder die Kraft  $P'$  an  $A$  und ein Kräftepaar  $(P', -P')$  erhält, u. s. f. Es ergeben sich also so viele einzelne Kräfte an  $A$  und so viele Paare, als anfänglich Kräfte waren. Sämmtliche einzelne Kräfte an  $A$  lassen sich in eine Resultante  $R$ , und sämmtliche Paare in ein einziges Paar  $G$  zusammensetzen.

Also: Beliebige Kräfte an einem festen Systeme sind allemal gleichgeltend einer einzelnen Kraft an einem willkürlich gewählten Punkte, in Verbindung mit einem entsprechenden Kräftepaare.

Da die einzelne Kraft dem Paare nicht Gleichgewicht halt

ten kann, so muß, wenn Gleichgewicht besteht, sowohl diese Kraft als auch das Moment des Paares Null sein.

Besteht aber nicht Gleichgewicht, so kann noch die einzelne Kraft Null sein; in diesem Falle sind sämtliche Kräfte einem Paare gleichgeltend. Oder wenn die Kraft nicht Null ist, kann das Paar Null sein; man hat dann einen der Fälle, in welchen die Kräfte sich durch eine einzige ersetzen lassen, die aber, wie im Folgenden gezeigt wird, auch dann eintreten können, wenn das Paar nicht Null ist.

Im Allgemeinen, wenn weder die Kraft  $R$  noch das Paar  $G$  Null ist, zerlege man dieses nach zwei gegen einander senkrechten Ebenen, von denen die eine ( $E$ ) auf der Richtung von  $R$  senkrecht, mithin die andere ( $E'$ ) der  $R$  parallel sei. Wird die Neigung der Ebene des Paares  $G$  gegen die Ebene  $E$  mit  $\delta$ , und das Moment des Paares in  $E$  mit  $V$ , so wie das des Paares in  $E'$  mit  $V'$  bezeichnet, so ist

$$V = G \cos \delta, \quad V' = G \sin \delta.$$

Da die Ebene  $E'$  des Paares  $V'$  der  $R$  parallel ist, so kann sie auch durch die gerade Linie  $R$  selbst gelegt werden. Man drehe ferner das Paar  $V'$  in seiner Ebene so, daß die eine seiner Seitenkräfte (sie heiße  $q$ ) in die Gerade  $R$  falle, mithin die andere ( $-q$ ) der  $R$  parallel werde. Alsdann kann man zunächst die Kräfte  $R$  und  $q$ , welche in derselben Geraden liegen, in eine Summe  $R+q$  vereinigen, und diese sodann mit der parallelen Kraft  $-q$  in eine Resultante zusammensetzen, welche der Kraft  $R$  gleich und parallel sein wird. Man hat alsdann, außer dieser Resultante  $R$  nur noch das Paar  $V$ , dessen Ebene senkrecht auf der Richtung der Resultante steht. Also folgt:

Der Angriffspunct  $A$  der einzelnen Kraft  $R$ , welche in Verbindung mit einem gewissen Paare die gegebenen Kräfte ersetzt, läßt sich immer so wählen, daß die Ebene des Paares auf der Richtung von  $R$  senkrecht stehe.

Dabei versteht sich, daß für  $A$  jeder beliebige Punct in einer gewissen geraden Linie, welche die Richtung von  $R$  darstellt,



genommen werden kann. Außer dieser bestimmten geraden Linie läßt sich aber kein Angriffspunct für die Resultante so wählen, daß das zugehörige Paar senkrecht auf der Richtung der Resultante stehe. Denn bringt man  $R$  an einem andern Punkte  $B$  des Systemes, der nicht in dieser Geraden liegt, in seinem Sinne und zugleich im entgegengesetzten an, so erhält man die Kraft  $R$  an  $B$ , ferner ein Paar, dessen Seitenkräfte  $-R$  an  $B$  und  $R$  an  $A$  sind, und welches sich mit dem auf  $R$  senkrechten Paare  $V$  in ein einziges ( $G$ ) zusammensetzen läßt, dessen Ebene aber nicht mehr senkrecht auf  $R$  steht; w. z. b. w. Ferner hat  $G$  ein größeres Moment als  $V$ , weil es durch Zusammensetzung der auf einander senkrechten Paare  $(R, -R)$  und  $V$  entsteht. Folglich ist  $V$  unter allen zusammengesetzten Paaren, die man erhalten kann, je nachdem der Angriffspunct von  $R$  gewählt ist, das kleinste (d. h. es hat das kleinste Moment).

Ist dieses kleinste zusammengesetzte Paar Null, so bleibt nur noch die einzelne Kraft  $R$  übrig, welche die sämtlichen Kräfte des Systemes ersetzt. Und diese Kräfte lassen sich nie durch eine einzelne Kraft ersetzen, wenn nicht das kleinste zusammengesetzte Paar Null ist. Denn es müßte sonst eine einzelne Kraft  $R'$  einer Kraft  $R$  und einem auf ihr senkrechten Paare  $V$  Gleichgewicht halten. Dazu gehört aber, daß alle diese Kräfte, an einem Punct in ihren Richtungen angebracht, einander Gleichgewicht halten; und da die Seitenkräfte von  $V$ , an einen Punct parallel übertragen, einander aufheben, so müssen  $R'$  und  $R$  ebenfalls einander aufheben, also muß  $R'$  der  $R$  gleich und entgegengesetzt sein. Demnach erhält man ein Paar  $(R, -R)$ , welches dem Paare  $V$  Gleichgewicht halten, dessen Ebene mithin der Ebene von  $V$  parallel sein muß. Folglich muß, wenn  $R$  und  $V$  zusammen durch eine einzige Kraft im Gleichgewicht gehalten werden sollen,  $R$  der Ebene von  $V$  parallel sein. In gegenwärtigem Falle steht aber  $R$  senkrecht auf der Ebene des Paares  $V$ ; also folgt:

Kräfte an einem festen Systeme lassen sich nur dann,

und dann immer, durch eine einzige Kraft ersetzen, wenn die Ebene des zusammengesetzten Paares der Richtung der Mittelkraft parallel und mithin das kleinste zusammengesetzte Paar (V) Null ist. Unter Mittelkraft wird aber hier, wie in der Folge, diejenige Resultante verstanden, welche man erhält, wenn alle gegebenen Kräfte parallel mit sich selbst an einen gemeinsamen Angriffspunct verlegt und in eine Kraft zusammengesetzt werden. Daß hier die Mittelkraft nicht Null sein soll, ist schon oben gesagt worden.

17. Die vorstehenden höchst einfachen Betrachtungen enthalten die Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte an einem festen Systeme, und den Bedingungen ihres Gleichgewichtes. Es bleibt nur noch übrig, die hierher gehörigen Formeln zu entwickeln.

Man nehme einen beliebigen mit dem Systeme fest verbundenen Punct A zum Anfange senkrechter Coordinaten, bezeichne die Kräfte mit  $P, P', P'' \dots$ , ferner die Neigungen von  $P$  gegen die Axen  $x, y, z$  mit  $\alpha, \beta, \gamma$ , und die Coordinaten des Angriffspunctes von  $P$  mit  $x, y, z$ ; eben so die Neigungen von  $P'$  gegen die Axen mit  $\alpha', \beta', \gamma'$ , und die Coordinaten des Angriffspunctes von  $P'$  mit  $x', y', z'$ ; u. s. f. Indem man nun alle Kräfte an den Anfang der Coordinaten, auf die im vorigen §. angegebene Weise, überträgt, erhält man zuerst für die Richtung und Intensität der Resultante  $R$  an  $A$ , die Formeln

$$R \cos \lambda = \Sigma P \cos \alpha, \quad R \cos \mu = \Sigma P \cos \beta, \quad R \cos \nu = \Sigma P \cos \gamma,$$

deren Bedeutung aus §. 7. klar ist.

Außer den einzelnen Kräften an  $A$  ergeben sich noch die Paare  $(P, -P), (P', -P'),$  u. s. f. Um diese in ein einziges zusammen zu setzen, zerlege man sie zuerst nach den Ebenen der Coordinaten, was am zweckmäßigsten auf folgende Weise geschieht:

Die Kraft  $P$  werde nach den Axen in ihre Componenten  $P \cos \alpha, P \cos \beta, P \cos \gamma$  und eben so die Kraft  $-P$  an  $A$  in die Componenten  $-P \cos \alpha, -P \cos \beta, -P \cos \gamma$  zerlegt. Es

sei (Fig. 11.) B der Angriffspunct von P, und  $BD = P \cos \alpha$  die mit x parallele Componente von P. Die Coordinaten x, y, z von B, so wie die Cosinus von  $\alpha, \beta, \gamma$  denke man sich zunächst alle als positiv. Man verlege den Angriffspunct von BD in den Durchschnitt C ihrer Richtung mit der Ebene yz, dessen Coordinaten  $x=0, y=AI, z=IC$  sind; bringe an dem Puncte E der Axe z, für welchen  $x=0, y=0, z=AE=IC$ , die Kraft  $P \cos \alpha = Ed$  parallel und in gleichem Sinne mit BD, so wie  $Ed' = -P \cos \alpha$ , der vorigen entgegen, an; so ergeben sich zwei Kräftepaare, das eine aus den Kräften  $AD' = -P \cos \alpha$  an A und  $Ed = P \cos \alpha$  an E, dessen Breite  $z=AE$ , das andere aus  $Ed' = -P \cos \alpha$  an E und  $BD = +P \cos \alpha$  an C, dessen Breite  $EC=y$  ist. Das erste dieser Paare liegt in der Ebene zx, und sein Moment ist  $P \cos \alpha \cdot z$ ; das zweite ist der Ebene xy parallel und kann mithin in dieselbe verlegt werden; sein Moment ist  $P \cos \alpha \cdot y$ . Das Moment eines dieser Paare ist positiv oder negativ, je nachdem seine Axe in den positiven oder negativen Theil der auf der Ebene des Paares senkrechten Coordinaten-Axe fällt. Wird nun das Moment des in die Ebene xy verlegten Paares (BD,  $Ed'$ ) als positiv angenommen, so muß, da  $Ax, Ay, Az$  in Fig. 11. die positiven Theile der Axen x, y, z darstellen, die Axe dieses Paares in die Gerade Az fallen. Alsdann aber lehrt die Anschauung, daß die Axe des Paares (AD,  $Ed$ ) nicht in Ay, sondern in die Verlängerung dieser Axe über A hinaus oder in den negativen Theil der Axe y fallen muß, damit die Drehung, aus dem Endpuncte der Axe gesehen, immer in demselben Sinne erscheine; also ist das Paar  $P \cos \alpha \cdot z$  negativ, wenn  $P \cos \alpha \cdot y$  positiv ist. Daher giebt die Componente  $P \cos \alpha$  die Paare  $+Py \cos \alpha$  in der Ebene xy und  $-Pz \cos \alpha$  in der Ebene xz.

Auf gleiche Weise verlege man den Angriffspunct der mit y parallelen Componente  $P \cos \beta$ , an den Durchschnitt ihrer Richtung mit der Ebene xz, also an den Punct (x, 0, z), und bringe die Kraft  $P \cos \beta$  in ihrem Sinne und im entgegenger-

setzen an dem Punkte  $(x, 0, 0)$  an; so erhält man zwei Paare, das eine aus  $-P \cos \beta$  an A, d. i.  $(0, 0, 0)$ , und  $+P \cos \beta$  an  $(x, 0, 0)$ ; das zweite aus  $-P \cos \beta$  an  $(x, 0, 0)$  und  $+P \cos \beta$  an  $(x, 0, z)$ . Die Momente dieser Paare sind  $-Px \cos \beta$  und  $+Pz \cos \beta$ . Denn beide sind einander entgegengesetzt, wie es die beiden vorigen waren, und man sieht leicht, daß das Paar  $-Px \cos \beta$  (in Figur 11. dargestellt durch  $(FG, AG')$ , wo  $FG = P \cos \beta$ ,  $AG' = -P \cos \beta$ , beide der Axe  $y$  parallel, an dem Arme  $AF = x$ ) dem in der nämlichen Ebene wirkenden Paare  $(BD, Ed')$  entgegengesetzt ist, und folglich ein negatives Moment hat, da das Moment von diesem positiv ( $=Py \cos \alpha$ ) angenommen wurde.

Verlegt man endlich den Angriffspunct der Componente  $P \cos \gamma$  an den Punct  $(x, y, 0)$ , also in die Ebene  $xy$ , und bringt die Kraft  $P \cos \gamma$  an dem Puncte  $(0, y, 0)$  in ihrem Sinne und in dem entgegengesetzten an, so erhält man wieder zwei Paare, das eine aus der Kraft  $-P \cos \gamma$  an A und  $+P \cos \gamma$  an  $(0, y, 0)$ ; das andere aus  $-P \cos \gamma$  an  $(0, y, 0)$  und  $+P \cos \gamma$  an  $(x, y, 0)$ . Die Momente dieser Paare sind, nach Größe und Zeichen,  $-Py \cos \gamma$  und  $+Px \cos \gamma$ . Denn das erste dieser Momente, in der Ebene  $xz$ , ist dem in derselben Ebene befindlichen Paare  $Pz \cos \beta$  entgegengesetzt, wie aus der Anschauung leicht erhellet. Demnach geben die Componenten von  $P$  folgende Paare:

in der Ebene  $xy$ :  $+Py \cos \alpha$ ,  $-Px \cos \beta$ .

— — —  $xz$ :  $+Px \cos \gamma$ ,  $-Pz \cos \alpha$ .

— — —  $yz$ :  $+Pz \cos \beta$ ,  $-Py \cos \gamma$ .

Diese Ausdrücke bleiben, nicht allein der Größe, sondern auch den Zeichen nach, richtig, wenn beliebige der Größen  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  negativ sind. Denn irgend ein Paar, z. B.  $Py \cos \alpha$ , verwandelt sich in ein entgegengesetztes, sowohl wenn die Seitenkraft  $P \cos \alpha$ , als wenn die Breite  $y$  negativ wird, in welchen Fällen auch das Product  $Py \cos \alpha$  negativ wird;

oder, wenn auf beiden Seiten mit  $G'$  multiplicirt wird, nach den vorhergehenden Formeln:

$$G' \cos \Theta = L' \cos \lambda + M' \cos \mu + N' \cos \nu.$$

Offenbar ist aber  $G' \cos \Theta$  die Componente von  $G'$ , welche senkrecht auf  $R$  steht, während die zweite Componente mit  $R$  parallel ist, oder man hat  $G' \cos \Theta = V$ , d. h. gleich dem kleinsten zusammengesetzten Paare, und mithin ist der Ausdruck für das Moment dieses Paares:

$$V = L' \cos \lambda + M' \cos \mu + N' \cos \nu.$$

Multipliziert man die eben angegebenen Werthe von  $L'$ ,  $M'$ ,  $N'$ , der Reihe nach mit  $\cos \lambda$ ,  $\cos \mu$ ,  $\cos \nu$ , so ergibt sich auch, durch Addition der Producte:

$$L' \cos \lambda + M' \cos \mu + N' \cos \nu = L \cos \lambda + M \cos \mu + N \cos \nu,$$

d. h. das kleinste zusammengesetzte Paar ( $V$ ) kann eben so gut durch  $L \cos \lambda + M \cos \mu + N \cos \nu$ , oder durch die auf  $R$  senkrechte Componente von  $G$ , anstatt der von  $G'$ , ausgedrückt werden; was sich übrigens von selbst versteht.

Um ferner die Gleichung derjenigen Resultante zu erhalten, zu welcher das kleinste Paar ( $V$ ) gehört, bemerke man, daß die Axe dieses Paares  $V$  mit  $R$  parallel sein muß. Soll daher das zusammengesetzte Paar  $G' = V$  sein, so muß zugleich sein

$$\frac{\cos l'}{\cos \lambda} = \frac{\cos m'}{\cos \mu} = \frac{\cos n'}{\cos \nu},$$

oder weil  $V \cos l' = L'$ ,  $V \cos m' = M'$ ,  $V \cos n' = N'$  ist, so muß sein:

$$\frac{L'}{\cos \lambda} = \frac{M'}{\cos \mu} = \frac{N'}{\cos \nu}.$$

Verbindet man diese Gleichungen mit

$$L' \cos \lambda + M' \cos \mu + N' \cos \nu = V,$$

so folgt:

$$L' = V \cos \lambda, \quad M' = V \cos \mu, \quad N' = V \cos \nu.$$

Werden ferner für  $L'$ ,  $M'$ ,  $N'$  ihre Werthe gesetzt, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$R(c \cos \mu - b \cos \nu) = L - V \cos \lambda$$

$$R(a \cos \nu - c \cos \lambda) = M - V \cos \mu$$

$$R(b \cos \lambda - a \cos \mu) = N - V \cos \nu,$$

von denen jede, vermöge der Gleichung  $V = L \cos \lambda + M \cos \mu + N \cos \nu$ , eine Folge der beiden anderen ist. Diese Gleichungen, in welchen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  laufende Coordinaten sind, bestimmen die Lage der mit dem kleinsten zusammengesetzten Paare ( $V$ ) verbundenen Resultante. Ist  $V = 0$ , oder  $L \cos \lambda + M \cos \mu + N \cos \nu = 0$ , so lassen sich die Kräfte durch eine einzige Kraft ersetzen, deren Gleichungen mithin folgende sind:

$$R(c \cos \mu - b \cos \nu) = L, \quad R(a \cos \nu - c \cos \lambda) = M,$$

$$R(b \cos \lambda - a \cos \mu) = N.$$

Wird aber die Bedingung  $V = 0$  nicht erfüllt, so ist es unmöglich, die Kräfte des Systemes durch eine einzelne Kraft zu ersetzen.

19. Die sechs in §. 17. angegebenen Bedingungen des Gleichgewichtes gelten für ein frei bewegliches festes System. Ist aber das System nicht frei beweglich, so braucht nur ein Theil dieser Bedingungen erfüllt zu werden. Wenn z. B. ein Punkt des Systemes unbeweglich ist, so bringe man an diesem alle Kräfte in ihrem Sinne und im entgegengesetzten an: alsdann erhält man eine einzelne Resultante, die an diesem unbeweglichen Punkte angebracht ist, und ein Kräftepaar. Die Resultante giebt den Druck, welchen der unbewegliche Punkt erleidet, der aber durch den Widerstand desselben aufgehoben wird, und für das Gleichgewicht ist nur noch nöthig, daß das Moment des Kräftepaares Null sei. Wird also der unbewegliche Punkt zum Anfange der Coordinaten genommen, so sind  $L = 0$ ,  $M = 0$ ,  $N = 0$  die Bedingungen des Gleichgewichtes. Oder die sämtlichen Kräfte an dem Systeme müssen sich auf eine einzelne Kraft bringen

lassen, deren Richtung durch den unbeweglichen Punkt geht, wenn Gleichgewicht bestehen soll.

Sind zwei Punkte unbeweglich, so nehme man einen derselben zum Angriffspunkte der Resultante, welche wieder durch den Widerstand dieses Punktes aufgehoben wird. Alsdann braucht das zugehörige Paar nicht mehr Null zu sein, damit Gleichgewicht bestehe, sondern es ist nur nöthig, daß seine Ebene der geraden Linie zwischen den beiden unbeweglichen Punkten parallel sei, oder, was einerlei ist, durch diese hindurchgehe. Nimmt man also die Gerade zwischen beiden unbeweglichen Punkten zur Axe der  $x$ , so ist  $L=0$  die Bedingung des Gleichgewichtes.

Wenn ein Körper sich um eine unbewegliche Axe drehen und zugleich längs derselben gleiten kann, so nehme man einen in der Axe befindlichen Punkt des Körpers zum Angriffspunkte der Resultante, und zerlege diese in eine auf der Axe senkrechte und eine ihr parallele Componente. Alsdann ist, für das Gleichgewicht, erforderlich, daß die der Axe parallele Componente von  $R$  Null sei, während die auf ihr senkrechte Componente durch den Widerstand der Axe aufgehoben wird. Ferner muß die Ebene des zugehörigen Kräftepaars durch die Axe gehen. Nimmt man die unbewegliche Axe zur Axe der  $x$ , so bestehen die Bedingungen des Gleichgewichtes in den folgenden beiden Gleichungen  $\sum P \cos \alpha = 0$  (oder  $X=0$ ) und  $L=0$ . Hieraus folgt noch, daß die Bedingungen des Gleichgewichtes für einen freien Körper, nämlich

$$\begin{array}{lll} X=0 & Y=0 & Z=0 \\ L=0 & M=0 & N=0 \end{array}$$

nichts Anderes ausdrücken, als daß um jede der Axen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  Gleichgewicht bestehen muß, so daß der Körper sich um keine derselben drehen und längs keiner derselben gleiten kann.

20. Die allgemeinen Formeln der §§. 17. 18. sollen jetzt auf ein System angewendet werden, dessen Punkte und Kräfte alle in einer Ebene liegen. Es sei diese Ebene die der  $x$  und  $y$ ;

so sind die Ordinaten  $z, z', z'' \dots$  sämmtlich Null, und zugleich  $\cos \gamma = 0, \cos \gamma' = 0, \cos \gamma'' = 0$ , u. s. f.; folglich (§. 17.)

$$R \cos \lambda = \Sigma P \cos \alpha, R \cos \mu = \Sigma P \cos \beta, R \cos \nu = 0.$$

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = \Sigma P (y \cos \alpha - x \cos \beta).$$

Ist  $R = 0$ , also  $\Sigma P \cos \alpha = 0, \Sigma P \cos \beta = 0$ ; so ergeben die sämmtlichen Kräfte ein Paar, dessen Moment  $= N$  ist. Ist aber  $R$  nicht Null, so lassen sich die Kräfte immer durch eine einzige ersetzen. Denn alsdann ist  $L \cos \lambda + M \cos \mu + N \cos \nu = 0$ ; weil  $L = 0, M = 0, \cos \nu = 0$  (vergl. §. 18.). Uebrigens ist dieses auch ohne Anwendung der allgemeinen Bedingungsgleichung von selbst klar. Die Richtungslinie der ersetzenden Kraft wird, nach §. 18., durch folgende Gleichung bestimmt:

$$R (b \cos \lambda - a \cos \mu) = N,$$

in welcher  $a, b$  laufende Coordinaten sind.

Da  $\cos \gamma = 0$ , mithin  $\cos \alpha^2 + \cos \beta^2 = 1$ , so kann man einen Winkel  $\varphi$ , zwischen 0 und  $2\pi$  so bestimmen, daß  $\cos \alpha = \cos \varphi, \cos \beta = \sin \varphi$  wird. Alsdann ist  $\varphi$  die Neigung der Richtungslinie von  $P$  gegen die positive Axe der  $x$ , allemal in dem nämlichen Sinne von 0 bis  $2\pi$  gezählt. Eben so kann  $\cos \alpha' = \cos \varphi', \cos \beta' = \sin \varphi'$  gesetzt werden, u. s. f. Man setze noch  $\cos \lambda = \cos \psi, \cos \mu = \sin \psi$ , so erhält man folgende Gleichung für die Richtungslinie der ersetzenden Kraft;

$$R (b \cos \psi - a \sin \psi) = \Sigma P (y \cos \varphi - x \sin \varphi).$$

Zugleich ist  $R \cos \psi = \Sigma P \cos \varphi, R \sin \psi = \Sigma P \sin \varphi$ .

Hieraus lassen sich die Coordinaten des Mittelpunktes der Kräfte herleiten, welcher bei mehreren Kräften in einer Ebene eben sowohl vorhanden ist, wie bei zweien (§. 11.), wenn die Kräfte nicht gerade ein Paar bilden. Werden nämlich alle Kräfte, ohne Aenderung ihrer gegenseitigen Neigungen um ihre Angriffspunkte, in ihrer Ebene gedreht, so dreht sich auch die ersetzende Kraft beständig um einen festen Mittelpunkt, welcher



sogleich bestimmt werden soll. Da die gegenseitigen Neigungen so wie die Intensitäten der Kräfte unverändert bleiben, so bleibt auch die Neigung jeder Kraft gegen die Resultante aller Kräfte, während der Drehung, immer die nämliche. Setzt man daher  $\varphi = \psi + \varepsilon$ ,  $\varphi' = \psi + \varepsilon'$ ,  $\varphi'' = \psi + \varepsilon''$  u. s. f., so bleiben  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$ ,  $\varepsilon''$ , .. während der Drehung ungeändert, und es ändert sich nur noch  $\psi$ . Man erhält demnach aus den vorhergehenden Gleichungen:

$$R \cos \psi = \sum P \cos (\psi + \varepsilon), \quad R \sin \psi = \sum P \sin (\psi + \varepsilon)$$

$$R(b \cos \psi - a \sin \psi) = \sum P(y \cos (\psi + \varepsilon) - x \sin (\psi + \varepsilon))$$

oder

$$R(b \cos \psi - a \sin \psi) = \sum P(y \cos \varepsilon - x \sin \varepsilon) \cdot \cos \psi \\ - \sum P(y \sin \varepsilon + x \cos \varepsilon) \sin \psi.$$

Diese Gleichung besteht für jeden Werth von  $\psi$ , und zerfällt mithin in folgende zwei:

$$Rb = \sum P(y \cos \varepsilon - x \sin \varepsilon), \quad Ra = \sum P(y \sin \varepsilon + x \cos \varepsilon),$$

durch welche die Coordinaten  $a$ ,  $b$  des gesuchten Mittelpunctes bestimmt werden.

### Von den parallelen Kräften und dem Mittelpuncte derselben (Schwerpuncte).

21. Wirken zwei parallele Kräfte  $P$  und  $P'$  in entgegengesetztem Sinne, und sind  $P \cos \alpha$ ,  $P \cos \beta$ ,  $P \cos \gamma$  die Componenten von  $P$  nach den Axen, so sind  $-P' \cos \alpha$ ,  $-P' \cos \beta$ ,  $-P' \cos \gamma$  die Componenten von  $P'$ . Um demnach die allgemeine Formeln des §. 17. auf parallele Kräfte bequem anzuwenden, kann man den Intensitäten solcher Kräfte, die in entgegengesetztem Sinne wirken, entgegengesetzte Zeichen beifügen, und unter dieser Annahme  $\cos \alpha = \cos \alpha' = \cos \alpha'' \dots$ ,  $\cos \beta = \cos \beta' = \cos \beta'' \dots$ ,  $\cos \gamma = \cos \gamma' = \cos \gamma'' \dots$  setzen. Hierdurch ergibt sich aus den Formeln des §. 17.

$$R \cos \lambda = \cos \alpha \cdot \Sigma P, \quad R \cos \mu = \cos \beta \cdot \Sigma P, \quad R \cos \nu = \cos \gamma \cdot \Sigma P$$

$$L = \cos \beta \Sigma Pz - \cos \gamma \Sigma Py, \quad M = \cos \gamma \Sigma Px - \cos \alpha \Sigma Pz,$$

$$N = \cos \alpha \Sigma Py - \cos \beta \Sigma Px.$$

Ist die Summe  $\Sigma P = 0$ , so wird  $R = 0$ , und die Kräfte geben bloß ein Paar. Ist aber  $\Sigma P$  nicht Null, so kann man setzen:

$$R = \Sigma P, \quad \cos \lambda = \cos \alpha, \quad \cos \mu = \cos \beta, \quad \cos \nu = \cos \gamma,$$

die Resultante  $R$  ist also der Summe aller Kräfte, mit ihren Zeichen, gleich, ihnen parallel, und wirkt in dem Sinne der positiven oder negativen Kräfte, je nachdem  $\Sigma P$  positiv oder negativ ist. Ferner sieht man leicht, daß die vorstehenden Werthe von  $L, M, N, \lambda, \mu, \nu$ , der Bedingung

$$L \cos \lambda + M \cos \mu + N \cos \nu = 0$$

genügen; woraus folgt, daß die Kräfte sich durch eine einzige ersetzen lassen. Zur Bestimmung der Lage dieser Resultante erhält man aus §. 18. die Gleichungen:

$$(w \cos \beta - v \cos \gamma) \Sigma P = \cos \beta \Sigma Pz - \cos \gamma \Sigma Py.$$

$$(u \cos \gamma - w \cos \alpha) \Sigma P = \cos \gamma \Sigma Px - \cos \alpha \Sigma Pz.$$

$$(v \cos \alpha - u \cos \beta) \Sigma P = \cos \alpha \Sigma Py - \cos \beta \Sigma Px,$$

oder

$$(w \Sigma P - \Sigma Pz) \cos \beta = (v \Sigma P - \Sigma Py) \cos \gamma,$$

$$(u \Sigma P - \Sigma Px) \cos \gamma = (w \Sigma P - \Sigma Pz) \cos \alpha,$$

$$(v \Sigma P - \Sigma Py) \cos \alpha = (u \Sigma P - \Sigma Px) \cos \beta,$$

in welchen  $u, v, w$  (anstatt der dortigen  $a, b, c$ ) die laufenden Coordinaten sind. Diesen Gleichungen wird durch folgende Werthe von  $u, v, w$ , unabhängig von  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ , Genüge geleistet:

$$u \Sigma P = \Sigma Px, \quad v \Sigma P = \Sigma Py, \quad w \Sigma P = \Sigma Pz,$$

oder 
$$u = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}, \quad v = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}, \quad w = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P}.$$

Diese Werthe bestimmen einen Punct, durch welchen die Resultante immer geht, wie auch die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  geändert werden mögen; d. h. wie man auch die Kräfte, mit Beibehaltung des

Parallelismus, um ihre Angriffspunkte drehen mag, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wie man auch den Körper verschieben und drehen mag, wenn nur die Kräfte mit unveränderlicher Intensität in unveränderter Richtung auf ihre Angriffspunkte zu wirken fortfahren.

Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt paralleler Kräfte; wird aber auch häufig, weil er in der Anwendung auf schwere Körper am meisten vorkommt, der Schwerpunkt genannt. Da schon früher von einem Mittelpunkte nicht paralleler Kräfte, in einer Ebene, die Rede gewesen ist, so mag noch bemerkt werden, daß dieser sich von dem Mittelpunkte paralleler Kräfte in so fern unterscheidet, als er nur für eine Drehung der Kräfte in ihrer Ebene, der Mittelpunkt paralleler Kräfte dagegen für jede beliebige Drehung gilt. Von den Eigenschaften aber, welche sich bei unbeschränkter Drehung nicht paralleler Kräfte ergeben, wird im folgenden Abschnitte gehandelt werden.

22. Die obigen Ausdrücke für die Coordinaten des Schwerpunktes sind in der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten hergeleitet, gelten aber auch für schiefe Coordinaten. Denn es seien, aus einem gemeinsamen Anfange A,  $x, y, z$  rechtwinklige,  $x_1, y_1, z_1$  schiefe Coordinaten eines Punktes O; man bezeichne die Neigung der Axe  $x_1$  gegen  $x$  mit  $(x_1, x)$ , eben so die Neigung von  $y_1$  gegen  $x$  mit  $(y_1, x)$  u. s. f., und setze zur Abkürzung

$$\cos(x_1, x) = a, \cos(y_1, x) = a_1, \cos(z_1, x) = a_2,$$

$$\cos(x_1, y) = b, \cos(y_1, y) = b_1, \cos(z_1, y) = b_2,$$

$$\cos(x_1, z) = c, \cos(y_1, z) = c_1, \cos(z_1, z) = c_2.$$

Werden die schiefen Coordinaten  $x_1, y_1, z_1$  des Punktes O auf die Axe  $x$  projectirt, so ist die Summe der Projectionen gleich  $x$ ; also

$$x = ax_1 + a_1y_1 + a_2z_1.$$

Eben so erhält man durch Projection auf  $y$  und  $z$ :

$$y = bx_1 + b_1y_1 + b_2z_1.$$

$$z = cx_1 + c_1 y_1 + c_2 z_1.$$

Zugleich ist

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, \quad a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1.$$

Nun war für den Schwerpunkt in rechtwinkligen Coordinaten:

$$u \Sigma P = \Sigma P x, \quad v \Sigma P = \Sigma P y, \quad w \Sigma P = \Sigma P z.$$

Werden mit  $u_1, v_1, w_1$  die schiefen Coordinaten des nämlichen Schwerpunktes bezeichnet, so ist:

$$\begin{aligned} u &= a u_1 + a_1 v_1 + a_2 w_1 \\ v &= b u_1 + b_1 v_1 + b_2 w_1 \\ w &= c u_1 + c_1 v_1 + c_2 w_1, \end{aligned}$$

mithin

$$(a u_1 + a_1 v_1 + a_2 w_1) \Sigma P = a \Sigma P x_1 + a_1 \Sigma P y_1 + a_2 \Sigma P z_1$$

oder

$$a(u_1 \Sigma P - \Sigma P x_1) + a_1(v_1 \Sigma P - \Sigma P y_1) + a_2(w_1 \Sigma P - \Sigma P z_1) = 0.$$

Bertauscht man in dieser Formel  $a, a_1, a_2$  mit  $b, b_1, b_2$  und mit  $c, c_1, c_2$ ; so erhält man im Ganzen drei Gleichungen zur Bestimmung von  $u_1, v_1, w_1$ . Man sieht aber, daß die Auflösung derselben nur zu folgenden Werthen führen kann:

$$u_1 \Sigma P - \Sigma P x_1 = 0, \quad v_1 \Sigma P - \Sigma P y_1 = 0, \quad w_1 \Sigma P - \Sigma P z_1 = 0;$$

welche Formeln zeigen, daß der obige Ausdruck des Schwerpunktes auch für schiefe Coordinaten gilt, w. z. b. w.

Um den Schwerpunkt beliebiger paralleler Kräfte zu finden, kann man dieselben auch in mehrere Gruppen theilen, den Schwerpunkt und die Resultante jeder einzelnen Gruppe bestimmen, und aus diesen sodann den Schwerpunkt der gesammten Kräfte herleiten, wie ohne Weiteres klar ist. Hieraus folgt der Satz:

Wirken parallele Kräfte auf beliebige Punkte im Raume, und verbindet man jeden dieser Punkte mit dem Schwerpunkte der jedesmal übrigen Punkte durch eine Gerade, so schneiden alle diese Geraden einander in einem Punkte, welcher der Schwerpunkt des ganzen Systemes ist.

Sind insbesondere drei Punkte A, B, C gegeben, (§. 11.) die nicht in einer Geraden liegen, an welchen die parallelen Kräfte A, B, C wirken, deren Summe nicht Null ist, so sei D der Schwerpunkt von A und B, E der von C und B; man ziehe CD, AE, so muß der Schwerpunkt von A, B, C sowohl in der einen, als in der anderen dieser Geraden, also muß er in ihrem Durchschnitte G liegen. Zieht man noch BG, so muß der Durchschnitt F dieser Linie mit AC der Schwerpunkt von A und C sein. Da G der Schwerpunkt von C und D ist, so verhält sich

$$DC : GC = C : A + B$$

oder

$$DG : DC = C : A + B + C$$

oder

$$\triangle AGB : ACB = C : A + B + C.$$

Hieraus ergibt sich, daß die Flächen der drei Dreiecke, welche den Schwerpunkt G zur gemeinschaftlichen Spitze und die Seiten des Dreiecks zu Grundlinien haben, sich der Reihe nach verhalten, wie die an der jedesmaligen dritten Spitze von ABC angebrachten Kräfte, ohne ihre Zeichen genommen. Sind die Zeichen dieser Kräfte alle die nämlichen, so fällt der Schwerpunkt innerhalb des Dreiecks; sind sie es nicht, so fällt er außerhalb. Sind insbesondere die drei Kräfte einander an Größe und Zeichen gleich, so sind auch die drei Dreiecke um G einander gleich, und jedes gleich  $\frac{1}{3}$  ABC. Zugleich liegen dann die Punkte D, E, F in den Mitten ihrer Seiten, und man hat:

$$\frac{GD}{CD} = \frac{GE}{AE} = \frac{GF}{BF} = \frac{1}{3}.$$

Sind vier Punkte A, B, C, D gegeben, (§. 12.) an welchen die gleichnamigen parallelen Kräfte wirken, so sei G der Schwerpunkt von A B C, H der Schwerpunkt von B C D. Man ziehe DG, AH, so müssen diese beiden Linien einander in einem Punkte K schneiden, welcher der Schwerpunkt von A, B, C, D ist. Zugleich muß sich verhalten

$$KG : DK = D : A + B + C$$

oder

$$KG : GD = D : A + B + C + D.$$

oder  $\text{Pyram. ABCK} : \text{ABCD} = D : A + B + C + D.$

Ueberhaupt müssen die vier in K zusammenstoßende Pyramiden, deren Grundflächen die Seitenflächen der Pyramide ABCD sind, sich zu einander verhalten, wie die an der jedesmaligen vierten Spitze angebrachte Kräfte. Sind insbesondere die vier Kräfte einander gleich und in gleichem Sinne wirksam, so ist

$$KG : GD = 1 : 4,$$

und die vier Pyramiden um K sind einander gleich.

Eine bemerkenswerthe Eigenschaft des Schwerpunktes ist folgende:

Sind beliebige, durch Linien nach Größe und Richtung dargestellte, Kräfte um einen Punkt A im Gleichgewichte, so hat A gegen die Endpunkte B, C, D ... dieser Linien eine solche Lage, daß, wenn man sich gleiche, parallele und in gleichem Sinne wirkende Kräfte an diesen Endpunkten angebracht denkt, der Punkt A der Schwerpunkt derselben ist.

Denn man lege durch A drei auf einander senkrechte Axen, mit welchen die Kräfte die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$ , u. s. f. bilden, so ist, weil Gleichgewicht besteht,

$$P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + \dots = 0, \quad P \cos \beta + P' \cos \beta' + \dots = 0, \\ P \cos \gamma + P' \cos \gamma' + \dots = 0.$$

Nun ist aber

$$P : P' : P'' \dots = AB : AC : AD \dots,$$

also ist auch

$$AB \cos \alpha + AC \cos \alpha' + \dots = 0,$$

oder, wenn  $x, x', \dots$  die Abscissen von B, C ... sind, mithin  $x = AB \cdot \cos \alpha$ , u. s. f., so ist  $x + x' + \dots = 0$  oder  $\Sigma x = 0$ . Eben so ist  $\Sigma y = 0, \Sigma z = 0$ . Nun seien  $u, v, w$  die Coordinaten des Schwerpunktes der  $n$  gleichen Kräfte an A, B, C ...; so ist, wenn man die Intensität jeder derselben mit  $Q$  bezeichnet,

$$nQ \cdot u = Qx + Qx' + \dots = Q \Sigma x = 0;$$

also  $u=0$ , eben so:  $v=0$ ,  $w=0$ ; also ist der Anfang der Coordinaten der Schwerpunkt; w. z. b. w. Sind insbesondere vier Kräfte, die nicht in einer Ebene liegen mögen, um einen Punkt A im Gleichgewichte, und B, C, D, E die Endpunkte der sie darstellenden Linien; so ist A der Schwerpunkt von vier gleichen, parallelen, in gleichem Sinne an B, C, D, E wirkenden Kräften. Daher sind, nach dem Vorigen, die vier Pyramiden, welche A zur gemeinschaftlichen Spitze, und die Grenzflächen der Pyramide BCDE zu Grundflächen haben, einander gleich. Hieraus folgt der Satz:

Stellen die Linien AB, AC, AD, AE vier Kräfte dar, die an dem Angriffspunkte A im Gleichgewichte sind, so sind die vier durch je drei dieser Linien, als zusammenstößende Kanten, bestimmten Pyramiden einander an Rauminhalt gleich.

23. Wenn die Angriffspunkte der parallelen Kräfte ein stetiges Ganze bilden, welches Linie, Fläche oder Körper sein kann, so läßt sich der Schwerpunkt derselben, mit Hülfe der Integralrechnung, folgendermaßen finden:

Man theile das von den Punkten gebildete Ganze im Elemente  $dv$ , die nach allen Dimensionen unendlich klein seien. Wirkt nun an einem Punkte von  $dv$  die Kraft  $p$ , so wird die an jedem anderen Punkte des nämlichen Elementes wirkende Kraft nur um eine im Verhältnisse zu  $p$  unendlich kleine Größe von  $p$  verschieden sein, indem vorausgesetzt wird, daß die Kräfte sich von einem Punkte zum anderen stetig ändern. Man kann mithin alle Kräfte an den Punkten von  $dv$  als einander gleich und das Product  $p dv$  als das Maas ihrer Resultante ansehen, welche an dem Schwerpunkte von  $dv$  angebracht werden muß. Bezeichnet man die Coordinaten desselben mit  $x, y, z$  und die Coordinaten des Schwerpunktes aller Kräfte mit  $x', y', z'$ , so erhält man zur Bestimmung der letzteren sofort:

$$x' \sum p dv = \sum p x dv, \quad y' \sum p dv = \sum p y dv, \quad z' \sum p dv = \sum p z dv;$$

oder wenn, wie hier erforderlich, die Summationen durch das

Integralzeichen angedeutet werden,

$$, x'/p dv = \int p x dv, y'/p dv = \int p y dv, z'/p dv = \int p z dv. \quad a.$$

Obgleich in diesen Formeln  $x, y, z$  sich auf den Schwerpunkt des Elementes  $dv$  beziehen, so können sie doch ohne Weiteres als die Coordinaten des Angriffspunctes von  $p$  angesehen werden, weil dieser Angriffspunct vom Schwerpunkte des Elementes  $dv$  unendlich wenig entfernt ist. Im Allgemeinen ist die Kraft  $p$  eine Function der Coordinaten ihres Angriffspunctes. Ist insbesondere  $p$  constant, d. h. sind die an den verschiedenen Puncten wirkenden parallelen Kräfte einander gleich, so heißt das von den Puncten gebildete Ganze gleichartig. Alsdann gehen die Formeln a. in folgende über:

$$x'/dv = \int x dv, y'/dv = \int y dv, z'/dv = \int z dv,$$

von welchen jetzt auf einige Beispiele Anwendung gemacht werden soll.

Bilden die Angriffspuncte eine Linie, so ist das Bogenelement  $= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$  für  $dv$  zu setzen; mithin erhält man für den Schwerpunkt einer gleichartigen Linie von der Länge  $s$ :

$$x' = \frac{\int x ds}{s}, \quad y' = \frac{\int y ds}{s}, \quad z' = \frac{\int z ds}{s}. \quad A.$$

Das Element einer Fläche, in rechtwinklichen Coordinaten ausgedrückt, ist

$$dx dy \sqrt{1 + p^2 + q^2};$$

also erhält man die Coordinaten des Schwerpunktes einer gleichartigen Fläche

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{\iint x dx dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{\iint dx dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}}, & y' &= \frac{\iint y dx dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{\iint dx dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}} \\ z' &= \frac{\iint z dx dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{\iint dx dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}} \end{aligned} \right\} B.$$

Für einen Körper erhält man in rechtwinklichen Coordinaten



$dv = dx dy dz$ , also

$$x' = \frac{\iiint x dx dy dz}{\iiint dx dy dz}, \quad y' = \frac{\iiint y dx dy dz}{\iiint dx dy dz}, \quad z' = \frac{\iiint z dx dy dz}{\iiint dx dy dz}. \quad C.$$

24. Der Schwerpunkt einer überall gleichartigen geraden Linie liegt offenbar in ihrer Mitte. Um den Schwerpunkt des Umringes eines Polygons zu finden, wenn dieser gleichartig ist, braucht man nur die an jeder Seite wirkenden Kräfte in eine Resultante zu vereinigen, welche in der Mitte der Seite anzubringen und der Länge der Seite proportional ist. Wird z. B. der Schwerpunkt des Umfanges eines Dreiecks ABC gesucht, so nehme man die Mitten a, b, c der Seiten (Fig. 13.), und ziehe das Dreieck abc. Dieses ist offenbar dem Dreieck ABC ähnlich, mithin

$$ab : bc : ca = AB : BC : CA.$$

Die an den Spitzen a, b, c wirkenden parallelen Kräfte verhalten sich wie  $AB : BC : CA$ , also auch wie  $ab : bc : ca$ ; das heißt, wie die Gegenseiten im Dreieck abc. Ist nun d der Schwerpunkt von c und b, so verhält sich

$$dc : db = AC : AB = ac : ab,$$

oder

$$dc : db = ac : ab.$$

Hieraus folgt, - daß die Linie ad, in welcher sich der Schwerpunkt des Umringes ABC befinden muß, den Winkel cab halbiert. Zieht man ferner aus b die Gerade be, welche wieder den Winkel cba halbiert; so muß der Schwerpunkt auch in dieser Linie liegen; derselbe ist folglich der Durchschnitt f beider Geraden, und mithin der Mittelpunkt des dem Dreieck abc eingeschriebenen Kreises.

Der Schwerpunkt eines Kreisbogens AB (Fig. 14.) liegt offenbar in dem durch die Mitte D desselben gehenden Halbmesser. Wird mithin dieser Halbmesser zur Axe der x genommen, so ist die Ordinate des Schwerpunktes Null. Um die Abscisse zu finden, setze man  $x = a \cos \varphi$ ,  $y = a \sin \varphi$ ; für den

Endpunkt A sei  $\varphi = \angle ACD = \alpha$ , also  $CE = a \cos \alpha$ ,  
 $AE = a \sin \alpha$ . Die Abscisse des Schwerpunktes ist, weil Bogen  
 $AB = 2a\alpha$ ,

$$u = \frac{\int x \, ds}{2a\alpha}$$

und zugleich  $ds = a \, d\varphi$ ,  $x = a \cos \varphi$ ; also  $\int x \, ds = a^2 \int \cos \varphi \, d\varphi$ ,  
welches Integral von  $\varphi = -\alpha$  bis  $\varphi = \alpha$  genommen, den  
Werth  $2a^2 \sin \alpha$  erhält. Folglich ist

$$u = \frac{2a^2 \sin \alpha}{2a\alpha} = \frac{a \sin \alpha}{\alpha}$$

oder

$$u : a = \sin \alpha : \alpha,$$

wodurch die Lage des Schwerpunktes bestimmt ist.

Für die Parabel ist (nach §. 105. I.)

$$ds = dx \sqrt{\frac{p+2x}{2x}};$$

also die Coordinaten des Schwerpunktes eines parabolischen Bogens

$$su = \int x \, dx \sqrt{\frac{p+2x}{2x}} = \int \frac{dx \sqrt{px + 2x^2}}{\sqrt{2}},$$

$$sv = \int y \, dx \sqrt{\frac{p+2x}{2x}} = \int \sqrt{2px} \cdot dx \sqrt{\frac{p+2x}{2x}}$$

$$= \int p \, dx \sqrt{p+2x} = \frac{1}{3} \sqrt{p(p+2x)^3} + \text{Const.}$$

Der Ausdruck für den Bogen  $s$  ist im ersten Theile, S. 204.  
§. 4. gegeben; derselbe läßt sich, durch eine leichte Reduction,  
auf folgende Form bringen:

$$s = \frac{1}{2} p \log (\sqrt{p+2x} + \sqrt{2x}) + \sqrt{\frac{1}{2} px + x^2} + \text{Const.},$$

wo  $\text{Const.} = -\frac{1}{2} p \log \sqrt{p}$  ist, wenn der Bogen vom Schei-  
tel anfängt.

Um das Integral  $\int dx \sqrt{\frac{px+2x^2}{2}}$  zu finden, setze man

zur Abkürzung  $\frac{p}{2} = 2a$ , so erhält man

$$\int dx \sqrt{2ax + x^2} = \int dx \sqrt{(x+a)^2 - a^2} = \int dz \sqrt{z^2 - a^2},$$

wo  $z = x + a$ . Nun ist

$$\begin{aligned} \int dz \sqrt{z^2 - a^2} &= z \sqrt{z^2 - a^2} - \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{z^2 - a^2}} \\ &= z \sqrt{z^2 - a^2} - \int dz \sqrt{z^2 - a^2} - a^2 \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - a^2}}; \end{aligned}$$

mithin

$$\begin{aligned} 2 \int dz \sqrt{z^2 - a^2} &= z \sqrt{z^2 - a^2} - a^2 \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \\ \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - a^2}} &= \log(z + \sqrt{z^2 - a^2}); \quad (\text{I. §. 95.}) \end{aligned}$$

also

$$\int dz \sqrt{z^2 - a^2} = \frac{1}{2} z \sqrt{z^2 - a^2} - \frac{1}{2} a^2 \log(z + \sqrt{z^2 - a^2}) + C,$$

mithin

$$\begin{aligned} su &= \int dx \sqrt{\frac{px + 2x^2}{2}} \\ &= \frac{1}{2} (x + \frac{1}{4}p) \sqrt{x^2 + \frac{1}{2}px} - \frac{p}{32} \log(x + \frac{1}{4}p + \sqrt{x^2 + \frac{1}{2}px}) + C. \end{aligned}$$

Es sei (Fig. 15.) AGE eine Cycloide,  $AB = x$ ,  $BC = y$ ;

$$x = a(\varphi - \sin \varphi), \quad y = a(1 - \cos \varphi).$$

Wird der Anfang der Coordinaten in den Scheitel G verlegt, und demnach  $K = x_1$ ,  $KC = y_1$  gesetzt, so ist offenbar  $x + y_1 = a\pi$ ,  $y + x_1 = 2a$ , mithin

$$x_1 = a(1 + \cos \varphi), \quad y_1 = a(\pi - \varphi + \sin \varphi),$$

oder, wenn man  $\varphi = \pi - \psi$  setzt, und  $x, y$  statt  $x_1, y_1$  schreibt:

$$x = a(1 - \cos \psi), \quad y = a(\psi + \sin \psi).$$

Hieraus ergibt sich  $ds = 2a \cos \frac{1}{2} \psi d\psi$ , also Bogen  $GC = s = 4a \sin \frac{1}{2} \psi$ , oder  $s^2 = 8ax$  (vgl. I. §. 105.). Ferner ist für den Schwerpunkt des Bogens GC, nach der Formel  $su = \int x ds$ , weil  $x = \frac{s^2}{8a}$ ,  $su = \frac{s^3}{24a}$ , also

$$u = \frac{s^2}{24a} = \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}GK.$$

Um die Ordinate  $v$  zu finden, hat man

$$sv = \int y \, ds = ys - \int s \, dy,$$

$$\int s \, dy = 8a^2 \int \sin \frac{1}{2} \psi \cos \frac{1}{2} \psi^2 \, d\psi = \frac{1}{3} a^2 (1 - \cos \frac{1}{2} \psi^3);$$

also  $sv = ys - \frac{1}{3} a^2 (1 - \cos \frac{1}{2} \psi^3).$

Für  $\psi = \pi$  wird  $s = 4a = GA$ ,  $y = a\pi$ ; also  $u = \frac{1}{3}a$ ,  
 $v = (\pi - \frac{4}{3})a.$

25. Um den Schwerpunkt der Fläche des Paralleltrapezes ABCD (Fig. 16.) zu finden, nehme man die Gerade FE, welche die Mitten der parallelen Seiten AB und DC verbindet, zur Axe der  $x$ , und FA zur Axe der  $y$ . Es sei HK parallel AB, so sind FG =  $x$ , GH =  $y$  die Coordinaten von H, und FG =  $x$ , GK =  $-y$  die von K. Man setze noch AF = FB =  $a$ , DE = EC =  $b$ , FE =  $c$ ,  $\angle AFE = \alpha$ , und die Fläche des Trapezes, d. i.  $(a+b)c \sin \alpha = T$ , so ist

$$Tu = \sin \alpha \iint x \, dy \, dx, \quad Tv = \sin \alpha \iint y \, dy \, dx.$$

Man integriere zuerst nach  $y$  zwischen den Grenzen

$$y = \pm \left( \frac{(b-a)x}{c} + a \right);$$

welche durch die Gleichungen der Geraden AD, BC gegeben werden; so ergibt sich sofort  $v = 0$ , d. h. der Schwerpunkt liegt in FE, was auch ohne Rechnung klar ist; ferner kommt:

$$Tu = 2 \sin \alpha \int \left( \frac{(b-a)x}{c} + a \right) x \, dx,$$

und mithin, wenn von  $x = 0$  bis  $x = c$  integrirt wird,

$$Tu = 2 \sin \alpha \left( \frac{1}{3} c^2 (b-a) + \frac{1}{2} ac^2 \right),$$

oder, für T seinen Werth gesetzt:

$$(a+b)u = \frac{1}{3} c(a+2b).$$

Hieraus folgt  $(a+b)(c-u) = \frac{1}{3} c(2a+b)$ ; also, wenn G der

Schwerpunkt, mithin  $FG=u$  ist,

$$FG : GE = a + 2b : 2a + b.$$

Ist  $AB=2a=0$ , so hat man ein Dreieck, und findet  $u=\frac{2}{3}c$ .

Es sei (Fig. 17.) ABD ein elliptisches Segment, dessen Schwerpunkt gesucht wird. Durch die Mitte G der Sehne AD lege man den Durchmesser HB der Ellipse, so ist klar, daß der Schwerpunkt in GB liegen muß; ferner ziehe man einen zweiten Durchmesser KE parallel mit AD; so sind  $CB=a$ ,  $CK=b$  conjugirte Axen, deren Winkel  $KCB=\gamma$  sei. Diese zu Axen der  $x$  und  $y$  genommen, bedingen folgende Gleichung für die Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Nun ist Segment  $ABD = 2 \sin \gamma \int y dx = S$ , und

$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ ; die Grenzen der Integration sind  $x = CB = a$ ,  $x = CG = x'$ . Hieraus ergibt sich

$$S = 2b \sin \gamma \int_{x'}^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot dx,$$

d. i.

$$S = ab \sin \gamma \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{x'}{a} \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2}} - \arcsin \frac{x'}{a} \right],$$

oder wenn man  $\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x'}{a} = \mu$ , mithin  $\cos \mu = \frac{x'}{a}$  setzt,

$$S = ab \sin \gamma (\mu - \frac{1}{2} \sin 2\mu).$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} Su &= 2 \sin \gamma \int y x dx = 2b \sin \gamma \int_{x'}^a x \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot dx \\ &= \frac{2}{3} a^2 b \sin \gamma \cdot \sin \mu^3, \end{aligned}$$

daher

$$u = \frac{\frac{2}{3} a \sin \mu^3}{\mu - \frac{1}{2} \sin 2\mu}.$$

Für die halbe Ellipse KEB wird  $x=0$ ;  $\mu=\frac{\pi}{2}$ , und  
 $u=\frac{4}{3}\cdot\frac{a}{\pi}$ .

Um den Schwerpunkt einer cycloidischen Fläche zu finden, seien wieder  $x$  und  $y$  Coordinaten aus dem Scheitel  $G$ , wie in §. 24. und demnach (Fig. 15.)

$$GK=x=a(1-\cos\psi), \quad KC=y=a(\psi+\sin\psi).$$

Alsdann erhält man für die Fläche  $GKC=S$ ,

$$S=\int y \, dx = yx - \int x \, dy = xy - a^2 \int \sin\psi^2 \cdot d\psi,$$

also 
$$S=xy - \frac{1}{2}a^2(\psi - \frac{1}{2}\sin 2\psi),$$

wo das Integral so genommen ist, daß es für  $\psi=0$  verschwindet, wie die folgenden ebenfalls. Ferner ist:

$$\begin{aligned} S \cdot u &= \int xy \, dx = \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}\int x^2 \, dy \\ &= \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}a^2 \int (1-\cos\psi) \sin\psi^2 \cdot d\psi, \end{aligned}$$

oder 
$$S \cdot u = \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}a^3 \left[ \frac{1}{2}\psi - \frac{1}{4}\sin 2\psi - \frac{1}{8}\sin\psi^3 \right].$$

$$S \cdot v = \iint y \, dx \, dy = \frac{1}{2}\int y^2 \, dx = \frac{1}{2}y^2x - \int yx \, dy.$$

Man hat 
$$\int yx \, dx = a^2 \int (\psi + \sin\psi) \sin\psi^2 \, d\psi,$$

und findet durch theilweise Integration, für die Grenzen 0 und  $\psi$ ,

$$\int \psi \sin\psi^2 \cdot d\psi = \frac{1}{4}\psi^2 - \frac{1}{2}\sin\psi(\psi \cos\psi - \frac{1}{2}\sin\psi)$$

und 
$$\int \sin\psi^3 \, d\psi = 1 - \cos\psi - \frac{1}{3}(1 - \cos\psi^3);$$

woraus sich ergiebt, wenn man statt der Potenzen von  $\sin\psi$  und  $\cos\psi$  die Sinus und Cosinus der Vielfachen von  $\psi$  einführt,

$$\int yx \, dx =$$

$$a^3 \left[ \frac{1}{4}\psi(\psi - \sin 2\psi) + \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\cos\psi - \frac{\pi}{8}\cos 2\psi + \frac{1}{12}\cos 3\psi \right],$$

welcher Werth oben in den Ausdruck für  $S \cdot v$  zu setzen ist.

Für die halbe Cycloide wird  $\psi=\pi$ ,  $x=2a$ ,  $y=a\pi$ ;  
 $S=\frac{3}{2}a^2\pi$ ;

$$S \cdot u = \frac{7}{4}a^3\pi, \quad S \cdot v = \left(\frac{3}{4}\pi^2 - \frac{4}{3}\right)a^3;$$

also 
$$u = \frac{7}{8}a, \quad v = \left(1 - \frac{16}{9\pi^2}\right)\frac{a\pi}{2}.$$

26. Für eine Umdrehungsfläche, deren Axe  $z$  ist, hat man, nach I. §. 108. (S. 212.) als Ausdruck eines Flächenelementes:

$$r dr d\varphi \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2},$$

oder wenn man das Bogenelement der erzeugenden Curve, d. i.

$$dr \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2} = ds \text{ setzt:}$$

$$r d\varphi ds.$$

Bezeichnet man einen Theil der Fläche mit  $S$ , und sind  $u, v, w$  die Coordinaten seines Schwerpunktes, so ist:

$$S = \iint r d\varphi ds.$$

$$S \cdot u = \iint r^2 \cos \varphi ds d\varphi \quad (\text{weil } x = r \cos \varphi)$$

$$S \cdot v = \iint r^2 \sin \varphi ds d\varphi \quad (\text{weil } y = r \sin \varphi)$$

$$S \cdot w = \iint rz ds d\varphi.$$

Es sei das Flächenstück begrenzt von zwei auf der Axe  $z$  senkrechten, und zwei durch die Axe  $z$  gelegten Ebenen, für welche  $\varphi = 0$  und  $\varphi = \varphi'$  sei; so sind die Grenzen nach  $s$  und  $\varphi$  unabhängig von einander. Integriert man von  $\varphi = 0$  bis  $\varphi = \varphi'$ , so kommt:

$$S = \varphi' \int r ds$$

$$S \cdot u = \sin \varphi' \int r^2 ds, \quad S \cdot v = (1 - \cos \varphi') \int r^2 ds, \quad S \cdot w = \varphi' \int rz ds.$$

Für einen vollständigen Ring um die Axe  $z$  wird  $\varphi' = 2\pi$ , mithin

$$S = 2\pi \int r ds, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad S \cdot w = 2\pi \int rz ds.$$

Dieser Ausdruck ergibt sich auch leicht, wenn man bemerkt, daß  $2\pi r ds$  ein unendlich schmales ringsförmiges Flächenelement bedeutet, dessen Moment in Bezug auf den Anfang der Coordinaten offenbar  $= 2\pi r ds \cdot z$  ist. Dividirt man nun die Summe aller Momente, d. i.  $\int 2\pi rz ds$  durch die Summe aller Flächenelemente  $\int 2\pi r ds$ , so erhält man den Abstand  $w$  des Schwerpunktes vom Anfange der Coordinaten, nämlich

$$w = \frac{\int r z ds}{\int r ds},$$

übereinstimmend mit dem Vorhergehenden.

Es sei z. B. die Fläche eine Kugel,  $z^2 + r^2 = a^2$ ; man setze  $z = a \sin \varphi$ ,  $r = a \cos \varphi$ , so wird  $ds = a d\varphi$ , mit  $\int r ds = a^2 \sin \varphi$ ,  $\int r z ds = \frac{1}{2} a^3 \sin \varphi^2$ , wenn die Integrale von  $\varphi = 0$  anfangen; also

$$w = \frac{1}{2} a \sin \varphi = \frac{1}{2} z.$$

Man sucht den Schwerpunkt einer Fläche, welche durch Drehung des Bogens GC einer Cycloide (Fig. 15.) um die Ase GK entsteht. In §. 24, war  $GK = x$ ,  $KC = y$ ; hier werde  $GK = z$ ,  $KC = r$  gesetzt, so ist:

$$z = a(1 - \cos \psi), \quad r = a(\psi + \sin \psi),$$

$$ds = 2a \cos \frac{1}{2} \psi \cdot d\psi, \quad s = 4a \sin \frac{1}{2} \psi, \quad s^2 = 8az.$$

Es ergibt sich, wenn  $\cos \frac{1}{2} \psi = q$  gesetzt wird:

$$\int r ds = rs - \int s dr = rs - \frac{1}{3} a^2 (1 - q^3),$$

welcher Werth für  $\psi = 0$  verschwindet.

$$\int r^2 ds = r^2 s - 2 \int r s dr = r^2 s - 2r \int s dr + 2 \int s dr^2.$$

Nun ist  $\int s dr = -\frac{1}{3} a^2 q^3$ , mithin  $\int s dr^2 = -\frac{8}{3} a^2 \int q^3 d\psi$ , wo  $q = \cos \frac{1}{2} \psi$ .

Hieraus findet man leicht, nach  $\sin \frac{1}{2} \psi = t$  setzend,

$$\int s dr^2 = -\frac{64}{3} a^2 (t - \frac{2}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5),$$

welcher Werth für  $\psi = 0$  verschwindet.

Demnach ist, für die Grenzen 0 und  $\psi$ ,

$$\int r^2 ds = r^2 s + \frac{32}{3} a^2 r q^3 - \frac{128}{3} a^2 t (1 - \frac{2}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5).$$

Endlich findet sich

$$\int r z ds = \frac{1}{8a} \int r s^2 ds = \frac{1}{24a} (rs^3 - \int s^3 dr),$$

und

$$\int s^3 dr = 64a^4 \int t^3 (1 + \cos \psi) d\psi = -256a^4 (\frac{1}{3} q^3 - \frac{1}{5} q^5),$$



wo der Kürze wegen  $t = \sin \frac{1}{2}\psi$ ,  $q = \cos \frac{1}{2}\psi$  sind, wie vorhin. Hieraus erhält man, wieder zwischen den Grenzen 0 und  $\psi$ :

$$\int rz ds = \frac{1}{24a} \left[ rs^3 + 256a^4 q^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{8} q^2 \right) - \frac{512}{15} a^4 \right].$$

Für  $\psi = \pi$  ergibt sich aus diesen Formeln, da  $q = 0$ ,  $t = 1$ ,  $r = a\pi$ ,  $s = 4a$  wird:

$$\int r ds = 4a^2 \pi - \frac{16}{3} a^2, \quad \int r^2 ds = 4a^2 \pi^2 - \frac{1024}{45} a^2,$$

$$\int rz ds = \frac{8}{3} a^2 \pi - \frac{64}{45} a^2,$$

folglich erhält man zur Bestimmung des Schwerpunktes derjenigen Fläche, welche entsteht, wenn die halbe Cycloide GA (Fig. 15.) um die Axe GD eine Drehung  $= \varphi'$  macht:

$$u = \frac{\pi^2 - \frac{256}{45}}{\pi - \frac{4}{3}} \cdot \frac{\sin \varphi'}{\varphi'} a, \quad v = \frac{\pi^2 - \frac{256}{45}}{\pi - \frac{4}{3}} \cdot \frac{1 - \cos \varphi'}{\varphi'} \cdot a$$

$$w = \frac{\pi - \frac{8}{15}}{\pi - \frac{4}{3}} \cdot \frac{2}{3} a.$$

(In Figur 15. ist G der Anfang der u, v, w, und u fällt in die Tangente in G, w in GD).

Wird die Cycloide um die Tangente im Scheitel G, als Axe, gedreht, so muß man setzen, da die Drehungsaxe immer die der z sein soll:

$$z = a(\psi + \sin \psi), \quad r = a(1 - \cos \psi), \quad s^2 = 8ar,$$

wodurch erhalten wird:

$$\int r ds = \frac{s^2}{24a} = \frac{1}{3} sr, \quad \int r^2 ds = \frac{1}{8} r^2 s, \quad \text{und} \quad \int rz ds = \int rz \sqrt{dr^2 + dz^2}$$

genau wie oben, weil durch Vertauschung von r mit z diese Formel nicht geändert wird. In der obigen Formel für  $\int rz ds$  muß

aber natürlich  $r = a(\psi + \sin \psi)$ , d. h. gleich dem gegenwärtigen  $z$ , gesetzt werden, um denselben Werth zu erhalten, wie vorhin. Man erhält daher für den Drehungswinkel  $\varphi'$ :

$$u = \frac{2}{3}r \cdot \frac{\sin \varphi'}{\varphi'}, \quad v = \frac{2}{3}r \cdot \frac{1 - \cos \varphi'}{\varphi'}, \quad w = \frac{3}{rs} \int rz \, ds.$$

Also ergibt sich z. B. für den Schwerpunkt der Fläche, die durch eine volle Umdrehung der halben Cycloide GA um die Tangente im Scheitel (in welche  $w$  fällt) entsteht, indem  $\varphi' = 2\pi$ ,  $\psi = \pi$  ist,

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = \left(\pi - \frac{8}{15}\right)a.$$

27. Um dem Leser noch ein geeignetes Beispiel zur Übung in der Integral-Rechnung darzubieten, werde der Schwerpunkt der Fläche des rechtwinklichen sphärischen Dreiecks ABC gesucht (Fig. 18.). Es sei B der rechte Winkel, und jede der Katheten AB, BC kleiner als ein Quadrant. Man nehme den durch A gehenden Halbmesser zur Axe der  $x$ , die  $y$  in der Ebene des Kreises AB..; so lassen sich die rechtwinklichen Coordinaten eines Punctes E der Kugel durch die sphärischen Coordinaten  $AE = \varphi$ ,  $BE = \psi$  ( $\angle ABE = R$ ), wie bekannt, folgendermaßen ausdrücken:

$$x = \cos \psi \cos \varphi, \quad y = \cos \psi \sin \varphi, \quad z = \sin \psi,$$

wobei der Halbmesser  $= 1$  gesetzt ist. Hieraus ergibt sich das Element der Kugeloberfläche  $= \cos \psi \, d\varphi \, d\psi$  (I. C. 214.), und mithin, wenn die Fläche des Dreiecks mit  $\Delta$  bezeichnet wird, und  $u, v, w$  die den Axen  $x, y, z$  parallelen Coordinaten ihres Schwerpunktes sind:

$$\Delta = \iint \cos \psi \, d\varphi \, d\psi.$$

$$\Delta \cdot u = \iint \cos \psi^2 \cos \varphi \, d\varphi \, d\psi, \quad \Delta \cdot v = \iint \cos \psi^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\psi,$$

$$\Delta \cdot w = \iint \cos \psi \sin \psi \, d\varphi \, d\psi.$$

Der Werth von  $\Delta$  könnte zwar als bekannt angesehen werden;

es wird aber nicht überflüssig sein, zu zeigen, wie er sich aus obigem Integral ergibt. Man setze  $\angle CAB = \alpha$ ,  $\angle ACB = \gamma$ ,  $AB = \varphi$ ,  $AB = \psi$ , so ist, nach bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie:

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \varphi, \quad \cos \gamma = \cos \varphi \sin \alpha.$$

Für jeden Punkt der Hypotenuse AC, z. B. E ist ferner, wegen des rechtwinkligen Dreiecks AFE:

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi, \quad \text{oder} \quad \psi = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \varphi).$$

Um nun  $\Delta$  zu finden, integriere man zuerst von  $\psi = 0$  bis zu dem vorstehenden Werthe von  $\psi$ ; so ergiebt sich die Fläche eines unendlich schmalen Streifens EFfe; wird hierauf wieder von  $\varphi = 0$  bis  $\varphi = AB$  integrirt, so erhält man  $\Delta$ . Demnach ist zuerst:

$$\Delta = \int \sin \psi d\varphi,$$

wo  $\sin \psi = \frac{\operatorname{tg} \alpha \sin \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \varphi}}$  zu setzen ist. Schreibt man noch  $k$  für  $\operatorname{tg} \alpha$ , so kommt:

$$\Delta = \int_0^{\varphi} \frac{k \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{1 + k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Es sei  $z = \cos \varphi$ , so kommt

$$\Delta = - \int_1^z \frac{k dz}{\sqrt{1 + k^2 - k^2 z^2}} = \int_z^1 \frac{\sin \alpha dz}{\sqrt{1 - z^2 \sin^2 \alpha}},$$

$$\text{d. i.} \quad \Delta = \operatorname{arcsin}(\sin \alpha) - \operatorname{arcsin}(z \sin \alpha)$$

$$= \alpha - \operatorname{arcsin}(\cos \varphi \sin \alpha).$$

In diesem Ausdrucke ist aber  $\varphi = \varphi' = AB$ , und weil  $\cos \varphi' \sin \alpha = \cos \gamma$  so kommt

$$\Delta = \alpha - \operatorname{arcsin}(\cos \gamma) = \alpha - \operatorname{arcsin}(\sin(\tfrac{1}{2}\pi - \gamma))$$

$$= \alpha + \gamma - \tfrac{1}{2}\pi; \quad \text{w. z. b. w.}$$

Bei den übrigen Integralen sind die Grenzen die nämlichen, wie bisher. Wird also zuerst wieder nach  $\psi$  von 0 an integrirt, so kommt zunächst:

$$2 \int \cos \psi^2 d\psi = \int (1 + \cos 2\psi) d\psi = \psi + \frac{1}{2} \sin 2\psi$$

$$2 \int \sin \psi \cos \psi d\psi = \sin \psi^2,$$

und mithin:

$$2 \Delta \cdot u = \int (\psi + \sin \psi \cos \psi) \cos \varphi \cdot d\varphi$$

$$2 \Delta \cdot v = \int (\psi + \sin \psi \cos \psi) \sin \varphi \cdot d\varphi$$

$$2 \Delta \cdot w = \int \sin \psi^2 d\varphi.$$

In diesen Formeln ist  $\psi = \arctg(k \sin \varphi)$ ,  $k = \operatorname{tg} \alpha$ ,

$$\sin \psi = \frac{k \sin \varphi}{\sqrt{1 + k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Nun ist

$$\int \psi \cos \varphi d\varphi = \psi \sin \varphi - \int \sin \varphi d\psi$$

$$\int \psi \sin \varphi d\varphi = -\psi \cos \varphi + \int \cos \varphi d\psi.$$

$$d\psi = \frac{k \cos \varphi d\varphi}{1 + k^2 \sin^2 \varphi}.$$

Demnach

$$\int \sin \varphi d\psi = \int \frac{k \sin \varphi \cos \varphi d\varphi}{1 + k^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{2k} \log(1 + k^2 \sin^2 \varphi),$$

oder weil

$$1 + k^2 \sin^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \psi}; \quad \int \sin \varphi d\psi = -\frac{1}{k} \log \cos \psi,$$

welches Integral für  $\varphi = 0$  verschwindet. Ferner ist

$$\begin{aligned} \int \cos \varphi d\psi &= \int \frac{k \cos \varphi^2 d\varphi}{1 + k^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{k} \int \frac{k^2 - k^2 \sin^2 \varphi}{1 + k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \\ &= \frac{k^2 + 1}{k} \int \frac{d\varphi}{1 + k^2 \sin^2 \varphi} - \frac{\varphi}{k}. \end{aligned}$$

Um das Integral  $\int \frac{d\varphi}{1 + k^2 \sin^2 \varphi}$  zu finden, setze man

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}, \quad \text{so kommt}$$

$$\int \frac{d\varphi}{1 + k^2 \sin^2 \varphi} = \int \frac{2 d\varphi}{2 + k^2 - k^2 \cos 2\varphi},$$

oder wenn zur Abkürzung  $2 + k^2 = ak^2$  gesetzt wird,

$$k^2 \int \frac{d\varphi}{1+k^2 \sin^2 \varphi} = \int \frac{2d\varphi}{a - \cos 2\varphi}.$$

Es sei  $\cos 2\varphi = -q$ , so ist  $\sin 2\varphi = +\sqrt{1-q^2}$ , nämlich positive, weil, nach der Annahme,  $\varphi$  zwischen 0 und  $\frac{1}{2}\pi$ , also  $2\varphi$  zwischen 0 und  $\pi$  liegt.

Demnach wird  $\sin 2\varphi \cdot 2d\varphi = dq$ , mithin  $2d\varphi = \frac{dq}{\sqrt{1-q^2}}$  und

$$\int \frac{2d\varphi}{a - \cos 2\varphi} = \int \frac{dq}{(a+q)\sqrt{1-q^2}}.$$

Nun setze man in der Formel C. (I. S. 182.),  $x=q$ ,  $h=1$ , und bemerke zugleich, daß  $a = \frac{k^2+2}{k^2} > 1$ , so kommt

$$\int \frac{dq}{(a+q)\sqrt{1-q^2}} = \frac{Q}{\sqrt{a^2-1}} + \text{Const.},$$

in welcher Formel ist:

$$\sin Q = \frac{1+aq}{a+q}, \quad \cos Q = \frac{\sqrt{a^2-1} \cdot \sqrt{1+q^2}}{a+q}$$

(vgl. I. S. 182, wo  $y=Q$ ).

Da  $a+q$  positiv ist, so ist auch  $\cos Q$  positiv; daher ohne Zweideutigkeit der Werth von  $Q = \arcsin \frac{1+aq}{a+q}$  zwischen  $-\frac{1}{2}\pi$  und  $+\frac{1}{2}\pi$  zu nehmen. Schreibt man wieder  $-\cos 2\varphi$  für  $q$ ,

$$\text{so kommt } \int \frac{2d\varphi}{a - \cos 2\varphi} = \frac{Q}{\sqrt{a^2-1}} + \text{Const.}$$

wo  $Q = \arcsin \frac{1-a \cos 2\varphi}{a - \cos 2\varphi}$ , zwischen  $-\frac{1}{2}\pi$  und  $+\frac{1}{2}\pi$ .

Für  $\varphi=0$  wird  $Q = \arcsin(-1) = -\frac{1}{2}\pi$ , demnach

$$\int_0^\varphi \frac{2d\varphi}{a - \cos 2\varphi} = \frac{Q + \frac{1}{2}\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Nun ist  $\sin Q$

$$= \frac{1-a \cos 2\varphi}{a - \cos 2\varphi} = \frac{k^2 - (2+k^2) \cos 2\varphi}{2+k^2 - k^2 \cos 2\varphi} = \frac{(2+k^2) \sin^2 \varphi - 1}{1+k^2 \sin^2 \varphi},$$

oder wenn man bemerkt, daß  $k \sin \varphi = \operatorname{tg} \psi$ ,

$$\sin Q = \frac{2 \sin \varphi^2 + \operatorname{tg} \psi^2 - 1}{1 + \operatorname{tg} \psi^2} = 1 - 2 \cos \varphi^2 \cos \psi^2.$$

Unter  $\varphi$  und  $\psi$  sind hier die Grenzwerte AB, BC zu verstehen. Setzt man die Hypotenuse  $AC = H$  (Fig. 18.), so ist  $\cos \varphi \cos \psi = \cos H$ , und folglich

$$\sin Q = 1 - 2 \cos H^2$$

oder

$$\cos \left( \frac{1}{2}\pi + Q \right) = \cos 2H.$$

Da  $\varphi$  und  $\psi$  kleiner sind als  $\frac{1}{2}\pi$ , so ist auch  $H < \frac{1}{2}\pi$ , also  $2H < \pi$ , und weil  $Q$  zwischen  $-\frac{1}{2}\pi$  und  $+\frac{1}{2}\pi$ , auch  $\frac{1}{2}\pi + Q < \pi$ . Daher folgt aus der vorstehenden Gleichung, daß nothwendig

$$\frac{1}{2}\pi + Q = 2H$$

ist, und mithin:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2d\varphi}{a - \cos 2\varphi} = \frac{2H}{\sqrt{a^2 - 1}};$$

folglich auch

$$\int \frac{d\varphi}{1 + k^2 \sin \varphi^2} = \frac{2H}{k^2 \sqrt{a^2 - 1}} = H \cos \alpha.$$

Es ist nämlich  $a = \frac{2 + k^2}{k^2}$ ,  $k = \operatorname{tg} \alpha$ ; hieraus folgt

$k^2 \sqrt{a^2 - 1} = \frac{2}{\cos \alpha}$ . Der oben angegebene Werth von  $\int \cos \varphi d\psi$  wird demnach, weil noch

$$\frac{k^2 + 1}{k} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}, \quad \frac{1}{k} = \cotg \alpha,$$

$$\int \cos \varphi d\psi = \frac{H}{\sin \alpha} - \varphi \cotg \alpha.$$

Endlich findet man:

$$\int \sin \psi \cos \psi \cos \varphi d\varphi = \int \frac{k \sin \varphi \cos \varphi d\varphi}{1 + k^2 \sin \varphi^2} = \int \sin \varphi d\psi \text{ (s. oben)}$$

$$\int \sin \psi \cos \psi \sin \varphi d\varphi = \int \frac{k \sin \varphi d\varphi}{1 + k^2 \sin^2 \varphi} \\ = \varphi \cotg \alpha - H \cos \alpha \cdot \cotg \alpha.$$

$$\int \sin \psi^2 d\varphi = \int \frac{k^2 \sin \psi^2 d\varphi}{1 + k^2 \sin^2 \varphi} = \varphi - H \cos \alpha.$$

Mit Hülfe dieser Werthe ergeben sich nun die Coordinaten des Schwerpunktes wie folgt:

$$2\Delta \cdot u = \psi \sin \varphi - \int \sin \varphi d\psi + \int \sin \varphi d\psi = \psi \sin \varphi.$$

$$2\Delta \cdot v = -\psi \cos \varphi + \frac{H}{\sin \alpha} - \varphi \cotg \alpha + (\varphi - H \cos \alpha) \cotg \alpha$$

oder  $2\Delta \cdot v = H \sin \alpha - \psi \cos \varphi$

$$2\Delta \cdot w = \varphi - H \cos \alpha;$$

also ist:  $2\Delta = 2\alpha + 2\gamma - \pi,$

$$u = \frac{\psi \sin \varphi}{2\Delta}, \quad v = \frac{H \sin \alpha - \psi \cos \varphi}{2\Delta}, \quad w = \frac{\varphi - H \cos \alpha}{2\Delta}.$$

In diesen Formeln ist (Fig. 18.)  $AB = \varphi$ ,  $BC = \psi$ ,  $AC = H$ ,  $\angle CAB = \alpha$ ,  $\angle ACB = \gamma$ .

Es sei  $u' = u \cos \varphi + v \sin \varphi,$

$$v' = u \sin \varphi - v \cos \varphi,$$

so kommt:  $2\Delta u' = H \sin \alpha \sin \varphi,$

$$2\Delta v' = \psi - H \sin \alpha \cos \varphi.$$

Denkt man sich aus der Spitze B des rechten Winkels ein sphärisches Loth (p) auf die Hypotenuse gefällt, so ist

$$\sin p = \sin \alpha \sin \varphi.$$

Ferner ist bekanntlich  $\sin \alpha \cos \varphi = \cos \gamma$ ; mithin endlich:

$$u' = \frac{H \sin p}{2\Delta}, \quad v' = \frac{\psi - H \cos \gamma}{2\Delta}, \quad w = \frac{\varphi - H \cos \alpha}{2\Delta}.$$

Hier ist der durch die Spitze des rechten Winkels (B) gehende Halbmesser die Aye der  $u'$ .

28. Um ein Beispiel von dem Schwerpunkte eines körperlichen Raumes zu geben, denke man sich ein Ellipsoid, dessen Hauptachsen  $a, b, c$  seien. Nimmt man die Richtungen derselben zu Coordinaten-Axen, so kann gesagt werden:

$$x = a \cos \psi \cos \varphi, \quad y = b \cos \psi \sin \varphi, \quad z = c \sin \psi.$$

Wird nun z. B. der Schwerpunkt des halben Ellipsoids, über der Ebene  $xy$ , verlangt, so ist klar, daß derselbe in der Axe  $c$  liegt. Legt man in dem Abstand  $z$  vom Mittelpunkte eine Ebene senkrecht auf die Axe  $c$ , so ist die Fläche des elliptischen Schnittes  $= ab\pi \cos^2 \psi$ , weil  $a \cos \psi, b \cos \psi$  die Axen desselben sind. Dieser Ausdruck mit  $dz$  multipliciert, giebt das Volumen  $dV$  einer Schicht von der Höhe  $dz$ , deren Moment in Bezug auf den Anfang der Coordinaten  $= zdV$  ist; daher ist

$$w/dV = z/dV.$$

Nun ist aber

$$\int dV = ab\pi \int \cos^2 \psi^2 dz = abc\pi \int \cos^2 \psi^2 d \sin \psi,$$

weil  $z = c \sin \psi$ , und

$$\int_0^{\psi} \cos^2 \psi^2 d(\sin \psi) = \sin \psi - \frac{1}{3} \sin^3 \psi,$$

also 
$$V = abc\pi \sin \psi (1 - \frac{1}{3} \sin^2 \psi).$$

Ferner

$$\int z dV = ab\pi \int z \cos^2 \psi^2 dz = abc^2\pi \int \cos^2 \psi^2 \sin \psi d \sin \psi$$

$$= \frac{abc^2\pi}{2} (\sin^3 \psi - \frac{1}{5} \sin^5 \psi);$$

folglich

$$w = \frac{1}{3} c \sin \psi \left( \frac{1 - \frac{1}{3} \sin^2 \psi^2}{1 - \frac{1}{3} \sin^2 \psi^2} \right)$$

oder auch

$$w = \frac{1}{3} z \left( \frac{c^2 - \frac{1}{3} z^2}{c^2 - \frac{1}{3} z^2} \right).$$

Dieser Ausdruck gilt für einen Abschnitt des Ellipsoids zwischen parallelen Grundflächen, von denen eine die Ebene der  $xy$  und die zweite von dieser um den Abstand  $= z$  entfernt ist. Für das halbe Ellipsoid wird  $z = c$ , also  $w = \frac{2}{3} c$ .



Im Allgemeinen erhält man für den Schwerpunkt eines Volumens  $V$ , wenn  $d^3V$  ein nach allen Dimensionen unendlich kleines Element desselben ist:

$$V \cdot u = \int x d^3V, \quad V \cdot v = \int y d^3V, \quad V \cdot w = \int z d^3V,$$

wo das Integralzeichen eine dreifache Integration bedeutet.

Aus §. 112. (I.) ergeben sich verschiedene Ausdrücke für  $d^3V$ , je nachdem die Coordinaten der Grenzfläche angenommen sind; namentlich:

in rechtwinkligen Coordinaten:  $d^3V = dx dy dz$ .

Sind die Coordinaten der Grenzfläche als Functionen von  $p$  und  $q$  gegeben (vgl. I., §. 112.), so ist:

$$\sqrt{EG - F^2} \cdot \cos i \cdot dp dq = \left( \frac{dy}{dp} \cdot \frac{dx}{dq} - \frac{dy}{dq} \cdot \frac{dx}{dp} \right) dp dq$$

die Projection des Flächenelementes auf die Ebene  $xy$ . Multipliziert man dieselbe mit  $dz$ , so erhält man das Volumen ( $d^3V$ ) eines unendlich kleinen Parallelepipedums von der Höhe  $dz$ ;

$$\text{nämlich: } d^3V = \left( \frac{dy}{dp} \cdot \frac{dx}{dq} - \frac{dy}{dq} \cdot \frac{dx}{dp} \right) dp dq dz.$$

So ist z. B. für ein Ellipsoid (I. §. 113.)

$$d^3V = ab \sin \psi \cos \psi d\psi d\varphi dz;$$

$$\text{demnach } V \cdot u = ab \iiint x \sin \psi \cos \psi d\psi d\varphi dz.$$

$$V \cdot v = ab \iiint y \sin \psi \cos \psi d\psi d\varphi dz. \quad A.$$

$$V \cdot w = ab \iiint z \sin \psi \cos \psi d\psi d\varphi dz.$$

Integrirt man z. B. zuerst nach  $\varphi$ , von 0 bis  $2\pi$ , so kommt, weil

$$x = a \cos \psi \cos \varphi, \quad y = b \cos \psi \sin \varphi,$$

$u = 0, v = 0$ , wie leicht zu sehen; ferner

$$V \cdot w = 2ab\pi \iint z \cos \psi \sin \psi d\psi dz.$$

Integrirt man ferner diesen Ausdruck von  $\psi = 0$  bis  $\psi = \frac{1}{2}\pi$ ,

$$\text{so kommt } V \cdot w = ab\pi \int z \cos \psi^2 dz,$$

welcher Ausdruck das Moment einer auf der Axe  $z$  senkrechten Scheibe von der Höhe  $dz$  und der Grundfläche  $ab \cos \psi^2 \cdot \pi$

darstellt, wie vorher; daher er auch nicht weiter entwickelt zu werden braucht.

Integrirt man die obigen Ausdrücke A. zuerst nach  $z$ , von 0 bis  $z$ , so kommt, indem man noch für  $x$  und  $y$ , so wie nach der Integration für  $z$ , ihre Werthe in  $\varphi$  und  $\psi$  einführt:

$$V \cdot u = a^2 b c \iint \cos \psi^2 \sin \psi^2 \cos \varphi \cdot d\varphi d\psi$$

$$V \cdot v = a b^2 c \iint \cos \psi^2 \sin \psi^2 \sin \varphi \cdot d\varphi d\psi$$

$$V \cdot w = \frac{1}{2} a b c^2 \iint \cos \psi \sin \psi^3 d\varphi d\psi.$$

Wird weiter zwischen den nämlichen von einander unabhängigen Grenzen integrirt, wie in I. §. 113., nämlich nach  $\varphi$  von 0 bis  $\varphi$ , und nach  $\psi$  von 0 bis  $\psi$ , so kommt zuerst:

$$V \cdot u = a^2 b c \sin \varphi \int \cos \psi^2 \sin \psi^2 d\psi.$$

$$V \cdot v = a b^2 c (1 - \cos \varphi) \int \cos \psi^2 \sin \psi^2 d\psi$$

$$V \cdot w = \frac{1}{2} a b c^2 \varphi \int \cos \psi \sin \psi^3 d\psi,$$

und sodann:

$$V \cdot u = \frac{1}{8} a^2 b c \sin \varphi (\psi - 2 \sin 4\psi)$$

$$V \cdot v = \frac{1}{8} a b^2 c (1 - \cos \varphi) (\psi - 2 \sin 4\psi)$$

$$V \cdot w = \frac{1}{8} a b c^2 \varphi \sin \psi^4.$$

Zugleich ist  $V = \frac{1}{8} a b c \cdot \varphi \cdot \sin \psi^3.$

Hierbei ist der schon genannte §. 113. im ersten Theile zu vergleichen. Die vorstehenden Ausdrücke geben den Schwerpunct des daselbst berechneten Volumens  $V$ , über der Grundfläche LMKD (Fig. 27. I.).

Man bemerke noch folgende Ausdrücke für das Körperelement, nämlich

$$d^3 V = r dr d\varphi dz$$

für Polarcoordinaten in der Ebene  $xy$  (§. 112. c.), und

$$d^3 V = r^2 \cos \psi dr d\varphi d\psi$$

für Polarcoordinaten im Raume (§. 112. e.).

Der erste dieser Ausdrücke ist besonders bequem bei Umdrehungs-Körpern anzuwenden. Will man nämlich den Schwerpunct eines Volumens finden, welches von zwei durch die Axe  $z$

gelegten und zwei auf ihr senkrechten Ebenen begrenzt wird, so integriere man zuerst von  $\varphi=0$  bis  $\varphi=\varphi'$ , wo  $\varphi'$  die gegenseitige Neigung der durch  $z$  gehenden Ebenen ist; ferner von  $r=0$  bis  $r=r$ ; alsdann kommt:

$$V = \frac{1}{2} \varphi' / r^2 dz$$

$$V \cdot u = \frac{1}{2} \sin \varphi' / r^2 dz, \quad V \cdot v = \frac{1}{2} (1 - \cos \varphi') / r^2 dz,$$

$$V \cdot w = \frac{1}{2} \varphi' / r^2 z dz;$$

so daß nur noch einfache Integrationen zu vollziehen sind. Für  $\varphi'=2\pi$ , d. h. für ein Stück des Körpers zwischen zwei auf der Drehungsaxe senkrechten Ebenen, erhält man

$$V = \pi / r^2 dz, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad V \cdot w = \pi / r^2 z dz.$$

Die Anwendung dieser Formeln wird dem Leser ohne weitere Beispiele klar sein.

Es mag nur noch bemerkt werden, daß die hier gegebenen Formeln sich sämtlich auf gleichartige Körper (Flächen, Linien) beschränken, bei welchen die an jedem Punkte wirkende Kraft ( $p$ , §. 23.) überall von gleicher Intensität ist. Im Allgemeinen aber kann  $p$  veränderlich, und wird dann irgend eine Function von  $x, y, z$  sein, die unter dem Integralzeichen noch als Factor hinzutritt, wie aus §. 23. a. zu ersehen ist. Da die Regeln der Integration die nämlichen bleiben, so sind besondere Beispiele dieses Falles nicht erforderlich.

### Erweiterung der Lehre von den Mittelpunkten der Kräfte.

29. Die Frage nach einem Mittelpunkte der Kräfte wurde bisher in der Statik ausschließlich auf den Fall paralleler Kräfte beschränkt. Es ist aber schon in den §§. 11. und 22. gezeigt worden, daß auch beliebige Kräfte in einer Ebene, wofern ihre Mittelkraft nicht Null ist, einen Mittelpunkt haben, der jedoch nur für Drehungen in dieser Ebene gültig bleibt. In den fol-

genden §§. soll diese Untersuchung auf beliebige Kräfte und Drehungen im Raume ausgedehnt werden.

Man denke sich an einem festen Körper, d. h. an einem Systeme fest verbundener Punkte, Kräfte angebracht, die keiner anderen Einschränkung unterworfen sind, als daß ihre Mittelkraft nicht Null sei. Wegen dieser Einschränkung besteht weder zwischen den Kräften Gleichgewicht, noch sind sie einem bloßen Paare gleichgeltend; dagegen lassen sie sich durch eine der Mittelkraft gleiche und parallele Resultante, an einem beliebig gewählten Angriffspunkte, und ein gewisses zugehöriges Paar ersetzen. Der Angriffspunkt der Resultante werde in der Folge immer so gewählt, daß das Moment des zugehörigen Paares das kleinste unter allen möglichen sei; entweder wird mithin dieses Moment Null sein, oder die Ebene des Paares senkrecht auf der Richtung der Resultante stehen.

Nun stelle man sich vor, daß der Körper aus seiner anfänglichen Lage in eine beliebige andere gedreht werde, und lasse wieder dieselben Kräfte wie vorhin, in denselben Richtungen auf dieselben Punkte des Körpers wirken; so ergiebt sich offenbar eine der vorigen gleiche und parallele Resultante, deren Richtungslinie jedoch im Allgemeinen andere Punkte des Körpers treffen wird, als die Richtungslinie der vorigen Resultante traf; so wie auch das Moment des zugehörigen Paares im Allgemeinen dem vorigen nicht mehr gleich sein wird. Wenn man indessen den Körper bloß parallel mit sich selbst verschiebe, so fände offenbar gar keine Aenderung in der gegenseitigen Stellung des Körpers und der Kräfte Statt; mithin würde die Richtungslinie der Resultante den Körper wieder in denselben Punkten treffen, wie vorhin, und das Moment des Paares ebenfalls ungeändert bleiben. Man stelle sich daher, von paralleler Verschiebung absehend, nur noch Drehungen des Körpers um beliebige Axen vor. Es ist aber wiederum einerlei, ob der Körper um eine gegebene, oder um irgend eine andere, jener parallele Axe gedreht wird; denn dreht man ihn, von einer gewissen anfänglichen Stellung

aus, das eine Mal um die erste, das andere Mal, in demselben Sinne, um die zweite Axe, so ist augenscheinlich, daß diejenigen Stellungen, welche in beiden Fällen aus gleich großen Drehungen entstehen, einander parallel sind, d. h. daß der Körper aus der einen in die andere durch bloße parallele Verschiebung gebracht werden kann. Da mithin zwischen parallelen Axen kein in der gegenwärtigen Untersuchung gültiger Unterschied Statt findet, so kann man alle Axen durch irgend einen Punkt des Körpers legen, der einmal für immer gewählt ist und unbeweglich bleibt, so daß nur noch die Drehungen des Körpers um diesen Punkt in Betracht kommen.

Ferner lassen sich die sämtlichen auf den Körper wirkenden Kräfte auf drei zurückführen. Denn man zerlege die Kräfte nach drei beliebigen, der Einfachheit wegen gegen einander senkrechten Richtungen, die jedoch so anzunehmen sind, daß keine Ebene, die zweien von ihnen parallel ist, der Mittelkraft sämtlicher Kräfte parallel sei; so ergeben sich drei Gruppen paralleler Kräfte, von denen keiner die Mittelkraft Null sein kann, und die sich mithin in drei einfache Resultanten an eben so vielen Schwerpunkten vereinigen lassen. Diese drei Schwerpunkte bleiben, der Theorie paralleler Kräfte zufolge, in dem Körper fest, wie auch derselbe gedreht werde; die anfänglichen Kräfte sind mithin auf drei gegen einander senkrechte Kräfte zurückgeführt, die in unveränderlich bestimmten Punkten des Körpers wirken, und von denen in der Folge einzig und allein die Rede zu sein braucht.

Durch den als unbeweglich gedachten Punkt des Körpers (er heiße A) lege man drei auf einander senkrechte, in dem Körper feste, aber mit ihm im Raume bewegliche Axen, und zwar gehe jede Axe von A aus nur nach einer Seite fort, werde aber nicht über A hinaus nach der andern Seite verlängert; so kann man nunmehr den Körper ganz außer Acht lassen, indem alle Stellungen desselben durch diejenigen der Axen ohne Zweideutigkeit bezeichnet werden. Ferner ziehe man aus A drei den Kräften parallele, mithin wieder gegen einander senkrechte, in dem

Sinne der Kräfte fortgehende Gerade, welche die Axen der Kräfte genannt werden sollen; so wird die Stellung des Körpers gegen die Kräfte durch die Stellung seiner Axen gegen die Axen der Kräfte so bestimmt, daß jene aus dieser sofort gefunden werden kann. Denn außer den Richtungen der Axen des Körpers und der Kräfte kommt es nur noch auf die Angriffspuncte der Kräfte an, die aber in dem Körper einmal für immer gegeben sind. Man kann sich also die Anschauung der verschiedenen Stellungen und Drehungen dadurch sehr erleichtern, daß man sich anstatt des Körpers und der Kräfte nur ihre beiderseitigen Axen vorstellt.

Wird der Körper um eine beliebige durch A gelegte Axe  $\alpha$  gedreht, während die Kräfte, wie bisher angenommen wurde, ihre Richtungen behalten, so ändern sich die Neigungen der Kräfte gegen die Axen des Körpers, und man erhält Stellungen, die wesentlich von einander verschieden sind. Man könnte aber auch umgekehrt verfahren, nämlich den Körper fest lassen, dagegen die Kräfte um die Axe  $\alpha$  drehen; und diese Vorstellung wurde schon bei der Bestimmung des Mittelpunctes von Kräften in einer Ebene, in §. 11., zu Grunde gelegt. In der That ist leicht zu sehen, daß Beides einerlei ist. Denn es bezeichne  $x$  eine der Axen des Körpers,  $u$  eine der Axen der Kräfte. Man beschreibe eine Kugel um den Punct A, deren Oberfläche von den Axen  $x$ ,  $u$  und  $\alpha$  in den gleichnamigen Puncten geschnitten wird, und bilde das sphärische Dreieck  $\alpha x u$  (Fig. 19.). \* Dreht man nun zuerst  $u$  um  $\alpha$ , während  $x$  fest bleibt, so entsteht das Dreieck  $\alpha u' x$ , in welchem  $\alpha u = \alpha u'$ . Läßt man dagegen  $u$  fest, und dreht  $x$  um  $\alpha$ , und zwar um gleich viel und in entgegengesetztem Sinne, so entsteht das Dreieck  $\alpha x' u$ , wo  $\alpha x' = \alpha x$  und zugleich  $\angle x \alpha x' = \angle u \alpha u'$  ist. Mithin sind auch die Bogen  $x'u$  und  $xu'$  einander gleich, oder die Neigungen der Axen des Körpers gegen die Kräfte sind in beiden Fällen die nämlichen, w. z. b. w.

Die Stellungen des Körpers und der Kräfte, welche man in beiden Fällen erhält, sind zwar im Raume von einander ver-

schieden; aber dieser Unterschied hat hier kein Gewicht. Denn man kann durch gemeinschaftliche Drehung des Körpers und der Kräfte um die Axe  $\alpha$  das ganze System aus der einen Stellung in die andere bringen; so daß z. B. das Dreieck  $x'au$  in die Lage  $xau'$  kommt. Es ist also in beiden Fällen kein Unterschied in den gegenseitigen Stellungen der Kräfte und des Körpers vorhanden; dieser aber ist allein, worauf es hier ankommt.

In der Folge stelle man sich den Körper als unbeweglich vor, und drehe die Kräfte.

30. Die Angriffspunkte der drei Kräfte, auf welche oben die anfänglich gegebenen Kräfte zurückgeführt worden sind, fallen entweder in einem einzigen Punkte des Körpers zusammen, oder sie liegen in einer Geraden, oder sie bestimmen eine Ebene.

In dem ersten dieser Fälle lassen sich die gegebenen Kräfte in drei Gruppen paralleler Kräfte zerlegen, deren Mittelpunkte in einen zusammenfallen; diese Kräfte haben also eben so gut, wie parallele Kräfte, einen für alle Drehungen gültigen Mittelpunkt.

Im zweiten Falle liegen die drei Angriffspunkte in einer Geraden. Zerlegt man die an ihnen angebrachten Kräfte nach drei beliebigen Richtungen, so ergeben sich drei Gruppen paralleler Kräfte, und aus ihnen drei Resultanten. Wenn von diesen keine Null ist, so erhält man als neue Angriffspunkte drei Mittelpunkte paralleler Kräfte, die aber offenbar alle mit den vorigen Angriffspunkten in einer Geraden liegen. Wenn also die drei Angriffspunkte einmal in einer Geraden liegen, so kann zwar, durch eine andere Zerlegung der Kräfte, ihre Lage in jener verändert werden; aber sie bleiben immer in denselben Geraden, wie man auch die Kräfte zerlegen mag, können auch nie in einen einzigen Punkt zusammenfallen. Diese in dem Körper feste Gerade heiße die Central-Axe. Wären der anfänglich gegebenen Kräfte bloß zwei, die man nachher, der Gleichförmigkeit wegen,

durch Zerlegung nach drei Richtungen und Zusammensetzung der parallelen Componenten auf drei bringen kann; so hat das System (d. h. der Körper mit den Kräften) immer eine Central-Axe; nämlich die gerade Linie zwischen den Angriffspuncten der Kräfte. So ist z. B. in Fig. 3. (§. 11.) die Gerade AB die Central-Axe des dortigen Systemes. Ueberhaupt hat ein System immer eine Central-Axe, wenn alle Kräfte desselben einer Ebene parallel sind (und die Mittelkraft nicht Null ist, wie hier immer vorausgesetzt wird). Denn zerlegt man die Kräfte zunächst nach zwei derselben Ebene parallelen Richtungen, so ergeben sich zwei Gruppen paralleler Kräfte, und aus ihnen zwei Resultanten, mithin wieder der vorige Fall zweier Kräfte.

Sind aber die Kräfte nicht alle einer Ebene parallel, so zerlege man sie nach drei beliebigen Richtungen. Betrachtet man zunächst bloß zwei von den entstehenden drei Gruppen paralleler Kräfte, so haben diese eine Central-Axe. Damit aber dem ganzen Systeme eine solche zukomme, ist erforderlich, daß der Mittelpunct der noch übrigen parallelen Kräfte in die Central-Axe der beiden anderen falle. Ein System hat also nur in besonderen Fällen eine Central-Axe, im Allgemeinen aber findet der

dritte Fall Statt; nämlich die Angriffspuncte der drei Kräfte liegen nicht in einer Geraden, und bestimmen mithin eine Ebene. Wenn man die Kräfte nach drei beliebigen Richtungen zerlegt, und die parallelen wieder zusammensetzt, so ergeben sich drei neue Angriffspuncte, die aber offenbar wieder in derselben Ebene liegen, auch niemals in eine einzige gerade Linie fallen können. Diese von allen Drehungen und Zerlegungen unabhängige, in dem Körper feste Ebene, heiße die Central-Ebene. Das Dreieck, welches die drei Angriffspuncte der Kräfte in der Central-Ebene zu Spitzen hat, kann man das Central-Dreieck nennen; man muß jedoch bemerken, daß dasselbe von der Art der Zerlegung nicht unabhängig ist; denn je nachdem man die Kräfte nach diesen oder nach jenen Richtungen zerlegt, ergiebt sich ein anderes Central-Dreieck, jedoch immer in der Central-Ebene.



Die Bestimmung dieses Dreiecks hat mithin, in gegenwärtiger Untersuchung, keinesweges das nämliche Gewicht, wie die der Central-Ebene. Daher mag auch ein das Central-Dreieck mit angehender Satz, der in der Folge nicht weiter gebraucht wird, hier ohne Beweis nur hingestellt werden, weil er doch der Erwähnung nicht unwerth scheint. Man findet ihn durch eine Rechnung, die hier zu lange aufhalten würde, von dem Verfasser dieses Handbuchs bewiesen in einem Aufsatze in Crelles Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 15. S. 30. Der Satz lautet wie folgt:

Es seien  $D, D', D''$  die Spitzen des aus irgend einer Zerlegung hervorgegangenen Central-Dreiecks, an denen die drei zugehörigen Kräfte angebracht sind. Aus einem gemeinsamen Anfangspunkte ziehe man drei Gerade, welche diese Kräfte nach Richtung und Größe darstellen. Dieselben lassen sich als zusammenstoßende Kanten eines Tetraeders ansehen, das durch sie vollständig bestimmt wird, und dessen Volumen  $= V$  sei. Wird nun noch die Fläche des Dreiecks  $DD'D'' = \Delta$  gesetzt, und das Product  $\Delta \cdot V$  gebildet; so ist der Zahlenwerth desselben immer der nämliche, wie man auch die Kräfte zerlegt haben mag. (Es versteht sich von selbst, daß man die Einheit der Kraft nicht bei der einen Zerlegung durch diese, bei der anderen durch jene Länge darstellen muß.)

Es soll nunmehr der obige dritte (allgemeine) Fall näher untersucht werden.

31. Man drehe die Kräfte so, daß die Mittelkraft senkrecht auf der Central-Ebene zu stehen komme. Es mag hier noch einmal erinnert werden, daß man die Axen der Kräfte um den Punkt A zu drehen hat, während die Axen des Körpers fest bleiben; die Kräfte selbst drehen sich dann mit um ihre festen Angriffspunkte, indem jede ihrer Axen immer parallel, und die sie darstellende Linie vom Angriffspunkte aus immer auf der nämlichen Seite liegend gedacht werden muß, auf welcher die Axe von

**A** aus liegt. Da die Central-Ebene in dem Körper fest ist, so kann man zwei von den Azen des Körpers in der Central-Ebene nehmen; die Mittellkraft soll also in der gegenwärtigen Stellung der dritten Aze parallel sein. Man zerlege nun wieder die drei Kräfte nach drei gegen einander senkrechten Richtungen, von denen die eine der Mittellkraft parallel sei; die beiden anderen sind mithin der Central-Ebene parallel. Es sei  $DD'D''$  das Central-Dreieck (Fig. 20.); ferner sei **C** der Schwerpunkt der drei der Mittellkraft parallelen Componenten, deren Summe offenbar der Mittellkraft gleich und also nicht Null ist. Die Summen der in die beiden anderen Richtungen fallenden Componenten ( $Da, D'a', D''a''$  und  $Db, D'b', D''b''$ ) sind dagegen Null; also

$$Da + D'a' + D''a'' = 0, \quad Db + D'b' + D''b'' = 0.$$

Der Punct **C** heiße der Central-Punct. Derselbe ist in der Central-Ebene fest. Denn in welcher Stellung man sich die anfänglichen drei Kräfte auch denken mag, so erhält man durch Zerlegung derselben nach drei auf einander senkrechten Richtungen, von denen die eine der Mittellkraft parallel ist, immer dieselben der Mittellkraft parallelen Componenten an denselben Angriffspuncten; der Centralpunct ist folglich der Schwerpunkt dreier unveränderlicher paralleler Kräfte an festen Angriffspuncten, also ist er (in dem Körper) fest. Man hat demnach jetzt 7 Kräfte an festen Angriffspuncten, von denen, in gegenwärtiger Stellung, die eine in **C** senkrecht auf der Central-Ebene steht, und der Mittellkraft gleich ist; während die sechs anderen, schon oben genannten, in der Central-Ebene liegen. Nun werde eine der Mittellkraft gleiche und mit  $Da$  parallele Kraft  $Ca$  und zugleich eine dieser gleiche entgegengesetzte ( $Ca'$ ) an **C** angebracht; und man stelle sich vor, daß wenn die Kräfte um ihre Angriffspuncte gedreht werden, die neuen Kräfte  $Ca$  und  $Ca'$  sich ebenfalls, mit  $Da$  beständig parallel bleibend, um **C** drehen. Die vier Kräfte  $Da, Da', Da'', Ca$ , lassen sich in eine der Mittellkraft gleiche und parallele Resultante ( $AA'$ ) an dem Schwerpuncte **A** zusam-

mensetzen, welche mit  $Ca'$  ein Paar bildet. Der Schwerpunkt A ist wieder in dem Körper fest. Auf gleiche Weise bringe man an C eine der Mittellkraft gleiche und mit Db parallele Kraft ( $C\beta$ ) und eine dieser gleiche und entgegengesetzte ( $C\beta'$ ) an, so lassen sich wieder Db, Db', Db'' und  $C\beta$  in eine Kraft BB' an dem festen Schwerpunkt B zusammensetzen, welche mit  $C\beta'$  ein zweites Paar bildet.

Das ganze System ist jetzt auf 5 Kräfte, nämlich eine einzelne Kraft an C und die Kräftepaare ( $AA'$ ,  $Ca'$ ), ( $BB'$ ,  $C\beta'$ ) gebracht. Diese Kräfte sind sämtlich der Mittellkraft gleich; die an C angebrachte steht senkrecht auf den vier anderen, und die Kräfte des einen Paares senkrecht auf denen des anderen. Dieses gilt von jeder zulässigen Stellung der Kräfte; in der gegenwärtig angenommenen liegen die Paare in der Central-Ebene. Man begreift auch leicht, daß die drei Punkte A, B, C nicht in einer Geraden liegen können, wenn, wie angenommen ist, anfänglich D, D', D'' nicht in einer Geraden lagen. Ferner läßt sich allemal bewirken, daß der Winkel ACB ein rechter werde. Man nehme C zum Anfange senkrechter Coordinaten  $x$  und  $y$  in der Central-Ebene; es seien  $a$  und  $b$  die Coordinaten von A,  $a'$  und  $b'$  die von B; die alle vier als bekannt anzusehen sind. Nun zerlege man die vier einander und der Mittellkraft gleichen Kräfte  $AA'$ ,  $Ca'$ ;  $BB'$ ,  $C\beta'$ , deren Intensität der Einheit gleichgesetzt werde, in der Central-Ebene nach zwei gegen einander senkrechten, noch näher zu bestimmenden Richtungen. Es sei  $u$  die Neigung der Kraft  $AA'$ , und  $\frac{1}{2}\pi + u$  die der auf  $AA'$  senkrechten Kraft  $BB'$ , gegen die eine (erste) dieser Richtungen; so ergeben sich folgende Componenten der genannten vier Kräfte:

Componenten von	$AA'$	$Ca'$	$BB'$	$C\beta'$
nach der ersten Richtung	$+\cos u$	$-\cos u$	$-\sin u$	$+\sin u$
nach der zweiten Richtung	$+\sin u$	$-\sin u$	$+\cos u$	$-\cos u$

Man bringe ferner an C zwei der Einheit gleiche und einander entgegengesetzten Kräfte in der ersten Richtung, und zwei

eben solche in der zweiten Richtung an; so kann wieder, wie vorhin, je eine von diesen (sie sei  $+1$ ) mit den ihr parallelen Componenten in eine Resultante  $=+1$  zusammengesetzt werden, die an einem festen Schwerpunkte wirkt. Man erhält demnach anstatt A und B zwei neue feste Schwerpunkte A' und B', deren Coordinaten  $\xi$  und  $\eta$ ,  $\xi'$  und  $\eta'$  durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\xi &= a \cos u - a' \sin u & \eta &= b \cos u - b' \sin u \\ \xi' &= a \sin u + a' \cos u & \eta' &= b \sin u + b' \cos u.\end{aligned}$$

Das Dreieck A'CB' ist aber nothwendig rechtwinklich, wenn

$$\xi^2 + \eta^2 + \xi'^2 + \eta'^2 = (\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2$$

oder  $\xi\xi' + \eta\eta' = 0$  ist. Setzt man in diese Bedingungsgleichung die obigen Werthe, so kommt:

$$(a^2 + b^2 - a'^2 - b'^2) \sin u \cos u + (aa' + bb') \cos 2u = 0$$

oder 
$$\operatorname{tg} 2u = \frac{2(aa' + bb')}{a'^2 + b'^2 - a^2 - b^2}.$$

Diese Gleichung giebt zwei Werthe von  $u$ , die um  $\frac{1}{2}\pi$  von einander verschieden, aber beide gleich passend sind. Der Winkel  $u$  würde unbestimmt bleiben, wenn zugleich Zähler und Nenner des vorstehenden Ausdruckes Null wären; alsdann wäre aber auch, wegen der Gleichung  $aa' + bb' = 0$ , schon ACB ein rechter Winkel, und keine Verwandlung weiter nöthig.

Wird der Werth von  $u$  aus vorstehender Gleichung in die obigen Werthe von  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\xi'$ ,  $\eta'$  gesetzt, so müssen die neuen durch diese Coordinaten bestimmte Schwerpunkte A', B' nothwendig so liegen, daß  $\angle A'CB'$  ein rechter ist, wie verlangt wurde.

Hierdurch ist das System auf seine einfachste Gestalt gebracht, in welcher es bleiben soll. Man hat fünf gleiche Kräfte; eine einzelne am Centralpuncte C, die senkrecht auf den vier übrigen steht, und die Mittelfraft des ganzen Systemes darstellt; ferner zwei Paare an den in der Central-Ebene senkrecht gegen einander liegenden unveränderlichen Armen CA, CB, von deren

Kräften die des einen zu denen des anderen wiederum senkrecht sind. Diese fünf Kräfte können nun, anstatt der anfänglichen drei, ohne Aenderung ihrer gegenseitigen Neigungen um ihre festen Angriffspunkte beliebig gedreht werden. Jede Stellung derselben wird am leichtesten anschaulich werden, wenn man die Arme CA, CB und eine dritte auf ihnen senkrechte Gerade (sie heiße CD), als Axen des Körpers, und die drei Geraden, durch welche die an C wirkenden Kräfte dargestellt werden, als Axen der Kräfte betrachtet; mit diesen Axen ist alles Uebrige gegeben.

32. Man denke sich zunächst die Mittelkraft in C noch, wie vorher, senkrecht auf der Central-Ebene, und drehe um sie, als feste Axe, die übrigen Kräfte, welche mithin in der Central-Ebene bleiben. Unter den verschiedenen Stellungen, die das System auf diese Weise erhält, sind zunächst zwei zu merken, in welchen die Momente der Paare an den Armen CA und CB (oder kürzer der Paare A und B) jedesmal beide zugleich verschwinden, und in denen mithin die sämtlichen Kräfte der einfachen Mittelkraft gleichgelten. In diesen Stellungen fallen die Axen der Kräfte in die Axen des Körpers, oder in die Verlängerungen derselben (über C hinaus); die Mittelkraft jedoch nur in die Axe CD oder in deren jenseitige Verlängerung. Solcher Stellungen giebt es also eigentlich vier; so lange aber die Mittelkraft nur in der Axe CD gedacht wird, bleiben ihrer nur zwei.

Die Ebene der Axen CA, CD des Körpers heiße die Ebene A; die der Axen CB, CD die Ebene B; beide werden auch die Mittel-Ebenen genannt. In der gegenwärtigen Stellung des Systemes sind die Kräfte der Paare A, B beziehungsweise senkrecht auf den Ebenen B, A; und die Momente beider Paare Null.

Man drehe die Kräfte, von dieser Stellung aus, um eine der Axen CA oder CB, z. B. um die Axe A; so bleibt das Moment des Paares A beständig Null, indem seine Kräfte in die Drehungsaxe fallen. Dagegen drehen sich die Mittelkraft

und die Kräfte des Paares B, dessen Moment nicht mehr Null bleibt, in der Ebene B, und es ist klar, daß sie in derselben einen Mittelpunct haben müssen. Es sei (Fig. 21.) CD der Durchschnitt der beiden Mittelebenen, CB der Arm des Paares B, also DCB die Ebene B, CC' die Mittelfraft, Bb, C $\beta$  die Kräfte des Paares B, also  $\angle C' C \beta = \mathcal{R}$ . Man nehme in CD auf beiden Seiten  $CM = CM' = CB$ , und bringe in einem der Punkte M, M', hier nämlich in M, zwei der CC' gleiche, parallele und einander entgegengesetzte Kräfte M $\mu$  und M $\mu$  an, so entsteht die einzelne Kraft M $\mu$  und das Paar (M $\mu$ , CC'). Von den beiden Punkten M und M' ist hier M gewählt, damit das entstehende Paar (M $\mu$ , CC') dem Paare B (d. i. (Bb, C $\beta$ )) entgegen wirke, wie hier augenscheinlich der Fall ist. Diese Paare halten einander Gleichgewicht. Denn die Breite des Paares B ist  $BC \cdot \cos(\beta CD)$ , wie leicht zu sehen, da  $\angle DCB = \mathcal{R}$ ; dagegen ist  $MC \cdot \cos(\beta CD)$  die Breite des Paares (M $\mu$ , CC'); und der vorigen gleich, weil  $MC = CB$ . Da nun alle Kräfte = 1 sind, so sind die Momente der Paare einander gleich; also besteht, indem beide einander entgegen wirken, Gleichgewicht; w. z. b. w. Folglich ist M der gesuchte Mittelpunct.

Die Kräfte verhalten sich also in der gegenwärtigen Stellung ganz eben so, wie Kräfte in einer Ebene, deren Mittelfraft nicht Null ist; es halten nämlich die auf der Ebene B senkrechten (dem Paare A zugehörigen) Kräfte einander Gleichgewicht, und die übrigen Kräfte in der Ebene B haben einen für Drehungen in dieser Ebene gültigen Mittelpunct. Solcher Mittelpuncte ergeben sich vier. Je nachdem man nämlich von der einen oder anderen der beiden oben bezeichneten Anfangs-Stellungen ausgeht, in denen die Mittelfraft immer in die Axe CD und nicht in deren jenseitige Verlängerung fiel, und je nachdem nun um die Axe CA oder CB gedreht wird, ergiebt sich im Allgemeinen jedesmal ein anderer Mittelpunct. Nimmt man in dem Durchschnitt der beiden Mittel-Ebenen  $CN = CN' = CA$ , so sind M,

M', N, N' (Fig. 21.) diese vier Mittelpunkte. Wenn aber  $CA=CB$ , also  $CM=CN$ , so fallen sie in zwei zusammen.

Diese Betrachtungen erstrecken sich jedoch nur auf besondere Fälle; es würde daher nicht angemessen sein, länger bei ihnen zu verweilen.

33. Vor dem Beginn der allgemeineren Untersuchung müssen jedoch noch einige später unentbehrliche Formeln der analytischen Geometrie entwickelt werden. Man denke sich die Ären der Kräfte gegen die Ären des Körpers in irgend einer Stellung, bezeichne die ersten mit  $u, v, w$ ; die anderen mit  $x, y, z$ ; die Neigung von  $u$  gegen  $x$  mit  $(ux)$ , von  $u$  gegen  $y$  mit  $(uy)$ ; u. s. f. Es sei

$$\begin{aligned} \cos(ux) &= a, & \cos(uy) &= b, & \cos(uz) &= c \\ \cos(vx) &= a', & \cos(vy) &= b', & \cos(vz) &= c' \\ \cos(wx) &= a'', & \cos(wy) &= b'', & \cos(wz) &= c''; \end{aligned}$$

so ist, weil  $x, y, z$  gegen einander senkrecht sind:

$$\left. \begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1. \end{aligned} \right\} 1. \quad a.$$

Ferner weil  $u, v, w$  gegen einander senkrecht sind:

$$\left. \begin{aligned} a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0 \\ a''a + b''b + c''c &= 0 \\ aa' + bb' + cc' &= 0. \end{aligned} \right\} 1. \quad b.$$

Aus dem Anfangspunkte C der Ären beschreibe man eine Kugel vom Halbmesser  $=1$ , nenne  $x, y, z, u, v, w$  die Durchschnittpunkte der Oberfläche mit den gleichnamigen Ären, vollende die sphärischen Dreiecke  $xyz, uvw$  (Fig. 22.), und verlängere die Bogen  $xy, uv$  bis zu ihrem gemeinsamen Durchschnitte O. Nun sei  $Ox=\psi$ ,  $Ou=\varphi$ ,  $\angle uOx=\Theta$ ; und man denke sich noch von den Punkten  $u, v, w$  nach  $x, y, z$  die 9 Bogen gezogen, deren Cosinus die obigen  $a, b, \dots c''$  sind (in der Figur sind sie weggelassen, um diese nicht zu überfüllen); so hat

man in dem Dreiecke  $\hat{u}Ox$ :

$$\cos ux = \cos Ou \cdot \cos Ox + \sin Ou \cdot \sin Ox \cdot \cos uOx$$

oder  $a = \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \cos \Theta.$

Setzt man  $Ov$  statt  $Ou$ , also  $\varphi + \frac{1}{2}\pi$  statt  $\varphi$ , so geht  $ux$  in  $vx$  über; also ergibt sich aus dem Dreiecke  $vOx$ :

$$a' = -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \Theta.$$

In dem Dreiecke  $wOx$  ist  $\angle wOx = \frac{1}{2}\pi + \Theta$ , Seite  $Ow = \frac{1}{2}\pi$ , folglich  $\cos wx = \sin Ox \cdot \cos(\frac{1}{2}\pi + \Theta)$ , also

$$a'' = -\sin \psi \sin \Theta.$$

Vertauscht man überall  $x$  mit  $y$ , so ist  $\psi + \frac{1}{2}\pi (= Oy)$  statt  $\psi$  und  $b$  statt  $a$  zu schreiben; und es kommt:

$$b = -\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \Theta$$

$$b' = \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \Theta$$

$$b'' = -\cos \psi \sin \Theta.$$

In dem Dreiecke  $uOz$  ist  $Oz = \frac{1}{2}\pi$ ,  $\angle zOu = \frac{1}{2}\pi - \Theta$ , also  $\cos uz = \sin Ou \cdot \sin \Theta$  oder

$$c = \sin \varphi \sin \Theta.$$

Ferner aus  $vOz$ :  $c' = \cos \varphi \sin \Theta$

und aus  $\Delta wOz$ , da  $wz = \Theta$ :

$$c'' = \cos \Theta.$$

Durch die vorstehenden Formeln sind die neun Cosinus  $a, b, \dots c''$  als Functionen dreier von einander unabhängiger Winkel  $\varphi, \psi, \Theta$  ausgedrückt, welche den Bedingungsgleichungen 1. Genüge leisten, wovon man sich durch Einsetzung der Werthe dieser Cosinus in die Gleichungen 1. leicht überzeugen kann:

Man bemerke noch folgende Relationen: Es sei

$$A = c''b' - c'b'', B = a''c' - a'c'', C = b''a' - b'a'',$$

$$A' = cb'' - c''b, B' = ac'' - a''c, C' = ba'' - b''a,$$

$$A'' = c'b - c'b', B'' = a'c - a'c', C'' = b'a - b'a',$$

so ist, wie leicht zu sehen:



$$\left. \begin{aligned} Aa' + Bb' + Cc' &= 0, & Aa'' + Bb'' + Cc'' &= 0, \\ A'a'' + B'b'' + C'c'' &= 0, & A'a + B'b + C'c &= 0, \\ A''a + B''b + C''c &= 0, & A''a' + B''b' + C''c' &= 0. \end{aligned} \right\} 2.$$

Ferner ergibt sich:

$$Aa + Bb + Cc = A'a' + B'b' + C'c' = A''a'' + B''b'' + C''c''. \quad 3.$$

Vergleicht man die beiden ersten der Gleichungen 2. mit den in 1. enthaltenen:

$$aa' + bb' + cc' = 0, \quad aa'' + bb'' + cc'' = 0,$$

so folgt  $A : B : C = a : b : c;$

mithin:  $A = fa, B = fb, C = fc,$

wo  $f$  ein noch unbekannter Factor ist.

Es war aber  $A = c''b' - c'b'',$  und  $c'' = \cos \Theta,$   
 $c' = \cos \varphi \sin \Theta,$   $b' = \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \Theta,$   
 $b'' = -\cos \psi \sin \Theta;$  also

$$A = (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \Theta) \cos \Theta + \cos \varphi \cos \psi \sin \Theta \sin \Theta,$$

mithin  $A = \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \cos \Theta = a,$  demnach ist  $f = 1,$

und  $A = a, B = b, C = c. \quad 4. a.$

Auf die nämliche Weise folgt

$$A' : B' : C' = a' : b' : c'$$

$$A'' : B'' : C'' = a'' : b'' : c'',$$

und hieraus, mit Hülfe von 3.

$$A' = a', B' = b', C' = c', A'' = a'', B'' = b'', C'' = c''. \quad 4. b.$$

Die in 4. enthaltenen Relationen sind zu merken.

34. Nun stelle die Age  $u$  die Mittelfraft in  $C$ ,  $v$  die in  $C$  wirkende Seitenkraft des Paares  $A$ ,  $w$  die ebenfalls in  $C$  wirkende Seitenkraft des Paares  $B$  dar; ferner liege die Age  $x$  in dem Arme  $CA = p$  des Paares  $A$ , und  $y$  in dem Arme  $CB = q$  des Paares  $B$ ; so sind  $a, b, c$  die Componenten der Mittelfraft nach  $x, y, z$ ;  $a', b', c'$  und  $a'', b'', c''$  die Componenten der in  $C$  wirkenden Seitenkräfte der Paare  $A, B$ , folglich  $-a, -b,$

$-c$ ;  $-a''$ ,  $-b''$ ,  $-c''$  die der in A und B wirkenden Seitenkräfte dieser Paare. Wird aus beiden das zusammengesetzte Paar gebildet, so ergeben sich seine Componenten L, M, N vermittlest der Ausdrücke in §. 17. Nennt man nämlich vorläufig  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  die Coordinaten von A,  $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$  die von B, und setzt  $\cos \alpha = -a'$ ,  $\cos \beta' = -b'$ ,  $\cos \gamma' = -c'$ ,  $\cos \alpha'' = -b''$ ,  $\cos \beta'' = -c''$ ,  $\cos \gamma'' = -c''$ , so wird, weil  $P' = 1$ ,  $P'' = 1$ ,

$$L = -b'z' + c'y' - b''z'' + c''y''$$

$$M = -c'x' + a'z' - c''x'' + a''z''$$

$$N = -a'y' + b'x' - a''y'' + b''x'',$$

also, da  $x' = p$ ,  $y' = 0$ ,  $z' = 0$ ,  $x'' = 0$ ,  $y'' = q$ ,  $z'' = 0$  ist, ganz einfach:

$$L = qc'', M = -pc', N = pc' - qa''.$$

Hieraus ergibt sich sofort das kleinste zusammengesetzte Paar

$$V = La + Mb + Nc = q(ac'' - ca'') + p(b'c - c'b)$$

$$\text{oder (§. 33. §. 4.)} \quad V = qb' - pa''.$$

Zur Abkürzung werde gesetzt:

$$\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \cos \Theta = g,$$

$$-\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \Theta = f,$$

$$-\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \Theta = k,$$

$$\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \Theta = t;$$

mithin (§. 33.)  $a = g$ ,  $a' = f$ ,  $a'' = -\sin \psi \sin \Theta$ ;  $b = k$ ,  $b' = t$ ,

$b'' = -\cos \psi \sin \Theta$ ;  $c = \sin \varphi \sin \Theta$ ,  $c' = \cos \varphi \cos \Theta$ ,  $c'' = \cos \Theta$ ;

so folgt:  $L = q \cos \Theta$ ,  $M = -p \cos \varphi \sin \Theta$ ,

$$N = pt + q \sin \psi \sin \Theta, \quad V = p \sin \psi \sin \Theta + qt.$$

Man hat noch für die Componenten der Mittelfraft die Werthe  $a = g$ ,  $b = k$ ,  $c = \sin \varphi \sin \Theta$ . Werden diese Ausdrücke in die Gleichungen gesetzt, welche zur Bestimmung der mit dem kleinsten Paare V verbundenen Resultante dienen (§. 18.) so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} gy - kx &= pt + q \sin \psi \sin \Theta - V \sin \varphi \sin \Theta \\ \sin \varphi \sin \Theta \cdot x - gz &= -p \cos \varphi \sin \Theta - V k \\ kz - \sin \varphi \sin \Theta \cdot y &= q \cos \Theta - V g. \end{aligned} \right\} 1.$$

Wenn man nun die Kräfte ohne Aenderung der gegenseitigen Neigungen um ihre Angriffspuncte beliebig dreht, so ändern sich in den vorstehenden Gleichungen die Winkel  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\Theta$ , und mit ihnen die Richtung der Resultante, so wie die Intensität des auf denselben senkrechten Paares  $V$ . Unter den Stellungen, in welche das System durch diese Drehung gelangen kann, sind besonders diejenigen hervorzuheben, in denen  $V=0$  ist, und mithin die Kräfte sich durch eine einzige ersetzen lassen. Alsdann findet zwischen den Winkeln  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\Theta$  folgende Relation statt:

$$V = p \sin \psi \sin \Theta + q t = 0,$$

oder, wenn für  $t$  sein Werth gesetzt wird:

$$(p \sin \Theta + q \sin \varphi) \sin \psi + q \cos \varphi \cos \Theta \cdot \cos \psi = 0.$$

Man setze  $A^2 = (p \sin \Theta + q \sin \varphi)^2 + q^2 \cos \varphi^2 \cos \Theta^2$ , so wird hiernach

$$A \sin \psi = -q \cos \varphi \cos \Theta, \quad A \cos \psi = p \sin \Theta + q \sin \varphi \quad 2.$$

zu setzen sein, wo das Zeichen der Wurzelgröße  $A$  unbestimmt bleibt. Ferner erhält man für die Lage der ersetzenden Kraft folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} gy - kx &= +pt + q \sin \psi \sin \Theta \\ \sin \varphi \sin \Theta \cdot x - gz &= -p \cos \varphi \sin \Theta \\ kz - \sin \varphi \sin \Theta \cdot y &= +q \cos \Theta, \end{aligned} \right\} 3.$$

von den jede, vermöge der erfüllten Bedingung  $V=0$ , eine Folge der beiden anderen ist. Wird der Winkel  $\psi$  vermittlest der Werthe (2.) von  $\sin \psi$  und  $\cos \psi$  aus diesen Gleichungen weggeschafft, indem sich für  $g$ ,  $k$ ,  $pt + q \sin \psi \sin \Theta$  die folgenden Werthe setzen lassen:

$$\begin{aligned} Ag &= (p \sin \Theta + q \sin \varphi) \cos \varphi - q \sin \varphi \cos \varphi \cos \Theta^2 \\ &= (p + q \sin \varphi \sin \Theta) \cos \varphi \sin \Theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ak &= q \cos \varphi^2 \cos \Theta + (p \sin \Theta + q \sin \varphi) \sin \varphi \cos \Theta \\ &= (q + p \sin \varphi \sin \Theta) \cos \Theta; \end{aligned}$$

$$A(p + q \sin \varphi \sin \Theta) = (p^2 - q^2) \sin \Theta \cos \Theta \cos \varphi,$$

(Diese Formel findet man durch eine ähnliche leichte Reduction, wie die beiden vorigen); so ergeben sich (anstatt 3.) folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} (p + q \sin \varphi \sin \Theta) \cos \varphi \sin \Theta \cdot y - (q + p \sin \varphi \sin \Theta) \cos \Theta \cdot x \\ &= (p^2 - q^2) \cos \varphi \sin \Theta \cos \Theta \\ A \sin \varphi \sin \Theta \cdot x - (p + q \sin \varphi \sin \Theta) \cos \varphi \sin \Theta \cdot z \\ &= -A p \cos \varphi \sin \Theta \\ (q + p \sin \varphi \sin \Theta) \cos \Theta \cdot z - A \sin \varphi \sin \Theta \cdot y \\ &= A q \cos \Theta. \end{aligned} \right\} 4.$$

Diesen Gleichungen kann man auf eine sehr merkwürdige Art, unabhängig von den Werthen von  $\varphi$  und  $\Theta$ , Genüge leisten. Nämlich man setze zuerst  $x=0$ , so kommt, aus der ersten und zweiten

$$\left. \begin{aligned} (p + q \sin \varphi \sin \Theta) y &= (p^2 - q^2) \cos \Theta \\ (p + q \sin \varphi \sin \Theta) z &= A p, \end{aligned} \right\} 5.$$

wenn die gemeinschaftlichen Factoren wegbleiben. Werden diese Gleichungen quadirt, sodann die erste mit  $p^2 - q^2$ , die zweite mit  $p^2$  dividirt, und hierauf addirt, so ergibt sich

$$(p + q \sin \varphi \sin \Theta)^2 \left[ \frac{y^2}{p^2 - q^2} + \frac{z^2}{p^2} \right] = (p^2 - q^2) \cos^2 \Theta + A^2.$$

Nun ist aber

$$A^2 = (p \sin \Theta + q \sin \varphi)^2 + q^2 \cos \varphi^2 \cos^2 \Theta$$

mithin

$$A^2 + (p^2 - q^2) \cos^2 \Theta$$

$$= p^2 + 2pq \sin \Theta \sin \varphi + q^2 (\sin^2 \varphi + \cos \varphi^2 \cos^2 \Theta - \cos^2 \Theta)$$

$$= p^2 + 2pq \sin \Theta \sin \varphi + q^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \Theta = (p + q \sin \varphi \sin \Theta)^2;$$

mithin ist

$$(p^2 - q^2) \cos^2 \Theta + A^2 = (p + q \sin \varphi \sin \Theta)^2$$

und folglich aus 5.  $\frac{y^2}{p^2 - q^2} + \frac{z^2}{p^2} = 1$ , während zugleich  $x=0$ .

Wird ferner in den obigen Gleichungen (4.) der ersetzenden Kraft  $y=0$  gesetzt, so kommt aus der ersten und dritten:

$$\left. \begin{aligned} (q+p \sin \varphi \sin \Theta)x &= (q^2-p^2) \cos \varphi \sin \Theta \\ (q+p \sin \varphi \sin \Theta)z &= Aq. \end{aligned} \right\} 6.$$

Quadrirt man wieder diese Gleichungen, dividirt die erste durch  $q^2-p^2$ , die zweite durch  $q^2$ , und addirt, so kommt:

$$(q+p \sin \varphi \sin \Theta)^2 \left[ \frac{x^2}{q^2-p^2} + \frac{z^2}{q^2} \right] = (q^2-p^2) \cos^2 \varphi \sin^2 \Theta + A^2.$$

Nun ist aber wiederum

$$\begin{aligned} & A^2 + (q^2-p^2) \cos^2 \varphi \sin^2 \Theta \\ &= q^2 + 2pq \sin \varphi \sin \Theta + p^2 (\sin^2 \Theta - \cos^2 \varphi \sin^2 \Theta) \\ &= (q+p \sin \varphi \sin \Theta)^2, \end{aligned}$$

mithin ergibt sich aus der vorhergehenden Gleichung

$$\frac{x^2}{q^2-p^2} + \frac{z^2}{q^2} = 1, \text{ wobei zugleich } y=0.$$

Es ist demnach gefunden, daß den Gleichungen der ersetzenden Kraft, welche Werthe auch  $\varphi$  und  $\Theta$  haben mögen, d. h. in welche Stellung auch das System gebracht werde, wofern nur die Bedingung  $V=0$  erfüllt ist, oder die Kräfte sich durch eine einzige ersetzen lassen, immer durch folgende zwei Systeme von Gleichungen Genüge geleistet wird:

$$\left. \begin{aligned} x=0, & \quad \frac{z^2}{p^2} + \frac{y^2}{p^2-q^2} = 1, \\ y=0, & \quad \frac{z^2}{q^2} + \frac{x^2}{q^2-p^2} = 1. \end{aligned} \right\} 7.$$

Diese Gleichungen stellen im Allgemeinen zwei in den Mittelebenen befindliche Kegelschnitte dar, von denen einer eine Ellipse, der andere eine Hyperbel ist, weil von den Differenzen  $p^2-q^2$  und  $q^2-p^2$  die eine nothwendig positiv, die andere negativ ist. Es sei z. B.  $p^2-q^2$  positiv, so liegt die Ellipse in der Ebene  $yz$ , die Hyperbel in der Ebene  $xz$ . Die große Axe der Ellipse und die reelle der Hyperbel fallen in die Axe der  $z$ ,

ihre Mittelpuncte in den Anfang der Coordinaten. Für die Scheitel der Ellipse wird  $y=0$ ,  $z=\pm p$ , für die Brennpuncte  $z=\pm q$ ; für die Scheitel der Hyperbel  $x=0$ ,  $z=\pm q$ , und für ihre Brennpuncte  $z=\pm p$ ; folglich fallen die Brennpuncte der Hyperbel mit den Scheiteln der Ellipse, und die Scheitel der Hyperbel mit den Brennpuncten der Ellipse zusammen. Hieraus ergibt sich der nachstehende beachtungswerthe Satz:

Wenn die Kräfte eines beliebigen Systemes, vorausgesetzt, daß ihre Mittelfraft nicht Null ist, ohne Aenderung ihrer gegenseitigen Neigungen um ihre Angriffspuncte gedreht, und, was immer auf unzählige Arten geschehen kann, in solche Stellungen gebracht werden, in welchen sie sich durch eine einzige ersetzen lassen; so trifft die Richtung der ersetzenden Kraft eine Ellipse und eine Hyperbel, welche den Centralpunct zum gemeinschaftlichen Mittelpuncte haben, von denen die eine in der einen, die andere in der anderen der auf einander und auf der Central-Ebene senkrechten Mittel-Ebenen liegt, und welche so mit einander verbunden sind, daß die Scheitel der einen mit den Brennpuncten der anderen zusammenfallen.

In diesem allgemeinen Satze sind nothwendig alle in §. 30. unterschiedenen Fälle enthalten. Sind die beiden Axen der Ellipse einander gleich, so ist dieselbe ein Kreis, und die Brennpuncte fallen in den Mittelpunct. Daher fallen auch die Scheitel der Hyperbel in den Mittelpunct zusammen, und diese selbst verwandelt sich in eine auf der Ebene des Kreises senkrechte, durch den Mittelpunct (Centralpunct) gehende gerade Linie. Dieser Fall ist kein anderer, als der zweite in §. 30., in welchem dem Systeme keine Central-Ebene, sondern eine Central-Axe zukam; nämlich die genannte Gerade ist die Central-Axe. Die eine der Mittel-Ebenen ist dann die des Kreises (den man den Centralkreis nennen kann); als zweite kann jede durch die Central-Axe gelegte Ebene angesehen werden. In diesem Falle ist von

den obigen Größen  $p, q$  die eine Null. Sind aber beide zugleich Null, so fallen sämtliche Brennpunkte und Scheitel in den Centralpunkt, und man hat den ersten der in §. 30. unterschiedenen Fälle. Bemerkenswerth ist auch der Fall, in welchem  $p = q$ . Alsdann ist die kleine Axe der Ellipse Null, diese fällt mithin mit ihrer großen Axe zusammen, deren Endpunkte in dem Abstände  $= p$  zu beiden Seiten des Centralpunktes liegen. Die Hyperbel geht in die Verlängerungen dieser Axe, nach beiden Seiten, über; die Brennpunkte und Scheitel aber fallen in die Endpunkte der Axe  $p$ . Wenn nun die Kräfte dieses Systemes sich in einer Stellung befinden, in welcher sie einer einzelnen Kraft gleichgelten, so muß diese nothwendig, nach dem allgemeinen Satze, den Umring der Ellipse und den der Hyperbel treffen. In dem gegenwärtigen Falle muß sie also wenigstens durch einen der Endpunkte der Axe  $p$  gehen, in welchen die beiden Umringe einander schneiden. Ist die Stellung der Kräfte so, daß die Mittelkraft senkrecht auf der Central-Ebene steht, so geht die Resultante durch beide genannten Punkte zugleich, in jeder anderen Stellung aber nur durch einen derselben. Es ist kaum noch nöthig zu bemerken, daß hier nur von solchen Stellungen die Rede ist, in denen die Kräfte einer einzelnen Kraft gleichgelten.

Will man die andere Vorstellungsweise zu Grunde legen, nach welcher der Körper gedreht wird, während die Kräfte in ihren Richtungen an ihren Angriffspunkten haften, so muß man sich die Central-Ebene und die Mittel-Ebenen, in diesen aber die Ellipse und Hyperbel in dem Körper vorstellen, welche sämmtlich in ihm fest sind. So oft nun der Körper in eine Lage kommt, in welcher die Kräfte sich durch eine einzige ersetzen lassen, trifft diese zugleich den Umring der Ellipse und den der Hyperbel.

35. Man kann noch die Folge derjenigen Stellungen zu wissen verlangen, in welchen die Kräfte sich beständig durch eine einzige ersetzen lassen, die immer durch einen beliebig gewählten

Punct der Ellipse oder der Hyperbel geht. Es soll gezeigt werden, daß alle diese Stellungen durch Drehung um eine unveränderliche Axe erhalten werden, welche der den Kegelschnitt in dem gewählten Puncte berührenden Geraden parallel ist. Der Punct liege z. B. in der Ebene  $xz$ , seine Coordinaten seien demgemäß  $x=x'$ ,  $y=0$ ,  $z=z'$ , und mithin

$$\frac{z'^2}{q^2} + \frac{x'^2}{q^2 - p^2} = 1.$$

Bei dieser Drehung findet zwischen den Winkeln  $\varphi$  und  $\Theta$ , welche bisher von einander unabhängig geblieben waren, eine Relation Statt, welche durch jede der beiden folgenden Gleichungen ausgedrückt wird (§. 34. 6.)

$$(q + p \sin \varphi \sin \Theta)x' = (q^2 - p^2) \cos \varphi \sin \Theta$$

$$(q + p \sin \varphi \sin \Theta)z' = Aq,$$

indem von diesen jede, vermöge der vorhergehenden Gleichung, in der anderen enthalten ist. Man hatte aber

$$A^2 = (q + p \sin \varphi \sin \Theta)^2 - (q^2 - p^2) \cos^2 \varphi \sin^2 \Theta,$$

$$\text{folglich } A^2 z'^2 = A^2 q^2 - (q^2 - p^2) z'^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \Theta,$$

und mithin

$$A = \pm z' \sqrt{\frac{q^2 - p^2}{q^2 - z'^2}} \cdot \cos \varphi \sin \Theta = h \cos \varphi \sin \Theta,$$

$$\text{wenn } h = \pm z' \sqrt{\frac{q^2 - p^2}{q^2 - z'^2}}$$

gesetzt wird. Demnach ist

$$(q + p \sin \varphi \sin \Theta)z' = hq \cos \varphi \sin \Theta.$$

Dividirt man diese Gleichung durch

$$(q + p \sin \varphi \sin \Theta)x' = (q^2 - p^2) \cos \varphi \sin \Theta,$$

$$\text{so kommt } \frac{z'}{x'} = \frac{hq}{q^2 - p^2}, \quad \text{also } h = \frac{(q^2 - p^2)z'}{qx'}, \quad \text{welcher}$$

Werth von  $h$  keine Zweideutigkeit der Zeichen mehr darbietet. Man hat nun



$$A \sin \psi = -q \cos \varphi \cos \Theta; \text{ folglich } -\sin \psi \sin \Theta = \frac{q \cos \Theta}{h}.$$

$$Ag = (p + q \sin \varphi \sin \Theta) \cos \varphi \sin \Theta; g = \frac{p + q \sin \varphi \sin \Theta}{h}.$$

$$\begin{aligned} Af &= -(q + p \sin \varphi \sin \Theta) + q \cos \varphi^2 \sin \Theta^2 \\ &= -\frac{Aq}{z'} + q \cos \varphi^2 \sin \Theta^2 = -\frac{Aq}{z'} + \frac{Aq \cos \varphi \sin \Theta}{h}, \end{aligned}$$

$$\text{folglich} \quad f = \frac{-q}{z'} + \frac{q \cos \varphi \sin \Theta}{h}.$$

$$\text{Eben so findet sich} \quad t = \frac{p \cos \Theta}{h}, \quad k = \frac{q \cos \Theta}{z'}.$$

Durch den Centralpunct lege man eine Gerade, welche mit den Axen  $x, y, z$  die Winkel  $s, s', s''$  bilde. Sind ferner  $i, i', i''$  der Reihe nach die Neigungen dieser Geraden gegen die Mittelfkraft, und gegen die an dem Centralpuncte wirkenden Seitenkräfte der Paare A und B; so hat man:

$$\cos i = g \cos s + k \cos s' + \sin \varphi \sin \Theta \cos s''$$

$$\cos i' = f \cos s + t \cos s' + \cos \varphi \sin \Theta \cos s''$$

$$\cos i'' = -\sin \psi \sin \Theta \cos s - \cos \psi \sin \Theta \cos s' + \cos \Theta \cos s''.$$

Man setze  $\cos s' = 0$ , d. h. die Gerade liege in der Ebene  $zx$ , so kommt:

$$\cos i = \frac{(p + q \sin \varphi \sin \Theta) \cos s}{h} + \sin \varphi \sin \Theta \cos s''$$

$$\cos i' = \frac{-q \cos s}{z'} + \frac{q \cos \varphi \sin \Theta \cos s}{h} + \cos \varphi \sin \Theta \cos s''$$

$$\cos i'' = \frac{q \cos \Theta \cos s}{h} + \cos \Theta \cos s''.$$

Nun sei  $q \cos s + h \cos s'' = 0$ , so ergibt sich:

$$\cos i = \frac{p \cos s}{h}, \quad \cos i' = \frac{-q \cos s}{z'}, \quad \cos i'' = 0.$$

Die Gleichung der Geraden in der Ebene  $xz$  ist  $\frac{x}{\cos \varepsilon} = \frac{z}{\cos \varepsilon''}$ ,

oder  $qx + hz = 0$ ,

oder, weil  $hqx' = (q^2 - p^2)z'$  ist,

$$\frac{xx'}{q^2 - p^2} + \frac{zz'}{q^2} = 0.$$

Die Gleichung der Tangente des Kegelschnittes in dem Puncte  $(x'z')$  ist bekanntlich  $\frac{xx'}{q^2 - p^2} + \frac{zz'}{q^2} = 1$ ; daher ist offenbar die Gerade dieser Tangente parallel. Und da, während  $\varphi$  und  $\Theta$  sich durch die Drehung ändern, die Neigungen der Kräfte gegen diese Gerade ungeändert bleiben, wie die obigen Werthe von  $\cos i$ ,  $\cos i'$ ,  $\cos i''$  zeigen; so folgt, daß die Kräfte um diese Tangente gedreht werden müssen, wie oben behauptet wurde.

Da alle Resultanten, die vom Berührungspuncte aus nach dem Umringe des anderen Kegelschnittes gehen, mit dieser Tangente gleiche Winkel ( $i$ ) bilden, so folgt noch, daß sie alle in einem geraden Regel liegen.

Der Inhalt des Vorstehenden läßt sich in folgenden Satz zusammenfassen: Man denke sich den Körper in einer Stellung, in welcher die Kräfte sich durch eine einzige ersetzen lassen. In dem Durchschnitte derselben mit der Ellipse (oder in dem mit der Hyperbel) ziehe man eine Tangente an die Ellipse (oder an die Hyperbel) und drehe den Körper um diese Tangente, als feste Axe; so lassen die Kräfte sich beständig durch eine einzige ersetzen, deren Lage, Richtung und Größe während der Drehung gänzlich unverändert bleiben. Dieselbe trifft mithin den einen Kegelschnitt beständig in seinem unveränderlichen Berührungspuncte mit der Drehungsaxe, während ihr nach und nach die sämtlichen Puncte des anderen Kegelschnittes begegnen. Ist dieser Berührungspunct im Raume fest, so besteht zwischen den Kräften, während der angegebenen Drehung des Körpers in allen Stellungen Gleichgewicht. Der einfachste Fall dieses Satzes wurde schon in §. 32. hervorgehoben.

36. In Vorstehendem sind nur solche Stellungen des Systems in Betracht gekommen, welche der Bedingung  $V=0$  Genüge leisteten. Man betrachte ferner das System in allen den Stellungen, in welchen die Resultante eine gegebene Richtung hat, oder mit den Coordinatenachsen gegebene Winkel bildet, deren Cosinus  $a, b, c$  sein mögen. Da in diesem Falle  $g=a, k=b, \sin \varphi \sin \Theta=c$ , so werden die Gleichungen der Resultante (§. 34. 1.) folgende:

$$ay - bx = N - Vc,$$

$$cx - az = M - Vb,$$

$$bz - cy = L - Va,$$

wo  $L, M, N, V$  die in §. 34. angegebenen Ausdrücke bedeuten. Werden die Quadrate derselben addirt, so kommt auf der rechten Seite:

$$N^2 + M^2 + L^2 - 2V(Nc + Mb + La) + V^2(c^2 + b^2 + a^2),$$

oder, weil  $V = La + Mb + Nc, a^2 + b^2 + c^2 = 1$ , so erhält man

$$N^2 + M^2 + L^2 - 2V^2 + V^2, \text{ d. i.}$$

$$N^2 + M^2 + L^2 - V^2;$$

mithin

$$(ay - bx)^2 + (cx - az)^2 + (bz - cy)^2 = N^2 + M^2 + L^2 - V^2.$$

Werden nun für  $L, M, N, V$  ihre Werthe aus §. 34. gesetzt, so kommt

$$\begin{aligned} &= (pt + q \sin \psi \sin \Theta)^2 + p^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \Theta + q^2 \cos^2 \Theta \\ &\quad - (qt + p \sin \psi \sin \Theta)^2 \end{aligned}$$

$$= p^2 [t^2 + \cos^2 \varphi \sin^2 \Theta - \sin^2 \psi \sin^2 \Theta]$$

$$+ q^2 [\sin^2 \psi \sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta - t^2].$$

Man wird aber ohne Schwierigkeit finden, daß

$$t^2 + \cos^2 \varphi \sin^2 \Theta - \sin^2 \psi \sin^2 \Theta = g^2$$

$$\sin^2 \psi \sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta - t^2 = k^2$$

ist, mithin, weil in dem vorliegenden Falle  $g=a, k=b$ ,

$$N^2 + M^2 + L^2 - V^2 = p^2 a^2 + q^2 b^2;$$

und  $(ay - bx)^2 + (cx - az)^2 + (bz - cy)^2 = p^2 a^2 + q^2 b^2. \quad A)$

Um die Bedeutung dieser Gleichung zu verstehen, ziehe man durch den Anfang der Coordinaten C die den Gleichungen

$$\frac{u}{a} = \frac{v}{b} = \frac{w}{c}$$

entsprechende, also der Resultante parallele Linie H, nehme außer derselben einen Punkt B an, dessen Coordinaten  $x, y, z$  seien, und suche den senkrechten Abstand dieses Punktes von der Linie. Zu dem Ende ziehe man die Gerade CB, und nenne  $\delta$  den Winkel, welchen sie mit der Linie H bildet, so ist der gesuchte Abstand gleich  $CB \cdot \sin \delta$ . Nun sind die Gleichungen der Linie CB

folgender: 
$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c};$$

folglich, wenn man sie mit der Gleichung von H verbindet,

$$\cos \delta = \frac{ax + by + cz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

weil  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ , und zugleich die Länge  $CB = \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ; folglich  $\rho \cos \delta = ax + by + cz$ . Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \rho^2 \sin^2 \delta &= x^2 + y^2 + z^2 - (ax + by + cz)^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 \\ &= (ay - bx)^2 + (cx - az)^2 + (bz - cy)^2. \end{aligned}$$

Der zuletzt stehende Ausdruck drückt mithin das Quadrat des kürzesten Abstandes ( $\rho \sin \delta$ ) des Punktes B von der Linie H aus, oder auch, wenn man durch B eine Linie parallel der H zieht, den kürzesten Abstand dieser Linie vom Anfange der Coordinaten.

Aus der mit A) bezeichneten Gleichung geht demnach hervor, daß der senkrechte Abstand aller (jedesmal mit dem kleinsten zusammengesetzten Paare verbundenen) Resultanten, welche die nämliche Richtung haben, vom Centralpunkte C, eine beständige Größe, nämlich gleich  $\sqrt{p^2 a^2 + q^2 b^2}$  ist; und man erhält den Satz:

Werden die Kräfte des Systemes um die festbleibende Rich-

tung der Mittelfraft. gedreht, so ist der Ort, in welchem sich die jedesmal mit dem kleinsten zusammengesetzten Paare verbundene Resultante bewegt, ein Kreiscylinder, dessen Axe durch den Centralpunct geht.

Giebt man der Resultante eine der vorigen gerade entgegengesetzte Richtung, so sind die Cosinus ihrer Neigungen gegen die Axen  $-a, -b, -c$ ; da aber die Gleichung des vorstehenden Cylinders durch die Umkehrung der Zeichen von  $a, b, c$  nicht geändert wird; so folgt, daß auch die den vorigen gerade entgegengesetzten Resultanten in dem nämlichen Cylinder liegen.

37. Es ist noch zu untersuchen, wie sich das zusammengesetzte Paar ändert, indem die Resultante auf der Cylinderoberfläche fortgeht. Setzt man  $g=a, k=b, \sin \varphi \sin \Theta=c$ , so ergeben sich, aus den beiden ersten dieser Gleichungen, folgende Ausdrücke für  $\sin \psi$  und  $\cos \psi$ :

$$(a^2+b^2)\sin \psi = a \sin \varphi \cos \Theta - b \cos \varphi,$$

$$(a^2+b^2)\cos \psi = a \cos \varphi + b \sin \varphi \cos \Theta.$$

Eliminirt man demnach  $\psi$  zunächst aus dem Werthe von  $i$ , so kommt:  $(a^2+b^2)i = a \cos \Theta - bc \cdot \cos \varphi \sin \Theta$ ;

ferner

$$(a^2+b^2)N = a(p+qc) \cos \Theta - b(q+pc) \cos \varphi \sin \Theta,$$

$$(a^2+b^2)V = a(q+pc) \cos \Theta - b(p+qc) \cos \varphi \sin \Theta.$$

Nun werde, wie zulässig ist, gesetzt:

$$\cos \Theta = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin \gamma, \quad \cos \varphi \sin \Theta = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \cos \gamma;$$

$$\text{ferner} \quad a(q+pc) = \mu \cos \varepsilon, \quad b(p+qc) = \mu \sin \varepsilon,$$

$$\text{so kommt} \quad \sqrt{a^2+b^2} \cdot V = \mu \cdot \sin(\gamma - \varepsilon).$$

Für  $\gamma = \varepsilon$  wird  $V = 0$ ; dieser Werth von  $\gamma$  liefert also eine Resultante, welche in dem Cylinder liegt und zugleich die Ellipse und Hyperbel trifft. Für diese Resultante sei  $L=L', M=M', N=N'$ , so ergibt sich

$$L' = q\sqrt{a^2 + b^2} \sin \varepsilon, \quad M' = -p\sqrt{a^2 + b^2} \cos \varepsilon,$$

$$N' = \frac{a(p+qc) \sin \varepsilon - b(q+pc) \cos \varepsilon}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Legt man durch diese Resultante und den Centralpunct eine Ebene, so ist die Gleichung derselben:

$$L'x + M'y + N'z = 0. \quad 1.$$

Man lege ferner durch eine zweite, zu einem beliebigen  $\gamma$  gehörige Resultante und den Centralpunct eine Ebene, deren Gleichung sein wird:

$$(L - aV)x + (M - bV)y + (N - cV)z = 0, \quad 2.$$

wo  $L = q\sqrt{a^2 + b^2} \sin \gamma, \quad M = -p\sqrt{a^2 + b^2} \cos \gamma,$

$$N = \frac{a(p+qc) \sin \gamma - b(q+pc) \cos \gamma}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$V = \frac{\mu \sin(\gamma - \varepsilon)}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Es sei  $\eta$  die Neigung der Ebenen 1. 2. gegen einander, so kommt

$$\cos \eta = \frac{LL' + MM' + NN'}{p^2 a^2 + q^2 b^2}.$$

Man findet aber  $LL' + MM' + NN' = A + B + C$ , wo gesetzt ist:

$$A = \left[ (a^2 + b^2)q^2 + \frac{a^2(p+qc)^2}{a^2 + b^2} \right] \sin \gamma \sin \varepsilon,$$

$$B = \left[ (a^2 + b^2)p^2 + \frac{b^2(q+pc)^2}{a^2 + b^2} \right] \cos \gamma \cos \varepsilon,$$

$$C = \frac{ab(p+qc)(q+pc) \sin(\gamma + \varepsilon)}{a^2 + b^2}.$$

Diese Ausdrücke lassen sich weiter auf folgende Formen bringen:

$$A = \left[ (a^2 + b^2)q^2 + (p+qc)^2 - \frac{b^2(p+qc)^2}{a^2 + b^2} \right] \sin \gamma \sin \varepsilon,$$

$$B = \left[ (a^2 + b^2)p^2 + (q+pc)^2 - \frac{a^2(q+pc)^2}{a^2 + b^2} \right] \cos \gamma \cos \varepsilon,$$

$$C = - \frac{\mu^2 \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin (\gamma + \varepsilon)}{a^2 + b^2};$$

und hieraus folgt, weil  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ,  $a(q + pc) = \mu \cos \varepsilon$ ,  $b(p + qc) = \mu \sin \varepsilon$  ist,

$$A + B = (p^2 + q^2 + 2pqc) \cos(\varepsilon - \gamma) + \frac{\mu^2 (\sin \gamma \sin \varepsilon^2 + \cos \gamma \cos \varepsilon^2)}{a^2 + b^2},$$

und endlich

$$\begin{aligned} A + B + C &= \left[ (p^2 + q^2 + 2pqc)(a^2 + b^2) - \mu^2 \right] \frac{\cos(\varepsilon - \gamma)}{a^2 + b^2} \\ &= (a^2 p^2 + b^2 q^2) \cos(\varepsilon - \gamma). \end{aligned}$$

Folglich ist  $\cos \eta = \cos(\varepsilon - \gamma)$ , und das Moment des zusammengesetzten Paares  $V$ , gleich

$$\frac{\mu \sin \eta}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Diese Formel spricht sehr einfach das Gesetz der Aenderung des Paares  $V$  aus. Für  $\eta = 0$  und  $\eta = \pi$  wird  $V = 0$ ; es giebt also zwei Resultanten, für welche  $V = 0$ , und die mithin die Ellipse und Hyperbel treffen. Die durch sie gelegte Ebene geht zugleich durch die Axe des Cylinders. Legt man durch diese Axe und durch irgend eine Resultante, zu welcher das Paar  $V$  gehört, eine zweite Ebene, so ist das Paar  $V$  dem Sinus der Neigung ( $\eta$ ) dieser Ebene gegen die vorige proportional.

Ist also die Resultante der Richtung und dem Sinne nach gegeben, oder sind die Cosinus  $a, b, c$  nach Größe und Zeichen gegeben, so giebt es zwei entsprechende Stellungen des Systemes, in welchen die Kräfte sich jedesmal durch eine einfache Kraft ersetzen lassen, deren Richtungslinien mithin durch die Ellipse und die Hyperbel gehen. Beide liegen mit dem Centralpuncte in einer und derselben Ebene. Kehrt man die Zeichen von  $a, b, c$  sämmtlich um, so erhält man zwei andere, durch die Ellipse und Hyperbel gehende Resultanten, für welche wieder  $V = 0$  ist, die aber im entgegengesetzten Sinne, in Bezug auf die beide vorigen, wirken. Es giebt also vier einander parallele Resultanten, für

welche  $V=0$  ist. Da man nun leicht sieht, daß sich im Allgemeinen vier Gerade von der Ellipse zur Hyperbel ziehen lassen, die einer gegebenen Geraden parallel sind, und da, nach dem Vorstehenden, jeder dieser vier Geraden, als Resultante, in einem gewissen Sinne genommen, ein verschwindendes Paar zukommt, so folgt: Zu irgend einer die Ellipse und Hyperbel verbindenden Geraden läßt sich immer eine, und im Allgemeinen nur eine: entsprechende Stellung der Kräfte angeben, in welcher sich diese durch eine einzige ersetzen lassen, die in der gegebenen Geraden wirkt.

38. Man stelle sich die Kräfte in einer beliebigen Stellung vor, nehme senkrecht auf der Richtung der Mittelkraft eine beliebige Gerade als Axe, und drehe die Kräfte um diese Axe. Die Mittelkraft oder die ihr parallele, mit dem kleinsten Paare  $V$  verbundene Resultante bleibt während dieser Drehung beständig senkrecht auf der Axe. Man lege eine Ebene senkrecht auf die Axe, durch einen beliebigen Punct, etwa den Centralpunct, und zerlege jede der Kräfte in zwei andere, die eine der Axe, die andere der Ebene parallel. Hierauf projectire man die sämtlichen Angriffspuncte auf die Ebene, und bringe die der Ebene parallelen Componenten jede an der Projection ihres Angriffspunctes in ihrer Richtung und in der entgegengesetzten an, so erhält man ein System von Kräften in dieser Ebene, und ein System von Paaren, deren Ebenen alle der Axe parallel sind. Die Summe aller der Axe parallelen Componenten des Systemes ist offenbar Null, weil die Axe senkrecht auf der Resultante steht; dieselben geben mithin ebenfalls ein der Axe paralleles Paar, welches sich mit allen übrigen Paaren in ein einziges der Axe paralleles Paar zusammensetzen läßt. Ferner geben die sämtlichen Kräfte in der Ebene eine Resultante  $R=1$ , die während der Drehung beständig durch einen festen Mittelpunct  $M$  geht. Man zerlege das der Axe parallele Paar, welches sich offenbar während der Drehung stetig verändert, in ein mit der Resultante



paralleles und in ein darauf senkrecht. Setzt man das der  $R$  parallele Paar mit der durch  $M$  gehende Kraft  $R$  zusammen, so erhält man eine der  $R$  parallele und gleiche Kraft, welche offenbar eine der  $Ag$  parallel durch den Punkt  $M$  gezogene Gerade beständig treffen muß. Dies giebt folgenden Satz:

Werden die Kräfte um eine auf der Richtung der Mittelkraft senkrechte  $Ag$  gedreht, so schneidet die mit dem kleinsten Paare verbundene Resultante, indem sie der Drehung der Kräfte folgt, beständig eine gewisse feste, der Drehungsaxe parallele Gerade, und zwar, wie sich von selbst versteht, immer rechtwinklich. Um diese Gerade zu construiren, projicire man die Angriffspunkte der Kräfte und die Kräfte selbst auf eine gegen die  $Ag$  senkrechte, also der Mittelkraft parallele Ebene, suche den Mittelpunkt aller dieser in einer Ebene befindlichen Kräfte und errichte in denselben ein Loth auf der Ebene, so ist dieses die verlangte Gerade.

Die Formeln für den Mittelpunkt einer beliebigen Anzahl von Kräften in einer Ebene sind in §. 20. gegeben worden. Will man denselben durch Construction finden, so kann man zuerst den Mittelpunkt von zweien der Kräfte nach §. 11. bestimmen, an denselben die Resultante dieser Kräfte anbringen, und diese hierauf mit einer dritten Kraft zusammensetzen, wodurch ein neuer Mittelpunkt erhalten wird, u. s. f. Man kann aber auch sämtliche Kräfte nach zwei Richtungen zerlegen (von denen keine der Mittelkraft parallel sein darf, wenn nicht alle Kräfte einander parallel sind), und die parallelen Componenten an ihren Schwerpunkten vereinigen; so hat man wieder den Fall zweier Kräfte.

Zum Schlusse mögen noch einige Bemerkungen über einen besonderen Fall folgen, der in der Natur vorkommt, nämlich den Fall, in welchem die anfänglich gegebenen, an festbestimmten Punkten des Körpers angebrachten Kräfte in einer einzelnen Kraft und einem Paare bestehen. Derselbe trifft an der Oberfläche der Erde bei Körpern ein, die nicht allein schwer, sondern zu

gleich auch magnetisch sind. Denn der Magnetismus bringt an dem Körper allemal ein Kräftepaar hervor, während die Schwerkkräfte in allen Puncten sich in eine Resultante am Schwerpuncte vereinigen.

Da die Kräfte in einer einzelnen Kraft und einem Paare bestehen, so sind sie alle einer Ebene parallel; das System hat mithin keine Central-Ebene, sondern nur eine Central-Axe. Man sieht ferner leicht ein, daß es auch mit Rücksicht auf die Drehung gestattet ist, das Paar in dem Körper, aber nur parallel mit sich selbst, zu verlegen; man verlege demnach das Paar in dem Körper parallel mit sich selbst so, daß der Arm desselben durch den Angriffspunct der einzelnen Kraft geht; so ist der neue Arm zugleich die Centralaxe des Körpers. Die Central-Axe ist also eine dem Arme des Paares parallele durch den Angriffspunct der einzelnen Kraft gehende Gerade, wie man auch leicht durch die Zusammensetzung der Kräfte nach den allgemeinen Regeln finden kann. An dieser Central-Axe kann nun wieder das Paar, immer parallel mit sich selbst, beliebig verschieben und z. B. so gelegt werden, daß der Angriffspunct einer seiner Kräfte in den Angriffspunct der einzelnen Kraft fällt; alle diese Veränderungen sind auch mit Rücksicht auf die Drehung der Kräfte gleichgültig. Fällt zugleich die Ebene des Paares in die der Central-Axe und der einzelnen Kraft, oder werden die Kräfte durch Drehung in eine dieser Annahme genügende Stellung gebracht, so haben sie in ihrer Ebene einen Mittelpunct, der in dem Umringe des Central-Kreises liegt. Derselbe läßt sich zwar nach den allgemeinen Regeln leicht finden, kann aber auch auf folgende, schon in §. 32. vorgekommene Weise bestimmt werden. Es seien (Fig. 21.)  $C\beta = Bb = q$  die Kräfte des Paares,  $CC' = p$  die einzelne Kraft,  $CB = a$  der Arm des Paares, und der unveränderliche Winkel  $C'C\beta = \gamma$ . Nun denke man sich die Kräfte so gedreht, daß die des Paares in die Verlängerungen seines Armes fallen, also z. B.  $C\beta$  in die Verlängerung von  $BC$  über  $C$ ; so wird die einzelne Kraft durch den Mittelpunct gehen müssen.

Wird also von C aus unter dem Winkel  $BCD = \pi - \gamma$  eine Gerade CD gezogen; so liegt in ihr der Mittelpunkt. Man

nehme nun in dieser Geraden  $CM = \frac{aq}{p}$ , und zwar auf einer bestimmten Seite von C aus, nämlich so, daß das Moment der Kraft CC' in Bezug auf M dem Momente des Paares entgegen wirke; so ist M der gesuchte Mittelpunkt. Denn das Moment von CC' in Bezug auf M ist  $= p \cdot CM \cdot \sin C'CM$ , und das des Paares ist  $= qa \sin \beta CB$ ; es ist aber  $C'CM = \pi - \gamma - C'CB$ , und  $\beta CB = C'CB + \gamma$ ; folglich  $\sin C'CM = \sin \beta CB$ , also  $p \cdot CM = aq$ ; w. z. b. w.

Die Central-Axe eines schweren und magnetischen Körpers läßt sich durch Beobachtung bestimmen, wenn der Schwerpunkt des Körpers und die Richtung der magnetischen Kraft gegeben sind. Wird nämlich der Körper in seinem Schwerpunkte freidrehbar befestigt, so nimmt er eine gewisse Stellung des Gleichgewichtes ein, in welcher das magnetische Paar Null ist. Zieht man nun durch den in genannter Stellung befindlichen Körper eine der Richtung der magnetischen Kraft parallele Gerade; so hat man die Central-Axe, worauf sich auch der Central-Kreis in dem Körper leicht bestimmen läßt. Ueber diesen Gegenstand werden später noch einige Bemerkungen folgen.

## Gleichgewicht biegsamer Systeme.

## Beispielen.

39. Es seien (Fig. 23.) AB, BC, CD, DE, EF gerade Linien von unveränderlichen Längen, welche sich um ihre Endpunkte ohne Hinderniß drehen können, so daß sie ein biegsames Vieleck ABCDEF bilden. An den Punkten A, B ... F seien die Kräfte P, P', ... P'' angebracht, zwischen denen Gleichgewicht bestehe, dessen Bedingungen untersucht werden sollen.

Bei diesem Gleichgewichte werden offenbar die Seiten AB, BC, ... den auf sie einwirkenden äußeren Kräften gewisse Widerstände oder Spannungen entgegensetzen müssen, durch welche allein das Gleichgewicht zu Stande kommt. Man denke sich die Verbindung eines beliebigen Theiles des Vielecks, z. B. CDE, mit dem übrigen Theile, gänzlich aufgehoben, zugleich aber in den Endpunkten C und E die nach CB und EF wirkenden Spannungen als Kräfte angebracht; so ist klar, daß das Gleichgewicht in CDE nicht gestört wird. Betrachtet man also irgend eine einzelne Seite des Vielecks, z. B. CD, so muß an derselben zwischen der Kraft P'', und der nach CB gerichteten Spannung, an C, einerseits, und der Kraft P''', so wie der nach DE gerichteten Spannung, an D, andererseits, Gleichgewicht bestehen; folglich muß die Resultante der beiden erstgenannten Kräfte an C, derjenigen der beiden anderen Kräfte an D, gleich und entgegengerichtet sein. Jede Seite, z. B. CD, wird also, wenn Gleichgewicht besteht, durch zwei gleiche und entgegengerichtete, an den Punkten C und D wirkende Kräfte gezogen, deren zwei gleiche innere Kräfte Gleichgewicht halten müssen, welche die Spannung der Seite CD ausmachen. Man

nenne die Spannungen in AB, BC, CD ..., welche die Punkte A, B, C .. beziehungsweise den Punkten B, C, D zu nähern streben, der Reihe nach  $t, t', t'' \dots$ ; so lassen sich die ihnen gleichen und entgegengerichteten Spannungen, welche die Punkte B, C, D ... der Reihe nach den A, B, C ... zu nähern streben, durch  $-t, -t', -t'' \dots$  bezeichnen; so daß man sich z. B. in der Seite BC an dem Punkte B die Kraft  $+t'$ , an C dagegen  $-t'$  vorzustellen hat.

Es muß nun, wenn Gleichgewicht besteht, die Spannung  $+t$  (an A) der Kraft P Gleichgewicht halten, beide müssen also einander gleich und entgegengesetzt sein. Eben so muß an B zwischen den Spannungen  $-t$  und  $+t'$  und der Kraft P', und an C zwischen  $-t', +t''$  und P'', Gleichgewicht bestehen; u. s. f. an allen Spitzen des Vielecks. Oder, was auf dasselbe hinauskommt, jede der Spannungen  $+t, +t', \dots$  ist der Resultante aller äußeren Kräfte gleich und entgegengesetzt, die von A bis zu dem Anfange der Seite, in welcher die Spannung wirkt, an dem Vielecke angebracht sind. Denn indem z. B. die Spannung  $+t'$  in B den Kräften P' und  $-t$  Gleichgewicht hält, braucht man nur zu bemerken, daß die Kraft  $-t$  keine andere ist, als die Kraft P, deren Angriffspunct von A nach B verlegt werden kann; also ist  $+t'$  mit der Resultante R von P und P' im Gleichgewichte. Da mithin R in der Richtung BC wirken muß, so kann ihr Angriffspunct von B nach C verlegt, oder es kann R anstatt  $-t'$  gesetzt werden; und mithin ist, in C, die Kraft  $+t''$  mit der Resultante von R und P'', oder von P, P', P'', im Gleichgewichte; u. s. f. Folglich muß auch in E die Kraft  $+t^{IV}$  mit der Resultante der Kräfte P, P', .. P<sup>IV</sup> im Gleichgewichte sein, und da  $+t^{IV}$  nichts Anderes ist, als die von dem Angriffspuncte F in ihrer Richtung an E verlegte Kraft P<sup>V</sup>; so muß die Kraft P<sup>V</sup> der Resultante aus allen übrigen äußeren Kräften P, P' ... P<sup>IV</sup>, Gleichgewicht halten.

Sind also die äußeren Kräfte P, P' ..., die an einem biegsamen Vielecke im Gleichgewichte sein sollen, nach Richtungen

und Intensitäten gegeben, so ist das Gleichgewicht, wofern das Vieleck ganz frei beweglich ist, nur dann möglich, wenn die Mittelkraft aus allen diesen äußeren Kräften Null ist. Wenn aber diese Bedingung erfüllt ist, läßt sich allemal eine dem Gleichgewichte zwischen den anzubringenden äußeren Kräften genügende Gestalt und Stellung des Vieleckes angeben. Bezeichnet man, wie gewöhnlich, die Neigungen von  $P, P', \dots$  gegen drei auf einander senkrechte Eben mit  $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \dots; \dots$  und die Neigungen von  $+t, +t', \dots$  gegen die Eben, durch welche zugleich die Richtungen der Seilen  $AB, BC, \dots$  bestimmt werden, mit  $a, b, c; a', b', c'; \dots$ ; so hat man nach dem Vorhergehenden folgende Gleichungen:

$$P \cos \alpha + t \cos a = 0$$

$$P' \cos \alpha' - t \cos a + t' \cos a' = 0$$

$$P'' \cos \alpha'' - t' \cos a' + t'' \cos a'' = 0$$

$$P''' \cos \alpha''' - t'' \cos a'' + t''' \cos a''' = 0$$

$$P^{IV} \cos \alpha^{IV} - t''' \cos a''' + t^{IV} \cos a^{IV} = 0$$

$$P \cos \beta + t \cos b = 0$$

$$P' \cos \beta' - t \cos b + t' \cos b' = 0$$

$$P'' \cos \beta'' - t' \cos b' + t'' \cos b'' = 0$$

$$P''' \cos \beta''' - t'' \cos b'' + t''' \cos b''' = 0$$

$$P^{IV} \cos \beta^{IV} - t''' \cos b''' + t^{IV} \cos b^{IV} = 0$$

$$P \cos \gamma + t \cos c = 0$$

$$P' \cos \gamma' - t \cos c + t' \cos c' = 0$$

$$P'' \cos \gamma'' - t' \cos c' + t'' \cos c'' = 0$$

$$P''' \cos \gamma''' - t'' \cos c'' + t''' \cos c''' = 0$$

$$P^{IV} \cos \gamma^{IV} - t''' \cos c''' + t^{IV} \cos c^{IV} = 0$$

1.

Zu diesen kommen noch die Gleichungen  $P^V \cos \alpha^V - t^{IV} \cos \alpha^{IV} = 0$ ,  $P^V \cos \beta^V - t^{IV} \cos \beta^{IV} = 0$ ,  $P^V \cos \gamma^V - t^{IV} \cos \gamma^{IV} = 0$ . Jede derselben ist jedoch nur eine Folge der ihr entsprechenden 5 anderen; denn werden z. B. die 5 ersten addirt, so kommt, weil die Mittelkraft aus allen  $P, P', \dots, P^V$  Null, mithin auch  $\Sigma P \cos \alpha = 0$  ist, unmittelbar  $-P^V \cos \alpha^V + t^{IV} \cos a^{IV} = 0$ ; wie

behauptet wurde. Durch vorstehende Gleichungen werden ersichtbar die sämtlichen Componenten der Spannungen, also die Spannungen selbst, und zugleich die Richtungen der Seiten, vollständig bestimmt. Man erhält z. B.  $P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + t' \cos \dots = 0$ ,  $P \cos \beta + P' \cos \beta' + t' \cos b' = 0$ ,  $P \cos \gamma + P' \cos \gamma' + t' \cos \dots = 0$ , zur Bestimmung von  $t'$ ; u. s. f. für die übrigen.

Ist der Endpunct A des Vieleckes unbeweglich, so drückt  $P$  den Widerstand aus, welchen der Punct A leisten muß, und da dieser Widerstand jede beliebige Richtung und Größe haben kann, so wird auch die Bedingung, daß die Mittelfraft aus allen äußern Kräften, den Widerstand in A mit eingerechnet, Null sein muß, immer von selbst erfüllt, oder das Vieleck, in welchem ein Punct A unbeweglich ist, läßt sich immer in eine Gestalt und Stellung des Gleichgewichtes bringen, welche Kräfte auch an den übrigen Puncten angebracht werden.

Wenn beide Endpunkte unbeweglich sind, so sei  $h$  ihre Entfernung von einander, und  $\lambda, \mu, \nu$  die Steigungen von  $h$  gegen die Axen, ferner  $AB=l, BC=l', \dots$  die Längen der Seiten; alsdann ist die Summe der Projectionen der Seiten auf jede Axe gleich der Projection von  $h$  auf diese Axe, d. h.

$$\sum l \cos \alpha = h \cos \lambda, \sum l \cos \beta = h \cos \mu, \sum l \cos \gamma = h \cos \nu. \quad 2$$

Diese drei Gleichungen müssen mit den Gleichungen 1. verbunden werden, um die sämtlichen Unbekannten  $t, t', \dots \cos \alpha, \cos \alpha', \dots$  zu bestimmen, zu welchen auch die Widerstände  $P$  und  $P'$  in den festen Puncten gehören. Läßt man aus 1. die drei Gleichungen weg, welche den Widerstand  $P$  enthalten, so bleiben, wenn das Vieleck  $n$  Seiten hat,  $3n-3$  von einander unabhängige Gleichungen übrig, zu welchen noch die Gleichungen 2. und die bekannten  $n$  Bedingungen  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ , u. s. w. hinzugefügt werden müssen, um die  $4n$  Unbekannten ( $t, t', \dots, \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \dots$ ) zu bestimmen.

Ist das Vieleck in sich geschlossen, so beruht die Bestimmung seiner Gestalt und der Spannungen seiner Seiten im

mer auf dem nämlichen Satze, wie vorhin, daß jede äußere Kraft mit den in ihrem Angriffspuncte wirkenden Spannungen im Gleichgewichte sein muß. Die Anwendung dieses Satzes giebt, für ein  $n$  Eck,  $3n$  der obigen 1. ähnliche Gleichungen zwischen den Componenten der Kräfte  $P, P', \dots$  und der Spannungen  $t, t', \dots$ , von denen aber 3 aus den übrigen folgen. Ferner erhält<sup>m</sup> man 3 Gleichungen, indem man (in 2.)  $h=0$  setzt, und hat noch die  $n$  Bedingungen  $\cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2 = 1$ , u. s. w.; also im Ganzen  $4n$  von einander unabhängige Gleichungen zwischen eben so vielen unbekannten Größen, nämlich den  $n$  Spannungen  $t, t', \dots$  und den  $3n$  Cosinus von  $a, b, c, a', b', c' \dots$ , durch welche die Richtungen der Seiten bestimmt werden.

Es sei z. B. ein Viereck vorgelegt, an dessen Spitzen A, B, C, D die Kräfte  $P, P', P'', P'''$  wirken (Fig. 24.). Heißen die Seiten AB, BC, CD, DE, der Reihe nach  $l, l', l'', l'''$  und ihre Spannungen  $t, t', t'', t'''$ , so hat man folgende Gleichungen:

$$P \cos \alpha + t \cos a - t'' \cos a'' = 0$$

$$P' \cos \alpha' + t' \cos a' - t \cos a = 0$$

$$P'' \cos \alpha'' + t'' \cos a'' - t' \cos a' = 0.$$

Die vierte Gleichung, nämlich  $P''' \cos \alpha''' + t''' \cos a''' - t'' \cos a'' = 0$  ist eine Folge dieser drei, weil  $\sum P \cos \alpha = 0$ . Vertauscht man in den vorstehenden Ausdrücken  $\alpha, a$ , mit  $\beta, b$ , und mit  $\gamma, c$ , so erhält man noch 6 andere Gleichungen. Ferner ist

$$\sum l \cos a = 0, \sum l \cos b = 0, \sum l \cos c = 0,$$

und  $\cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2 = 1$ , u. s. w.

also ergeben sich im Ganzen 16 Gleichungen zur Bestimmung der 4 Spannungen und der 12 Cosinus von  $a, b, c, a' \dots$

Anmerkung! Man kann auch annehmen, daß die Längen der Seiten des Vieleckes ABCD ... (Fig. 23.) nicht unveränderlich sind, sondern daß eine solche Seite, wenn sie in ihren Endpuncten von zwei gleichen und entgegengerichteten Kräften nach außen oder nach innen gezogen wird, sich verlängert oder ver-



kürzt, indem zugleich die Spannung beständig wächst, bis sie den äußeren Kräften gleich wird und Gleichgewicht eintritt. Es ist klar, daß die Ausdehnung durch die Spannung bedingt sein muß: am einfachsten wird sie derselben proportional gesetzt, und diese Annahme ist auch mit der Erfahrung verträglich, so lange wenigstens die Spannung gewisse Grenzen nicht überschreitet. Wenn nun an dem ausdehnbaren Vieleck das Gleichgewicht besteht, so kann man die Seiten als unveränderlich betrachten, und mithin gelten die oben entwickelten Gleichungen auch für ein ausdehnbares Vieleck, wofern man nur in ihnen nicht die ursprünglichen, sondern die durch die Spannungen geänderten Seitenlängen in Rechnung bringt. Ist  $L$  die ursprüngliche Länge einer Seite, und  $l$  die durch die Spannung geänderte, so hat man, nach der obigen Annahme,  $l = L(1 + \gamma t)$ , wo  $\gamma$  ein constanten Coefficient ist. Dieser Werth von  $l$ , und eben so die Werthe  $L'(1 + \gamma t')$ ,  $L''(1 + \gamma t'')$ , .. von  $l'$ ,  $l''$ , ... müssen in die obigen Gleichungen 2. gesetzt werden; dadurch erhält man in allen Fällen eben so viele Gleichungen zwischen eben so vielen Unbekannten wie vorhin. Ist das Vieleck ganz frei und nicht geschlossen, so lassen sich die Verlängerungen seiner Seiten finden, wenn die Spannungen aus den Gleichungen 1. bestimmt sind.

Im Folgenden soll aber, der Einfachheit wegen, die Ausdehnbarkeit bei Seite gesetzt werden, wofern nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt wird.

40. Wenn die Kraft  $P$  den Winkel zwischen den in ihrem Angriffspuncte zusammenstoßenden Seiten  $l$  und  $l'$  halbiert, so müssen auch die Spannungen  $t$  und  $t'$  in diesen Seiten einander gleich sein, weil ihre Resultante der  $P$  Gleichgewicht hält. Es sei  $u$  der Winkel zwischen den Schenkeln  $l$  und  $l'$ , so ist  $P = 2t \cos \frac{1}{2}u$ . Sind nun die Seiten  $l$  und  $l'$  einander gleich, und bezeichnet man mit  $r$  den Halbmesser des Kreises, der sich um das durch die Seiten  $l$ ,  $l'$ , mit dem eingeschlossenen Winkel  $u$  bestimmte Dreieck beschreiben läßt, so ist  $2r \cos \frac{1}{2}u = l$ ; mit

hin  $Pr = tl$ . Werden alle Winkel des Vielecks durch die angebrachten Kräfte halbiert, so ist auch die Spannung überall gleich; und sind alle Seiten einander gleich, so ist das Product  $Pr$  für alle Spitzen des Vielecks von gleichem Werthe, nämlich gleich  $tl$ .

Man denke sich ein biegsames Seil über eine Fläche gespannt, z. B. etwa in dem einen Endpunkte auf der Fläche befestigt, und in dem andern eine spannende Kraft angebracht. Der Druck, welchen das Seil in jedem Punkte auf die Fläche ausübt, muß mit dem Widerstand der Fläche im Gleichgewicht, also nach der Normale der Fläche gerichtet sein. Dieser Druck ist aber die Resultante der Spannungen, die in zwei unendlich kleinen auf einander folgenden Elementen des Seiles an dem gemeinsamen Endpunkte derselben wirken, und liegt mithin in der Ebene dieser Elemente oder in der Ebene des Krümmungskreises; und da er zugleich auf der Curve normal ist, so fällt er in die Richtung des Krümmungshalbmessers. Das biegsame Seil muß also auf der Fläche eine solche Lage annehmen, daß der Krümmungshalbmesser seiner Curve in die Normale der Fläche fällt. Diese Curve kann die kürzeste zwischen ihren Endpunkten auf der Fläche sein (vgl. I. §. 159.); sie ist es aber nicht nothwendig. Z. B. auf einer Kugel muß ein gespannter Faden, zwischen zwei gegebenen Endpunkten, wenn weiter keine äußeren Kräfte auf ihn wirken, in dem Bogen eines größten Kreises liegen; ist nun der von dem Faden gebildete Bogen kleiner als die Hälfte des größten Kreises, so ist er der kürzeste auf der Kugel, zwischen seinen Endpunkten; er ist dies aber nicht, wenn er größer ist als der Halbkreis, und es versteht sich von selbst, daß alsdann seine Länge auch kein Maximum sein kann, da eine unbedingt längste Linie zwischen zwei Punkten auf einer Fläche, widersinnig wäre. Ob die Länge eines gespannten Fadens ein Minimum ist oder nicht, kann im Allgemeinen, nach den Regeln der Variations-Rechnung, nur durch die Untersuchung der Variationen zweiter Ordnung entschieden werden.

Da der Widerstand der Fläche in jedem Punkte senkrecht auf der Curve steht, so halbirte er den Winkel zwischen zwei an einander folgenden Elementen der Curve, und folglich ist die Spannung der Curve überall gleich. Theilt man die Curve in unendlich kleine gleiche Elemente  $ds$ , so gilt die obige Gleichung  $Pr = tl$  auch für den über die Fläche gespannten Faden, wenn  $l = ds$  gesetzt wird. Der Druck  $P$  ist also in jedem Punkte der unveränderlichen Spannung  $t$  und der Krümmung des Fadens  $\left(\frac{1}{r}\right)$  proportional.

Wenn der Angriffspunkt einer Kraft (er heiße  $B$ ) an dem Seile hin und her gleiten kann, so muß derselbe, damit Gleichgewicht bestehe, eine solche Stellung einnehmen, daß die Richtung der Kraft den Winkel der anstößenden Seiten (sie mögen  $AB$ ,  $BC$  heißen) halbiere. Denn wenn Gleichgewicht besteht, so kann man sich, ohne dasselbe zu stören, die Punkte  $A$  und  $C$  als unbeweglich denken; alsdann kann, weil die Summe der Seiten  $(AB + BC)$  unveränderlich ist, der Angriffspunkt sich nur noch auf einer Ellipse bewegen, welche die Punkte  $A$  und  $C$  zu Brennpunkten hat, und die Kraft muß demnach auf der Ellipse normal sein, also, nach einem bekannten geometrischen Satze, den Winkel  $ABC$  halbiren; w. z. b. w. Alsdann sind mithin auch die Spannungen der Seiten  $AB$ ,  $BC$  einander gleich.

41. Als ein Beispiel zur Theorie des Seilpolygons, welches sich mit einem geringen Aufwande von Rechnung durchführen läßt, diene folgende Aufgabe:

An der festen lothrechten Stange  $cb$  (Fig. 25.) ist in  $c$  eine Schnur  $cdQ$  befestigt, deren Ende mit dem Gewichte  $Q$  belastet, auf der schiefen Ebene  $ae$  ruht, und welche noch im Punkte  $d$  durch ein angehängtes Gewicht  $P$  gespannt wird. Welche Stellung nimmt die Schnur im Zustande des Gleichgewichtes an, und wie groß sind die Spannungen in ihren beiden Theilen  $cd$  und  $Qd$ ?

Man fälle aus  $c$  das Loth  $ck$  auf  $ae$ ; seine Länge läßt sich als gegeben ansehen, und sei  $k$ . Ferner sei Winkel  $eab = \alpha$  die Neigung der schiefen Ebene gegen die wagerechte  $ab$ , mithin auch  $eck = \alpha$ . Man verlängere  $Qd$  bis  $f$ ; es sei der unbekannte Winkel  $dQe = x$ , und  $cdf = y$ ; ferner sei  $dQ = b$ ,  $dc = c$  gegeben. Projicirt man  $Qdc$  auf  $ck$ , so kommt

$$b \sin x + c \sin(x+y) = k. \quad 1.$$

Es sei noch  $\Theta$  die Spannung in  $Qd$ ,  $t$  die Spannung in  $dc$ ; so müssen erstens die drei Kräfte  $\Theta$ ,  $t$  und  $P$  an  $d$  einander Gleichgewicht halten, woraus sich ergibt:

$$\Theta \sin(x+\alpha) + P = t \sin(x+y+\alpha). \quad 2.$$

$$\Theta \cos(x+\alpha) = t \cos(x+y+\alpha). \quad 3.$$

Zerlegt man ferner das Gewicht  $Q$  und die Spannung  $\Theta$  nach der Richtung  $ae$  und nach einer auf  $ae$  senkrechten, so müssen die der schiefen Ebene parallelen Componenten einander Gleichgewicht halten. Diese Componenten sind  $Q \sin \alpha$  und  $\Theta \cos x$ ; mithin erhält man

$$Q \sin \alpha = \Theta \cos x. \quad 4.$$

Aus diesen vier Gleichungen sind die vier Unbekannten  $t$ ,  $\Theta$ ,  $x$ ,  $y$  zu bestimmen.

Man setze zur Abkürzung  $x+y=z$ , und eliminire  $t$  aus den Gleichungen 2. 3., so kommt  $-\Theta \sin y + P \cos(z+\alpha) = 0$ ; und mithin durch Elimination von  $\Theta$  aus 4.:

$$\frac{\cos x}{\sin y} = \frac{Q \sin \alpha}{P \cos(z+\alpha)},$$

oder  $P = Q \sin \alpha \cdot q$  gesetzt,

$$q \cos x \cos(z+\alpha) = \sin(z-x),$$

oder  $q \cos \alpha \cos z - q \sin \alpha \sin z = \sin z - \cos z \operatorname{tg} x$ , oder

$$(1+q \sin \alpha) \operatorname{tg} z = q \cos \alpha + \operatorname{tg} x. \quad 5.$$

Die Gleichung 5. muß, verbunden mit der Gleichung 1., nämlich

$$b \sin x + c \sin z = k \quad 6.$$

die gesuchten Werthe von  $x$  und  $z$  liefern. Man könnte zwar eine dieser Größen, z. B.  $x$  aus beiden Gleichungen eliminiren; allein es ist besser, beide in der gegebenen Form beizubehalten. Zur fernerer Auflösung ist dann die Bemerkung dienlich, daß der Winkel  $dce = \frac{\pi}{2} - z - \alpha$  offenbar zwischen Null und dem Winkel  $\varepsilon$  enthalten sein muß, welchen die Schnur bei  $c$  mit  $cb$  bilden würde, wenn sie nur durch das Gewicht  $Q$  gespannt, also  $P=0$  wäre. Da nun  $c+b$  die Länge der ganzen Schnur, und  $\angle dck$  in diesem Falle gleich  $\varepsilon + \alpha$  ist, so hat man

$$\cos(\varepsilon + \alpha) = \frac{k}{c+b},$$

woraus der Werth von  $\varepsilon$  sich ergibt. Demnach ist  $\frac{\pi}{2} - z - \alpha > 0$  und  $< \varepsilon$ , und mithin sind  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  und  $\frac{\pi}{2} - \alpha - \varepsilon$  zwei vorläufige Grenzen, zwischen denen  $z$  liegen muß.

Es sei z. B.  $P=1$ ,  $Q=1$ ,  $\alpha=45^\circ$ ,  $b=c=k=1$ . In diesem Falle erhält man  $\cos(\alpha + \varepsilon) = \frac{1}{2}$ , also  $\alpha + \varepsilon = 60^\circ$ ,  $\varepsilon = 15^\circ$ . Der gesuchte Winkel  $z$  liegt also zwischen  $30^\circ$  und  $45^\circ$ . Man findet noch  $q = \sqrt{2}$ , und mithin aus 5. und 6. folgende Gleichungen:

$$\sin x + \sin z = 1 \quad \text{und} \quad 2 \operatorname{tg} z = 1 + \operatorname{tg} x.$$

Man setze  $\sin x + \sin z - 1 = u$ , nehme einige Werthe von  $z$  zwischen  $30^\circ$  und  $45^\circ$  an, und berechne zu jedem aus der zweiten Gleichung das zugehörige  $x$  und dann  $u$ . Hieraus ergibt sich folgende Tafel:

z.	x.	u.
45°	45°	+0,414 ..
40°	34°5'	+0,202 ...
35°	21°50'	-0,055 ...

Setzt man noch  $z=36^\circ$  ein, so ergibt sich

$$x = 24^\circ 22' 27'', \quad u = +0,0004796 \dots;$$

mithin liegt  $z$  zwischen  $35^\circ$  und  $36^\circ$ .

Man erhält

$$\text{für } z=35^{\circ} 59' 30'', \quad x=24^{\circ} 21' 10'', \quad u=+0,0000214$$

$$\text{für } z=35^{\circ} 59' 29'', \quad x=24^{\circ} 21' 7'', \quad u=-0,0000157,$$

und hieraus durch Interpolation:

$$z=35^{\circ} 59' 29'',4; \quad x=24^{\circ} 21' 8'',2; \quad y=z-x=11^{\circ} 38' 21'',2.$$

Die Spannungen sind:

$$\Theta=0,77680, \quad t=1,74871.$$

### Kettenlinie.

42. Wenn die an einem Seilpolygone wirkenden Kräfte alle einander parallel sind, so ist leicht einzusehen, daß das Polygon eben werden muß. Ein frei herabhängender schwerer Faden wird daher eine ebene Curve bilden, die man Kettenlinie nennt. Es sei ABD diese Curve (Fig. 25.), A und B die festen Endpunkte des Fadens. Man nehme den tiefsten Punkt D der Curve zum Anfange der Coordinaten, DE=x vertical, EC=y horizontal. Es sei t die Spannung in C, aufwärts ziehend gedacht,  $\varphi$  der Winkel, welchen sie mit der Axe der x bildet, also  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$ , ds das Bogenelement der Curve, Pds das Gewicht desselben,  $\pi$  und  $\pi'$  die Widerstände in A und B, welche mit der Axe x die Winkel  $\varepsilon$  und  $\varepsilon'$  bilden; ferner Bogen DC=s, DA= $\lambda$ ; so ist t die Resultante von  $\pi$  und dem Gewichte des Bogens AC, d. i.  $\int_0^\lambda Pds$ ; mithin die verticale Componente von t

$$t \cos \varphi = \pi \cos \varepsilon - \int_0^\lambda Pds,$$

und die horizontale Componente  $t \sin \varphi = \pi \sin \varepsilon$ . Ferner hat man noch

$$\pi \cos \varepsilon + \pi' \cos \varepsilon' - \int Pds = 0,$$

wo das Integral  $\int Pds$  das ganze Gewicht des Fadens ADB

ausdrückt, und zugleich

$$\pi \sin s + \pi' \sin s' = 0,$$

weil die Mittelkraft aus  $\pi$ ,  $\pi'$  und dem Gewichte des Fadens Null sein muß.

Nennt man  $\Theta$  die Spannung im tiefsten Punkte, für welchen  $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ,  $s = 0$ , so ergibt sich aus den beiden ersten Gleichungen:

$$0 = \pi \cos s - \int_0^s P ds \quad \text{und} \quad \Theta = \pi \sin s;$$

$$\text{also allgemein} \quad t \cos \varphi = \int_0^s P ds \quad \text{und} \quad t \sin \varphi = \Theta.$$

Die horizontale Spannung ist demnach überall gleich  $\Theta$ , die verticale Spannung  $t \cos \varphi$  in C ist aber gleich dem Integrale  $\int_0^s P ds$ , d. h. dem Gewichte des Bogens CD.

Ist der Faden überall gleichförmig, so nehme man das Gewicht seiner Längeneinheit als Einheit der Gewichte und mithin der Kräfte an; alsdann wird  $P = 1$ , und mithin

$$t \cos \varphi = s \quad \text{und} \quad t \sin \varphi = \Theta;$$

woraus durch Elimination von  $t$ , weil  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$ , folgt:

$$s dy = \Theta dx, \quad a)$$

in welcher Gleichung die positive Zahl  $\Theta$  die Länge eines Fadens von der Art des vorgelegten ausdrückt, dessen Gewicht das Maß der horizontalen Spannung ist.

Wird diese Gleichung quadriert und  $dy^2 = ds^2 - dx^2$  gesetzt, so kommt

$$s^2(ds^2 - dx^2) = \Theta^2 dx^2,$$

mithin

$$s^2 ds^2 = (s^2 + \Theta^2) dx^2$$

und

$$\frac{s ds}{\sqrt{s^2 + \Theta^2}} = dx,$$

wo die Quadratwurzel mit positivem Zeichen genommen ist, weil  $x$  und  $s$  zugleich wachsen. Durch Integration ergibt sich

$$x + k = \sqrt{s^2 + \Theta^2},$$

und weil für  $x=0$ ,  $s=0$  wird,  $k=\Theta$ , also

$$x + \Theta = \sqrt{s^2 + \Theta^2}. \quad b)$$

Wird ferner der Werth von  $dx$  durch  $s$  ausgedrückt in die Gleichung  $s dy = \Theta dx$  gesetzt, so kommt:

$$dy = \frac{\Theta ds}{\sqrt{s^2 + \Theta^2}}; \quad c)$$

folglich 
$$y = \Theta \log \frac{s + \sqrt{s^2 + \Theta^2}}{\Theta},$$

da für  $s=0$ ,  $y=0$  werden muß. Für die letztere Gleichung läßt sich auch schreiben:

$$y = -\Theta \log \frac{\sqrt{s^2 + \Theta^2} - s}{\Theta};$$

mithin ist

$$\Theta \cdot e^{\frac{y}{\Theta}} = \sqrt{s^2 + \Theta^2} + s \quad \text{und} \quad \Theta \cdot e^{-\frac{y}{\Theta}} = \sqrt{s^2 + \Theta^2} - s;$$

folglich, weil 
$$\sqrt{s^2 + \Theta^2} = x + \Theta,$$

$$\frac{1}{2} \Theta \left[ e^{\frac{y}{\Theta}} + e^{-\frac{y}{\Theta}} \right] = x + \Theta \quad d)$$

und 
$$\frac{1}{2} \Theta \left[ e^{\frac{y}{\Theta}} - e^{-\frac{y}{\Theta}} \right] = s. \quad e)$$

Die erste der beiden vorstehenden Gleichungen liefert die Gleichung der Kettenlinie zwischen den Coordinaten  $x$  und  $y$ .

Es seien  $DF=a$ ,  $FA=b$  die Coordinaten von A, ferner  $DG=a'$ ,  $GB=b'$  die Coordinaten von B (man bemerke, daß  $b'$  negativ sein muß, wenn  $b$  positiv ist), ferner Bogen  $DA=\lambda$ ,  $DB=L-\lambda$ ,  $L$  die ganze Länge des Fadens, so hat man zwischen diesen Größen und  $\Theta$  aus d) u. e) folgende Gleichungen:



$$\frac{1}{2}\Theta \left[ e^{\frac{b}{\Theta}} + e^{-\frac{b}{\Theta}} \right] = a + \Theta.$$

$$\frac{1}{2}\Theta \left[ e^{\frac{b'}{\Theta}} + e^{-\frac{b'}{\Theta}} \right] = a' + \Theta.$$

$$\frac{1}{2}\Theta \left[ e^{\frac{b}{\Theta}} - e^{-\frac{b}{\Theta}} \right] = \lambda.$$

$$\frac{1}{2}\Theta \left[ e^{-\frac{b}{\Theta}} - e^{\frac{b}{\Theta}} \right] = L - \lambda.$$

Sind nun die beiden Endpunkte der Lage nach gegeben, und die Länge des Fadens  $L$  ebenfalls, so sind noch  $a - a' = A$ ,  $b - b' = B$  bekannte Größen. Demnach sind zwischen den 6 Unbekannten  $a, b, a', b', \lambda, \Theta$ , 6 Gleichungen gegeben, welche sich durch Elimination von  $a', b'$ , zunächst auf folgende vier bringen lassen:

$$\frac{1}{2}\Theta \left[ e^{\frac{b}{\Theta}} + e^{-\frac{b}{\Theta}} \right] = a + \Theta.$$

$$\frac{1}{2}\Theta \left[ e^{\frac{B-b}{\Theta}} + e^{-\frac{B-b}{\Theta}} \right] = a + \Theta - A.$$

$$\frac{1}{2}\Theta \left[ e^{\frac{b}{\Theta}} - e^{-\frac{b}{\Theta}} \right] = \lambda.$$

$$\frac{1}{2}\Theta \left[ e^{\frac{B-b}{\Theta}} - e^{-\frac{B-b}{\Theta}} \right] = L - \lambda.$$

Werden noch  $a$  und  $\lambda$  aus diesen Gleichungen eliminiert, so erhält man folgende zwei Gleichungen zwischen  $b$  und  $\Theta$ , nämlich:

$$\frac{1}{2}\Theta \left[ e^{\frac{b}{\Theta}} - e^{-\frac{b}{\Theta}} \right] = A + \frac{1}{2}\Theta \left[ e^{\frac{B-b}{\Theta}} + e^{-\frac{B-b}{\Theta}} \right]$$

$$\frac{1}{2}\Theta \left[ e^{\frac{b}{\Theta}} - e^{-\frac{b}{\Theta}} + e^{\frac{B-b}{\Theta}} - e^{-\frac{B-b}{\Theta}} \right] = L.$$

Man setze  $e^{\frac{b}{\Theta}} = z$ , so gehen diese Gleichungen in folgende über:

$$\frac{1}{2}\Theta \left[ z + \frac{1}{z} - \frac{e^{\frac{B}{\Theta}}}{z} - e^{-\frac{B}{\Theta}} \cdot z \right] = A.$$

$$\frac{1}{2}\Theta \left[ z - \frac{1}{z} + \frac{e^{\frac{B}{\theta}}}{z} - e^{-\frac{B}{\theta}} \cdot z \right] = L.$$

Werden diese beiden Gleichungen addirt, und noch zur Abkürzung  $e^{\frac{B}{2\theta}} = u$ , also  $e^{\frac{B}{\theta}} = u^2$  gesetzt, so kommt:

$$\Theta z \left( 1 - \frac{1}{u^2} \right) = A + L;$$

und werden jene subtrahirt, so kommt

$$\frac{\Theta}{z} (1 - u^2) = A - L.$$

Multiplcirt man diese beiden Gleichungen in einander, so ergibt sich

$$\Theta^2 \left( 2 - u^2 - \frac{1}{u^2} \right) = A^2 - L^2,$$

oder 
$$\Theta^2 \left( u - \frac{1}{u} \right)^2 = L^2 - A^2,$$

mithin durch Ausziehung der Wurzel:

$$\Theta \left( e^{\frac{B}{2\theta}} - e^{-\frac{B}{2\theta}} \right) = \sqrt{L^2 - A^2},$$

wo die Wurzelgröße positiv zu nehmen ist, weil, indem  $\Theta$  und  $B$  positiv sind, die Größe links nur einen positiven Werth haben kann, wie leicht zu sehen ist. Aus dieser Gleichung muß die unbekannte Spannung  $\Theta$  gefunden werden. Um dieselbe in eine für die Auflösung durch Versuche mehr geeignete Form zu bringen, bestimme man einen spitzen Winkel  $\mu$  durch die Gleichung

$$2\theta = \sqrt{L^2 - A^2} \cdot \operatorname{tg} \mu, \text{ und setze } B = \beta \sqrt{L^2 - A^2};$$

so kommt

$$e^{\beta \operatorname{ctg} \mu} - e^{-\beta \operatorname{ctg} \mu} = 2 \operatorname{ctg} \mu.$$

Nun ist  $(e^{\beta \operatorname{ctg} \mu} + e^{-\beta \operatorname{ctg} \mu})^2 - (e^{\beta \operatorname{ctg} \mu} - e^{-\beta \operatorname{ctg} \mu})^2 = 4;$

daher folgt:

$$e^{\beta \cotg \mu} + e^{-\beta \cotg \mu} = 2\sqrt{1 + \cotg^2 \mu} = \frac{2}{\sin \mu},$$

in welcher das positive Wurzelzeichen gewählt werden muß, weil der Ausdruck links nur positive Werthe haben kann. Werden die beiden vorstehenden Gleichungen addirt, so kommt

$$e^{\beta \cotg \mu} = \cotg \mu + \frac{1}{\sin \mu} = \frac{1 + \cos \mu}{\sin \mu} = \cotg \frac{1}{2}\mu;$$

mithin ist  $\beta \cotg \mu = \log \text{nat} \cotg \frac{1}{2}\mu$ , oder

$$\lg \mu \cdot \log \text{nat} \cotg \frac{1}{2}\mu = \frac{B}{\sqrt{L^2 - A^2}}, \quad f)$$

aus welcher Gleichung, da B, L, A bekannt sind, der Winkel  $\mu$  durch Versuche gefunden werden muß, was mit Leichtigkeit geschehen kann. Ist  $\mu$  gefunden, so erhält man zunächst  $\Theta$ ,

sodann  $z = e^{\frac{b}{\Theta}}$ , mithin  $b$ ; und hieraus die übrigen Größen  $a, \lambda, a', \lambda'$ , wodurch die Lage des tiefsten Punctes gegen die festen Endpuncte vollständig bestimmt ist.

Um die Spannung in jedem Puncte zu finden, hat man  $t \cos \varphi = s$ ,  $t \sin \varphi = \Theta$ , also  $t = \sqrt{s^2 + \Theta^2}$ , und weil  $x + \Theta = \sqrt{s^2 + \Theta^2}$ , so kommt

$$t = \sqrt{s^2 + \Theta^2} = x + \Theta, \quad g)$$

wodurch die Spannung in jedem Puncte sehr einfach ausgedrückt ist, sobald  $\Theta$  bekannt ist.

Demnach ist  $dx = dt$ ; wird dieser Werth in die Gleichung a) gesetzt, so kommt

$$s dy = \Theta dt. \quad h)$$

Differentiirt man die Gleichung h), indem man  $t$  als unabhängige Veränderliche betrachtet, so kommt

$$ds dy + s d^2 y = 0. \quad i).$$

Wird zuerst  $s$  aus h) und i) eliminirt, so ergiebt sich

$$ds dy^2 + \Theta dt d^2 y = 0.$$

Nun war, nach c)  $t dy = \Theta ds$  (indem  $t = \sqrt{s^2 + \Theta^2}$ ); also  $dy = \frac{\Theta ds}{t}$ . Wird dieser Werth von  $dy$  in die vorstehende Gleichung gesetzt, so kommt:

$$\Theta \cdot ds^3 + t^2 dt d^2 y = 0,$$

oder 
$$-\frac{ds^3}{d^2 y dt} = \frac{t^2}{\Theta}.$$

Da in dem Ausdrucke auf der linken Seite  $dx$  statt  $dt$  gesetzt werden kann, so giebt derselbe den Krümmungshalbmesser der Kettenlinie an. Wird dieser mit  $\rho$  bezeichnet, so ist in jedem

Puncte  $\rho = \frac{t^2}{\Theta}$ . Für den tiefsten Punct wird  $t = \Theta$ , also auch

$\rho = \Theta$ ; d. h. die Spannung im tiefsten Puncte wird durch das Gewicht eines Fadens gemessen, dessen Länge dem Krümmungshalbmesser in diesem Puncte gleich ist.

Entwickelt man die Exponentialgrößen in der Gleichung (d)

oder 
$$1 + \frac{x}{\Theta} = \frac{1}{2} \left[ e^{\frac{y}{\Theta}} + e^{-\frac{y}{\Theta}} \right]$$

in Reihen, so kommt

$$\frac{x}{\Theta} = \frac{y^2}{2\Theta^2} + \frac{y^4}{4!\Theta^4} + \dots,$$

mithin, wenn für sehr kleine  $y$  rechts nur das erste Glied beibehalten wird,

$$2 \Theta x = y^2,$$

d. h. in der Nähe des Scheitels nähert sich die Kettenlinie einer Parabel, deren Parameter  $\Theta$  ist.

**Bestimmung der Gestalt und Spannung eines biegsamen Fadens, unter beliebigen Kräften.**

43. Wirken auf jeden Punct eines biegsamen Fadens Kräfte, die allgemein als Functionen der Coordinaten ihrer An-

griffspunkte gegeben sein mögen, und besteht Gleichgewicht, so wird dieses nicht gestört, wenn beliebige Theile des Fadens fest werden. Man theile daher den Faden in unendlich kleine Elemente  $ds$ , und betrachte jedes derselben als ein unveränderliches oder festes System; so lassen sich die an ihm wirkenden Kräfte, nach Zerlegung in drei den Axen  $x, y, z$  parallelen Componenten, in drei Resultanten vereinigen. Da immer vorausgesetzt werden kann, daß die an einem Elemente wirkenden parallelen Componenten von einander nur um eine Größe verschieden sind, die im Verhältniß zu der in jedem einzelnen Punkte wirkenden Componente unendlich klein ist, so sind diese parallelen Componenten auch als gleich anzusehen, und geben mithin drei der Länge  $ds$  proportionale Resultanten  $X ds, Y ds, Z ds$ , parallel den Axen  $x, y, z$ . In diesen Ausdrücken bedeutet z. B.  $X$  die Intensität derjenigen Resultante, welche sich ergiebt, wenn an jedem einzelnen der Länge  $ds$  gleichen Elemente der Längeneinheit dieselben der Axe  $x$  parallelen Componenten angebracht werden, welche an dem Fadenelemente wirken. Denn es sei  $ds$  der  $n$ te Theil der Längeneinheit, ( $n$  ist also unendlich groß); so ist  $n \cdot ds = 1$ , und da auf jedes Element die Kraft  $X ds$  wirkt, so wirkt auf alle zusammen die Resultante  $n \cdot X ds = X$ . Die Kräfte  $X ds, Y ds, Z ds$  kann man sich nun in der Mitte des Elementes angebracht denken; es ist aber vielmehr ganz einerlei, an welchem Punkte des Elementes diese Kräfte angebracht werden, da innerhalb desselben überhaupt kein angebbarer Unterschied der Angriffspunkte Statt findet.

Die zur Bestimmung der Gestalt und Spannung des Fadens nöthigen Gleichungen ergeben sich aus dem Satze, daß die Spannung in jedem Elemente der Resultante aus allen Kräften, die vom Anfange des Fadens bis zu diesem Elemente wirken, Gleichgewicht hält. Die Componenten dieser Resultante sind  $\int X ds, \int Y ds, \int Z ds$ ; nennt man nun  $t$  die Spannung, welche in der Richtung der Tangente des Elementes wirkt, so sind  $t \frac{dx}{ds},$

$t \frac{dy}{ds}$ ,  $t \frac{dz}{ds}$  ihre Componenten nach den Azen; und mithin muß sein:

$$t \frac{dx}{ds} + \int X ds = 0, \quad t \frac{dy}{ds} + \int Y ds = 0, \quad t \frac{dz}{ds} + \int Z ds = 0. \quad 1.$$

Werden diese Gleichungen der Reihe nach mit  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  multiplicirt, und die Producte addirt, so kommt

$$t + \frac{dx}{ds} \int X ds + \frac{dy}{ds} \int Y ds + \frac{dz}{ds} \int Z ds = 0. \quad 2.$$

Hieraus ergiebt sich der Werth von  $t$  positiv oder negativ, je nachdem  $t$  in der Richtung des Elementes oder in der Richtung seiner Verlängerung wirkt; also, je nachdem die äußeren Kräfte das Element auszudehnen oder zusammen zu drücken streben.

Dieser Ausdruck für  $t$  ist jedoch nur dann anwendbar, wenn die Gestalt des Fadens, also die Größen  $\frac{dx}{ds}$ ,  $\int X ds$ , u. s. f. schon anderweitig bekannt sind. Im Allgemeinen aber muß man die Gleichungen 1. differentiiren, um die Curve des Fadens zu bestimmen. Man erhält:

$$d\left(t \frac{dx}{ds}\right) + X ds = 0, \quad d\left(t \frac{dy}{ds}\right) + Y ds = 0, \quad d\left(t \frac{dz}{ds}\right) + Z ds = 0. \quad 3.$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , und betrachtet  $ds$  als constantes Differential, setzt also

$$dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z = ds d^2s = 0;$$

so kommt:

$$dt + X dx + Y dy + Z dz = 0. \quad 4.$$

Multipliziert man die erste der Gleichungen 3. mit  $dy$ , die zweite mit  $dx$ , und subtrahirt, so kommt:

$$t(dy d^2x - dx d^2y) = -(X dy - Y dx) ds^2. \quad 5.$$

Multipliziert man auf gleiche Weise zuerst die dritte Gleichung mit  $dx$ , die erste mit  $dz$ ; sodann die zweite mit  $dz$  und die dritte mit  $dy$ , und subtrahirt, wie vorhin, so kommt:

$$\left. \begin{aligned} t(dx d^2z - dz d^2x) &= -(Zdx - Xdz)ds^2 \\ t(dz d^2y - dy d^2z) &= -(Ydz - Zdy)ds^2 \end{aligned} \right\} 5.$$

Von diesen drei Gleichungen 5. ist jede eine Folge der beiden anderen. Man erhält aus ihnen, durch Elimination von  $t$ ,

$$\frac{dy d^2x - dx d^2y}{Xdy - Ydx} = \frac{dx d^2z - dz d^2x}{Zdx - Xdz} = \frac{dz d^2y - dy d^2z}{Ydz - Zdy}, \quad 6.$$

welche Gleichungen jedoch nur für eine gelten.

Um die Bedeutung derselben zu verstehen, bemerke man, daß die Zähler in vorstehenden Ausdrücken sich der Reihe nach verhalten, wie die Cosinus der Neigungen der anschließenden Ebene der Curve gegen die Ebenen  $xy$ ,  $zx$ ,  $xz$  (vgl. §. 70. I.). Oder wenn auf der anschließenden Ebene ein Loth errichtet wird, dessen Neigungen gegen die Axen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  mit  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  bezeichnet werden, so verhalten sich diese Zähler der Reihe nach wie  $\cos \gamma : \cos \beta : \cos \alpha$ ; mithin geben vorstehende Gleichungen die Proportion:

$$\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma = Ydz - Zdy : Zdx - Xdz : Xdy - Ydx,$$

$$\text{woraus folgt: } \cos \alpha \cdot dx + \cos \beta \cdot dy + \cos \gamma \cdot dz = 0$$

$$X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen besagt weiter nichts, als daß das Loth auf der anschließenden Ebene zugleich auf der Tangente senkrecht ist; was sich von selbst versteht. Die zweite Gleichung lehrt, daß die auf das Element  $ds$  wirkende Kraft  $Pds$ , deren Componenten  $Xds$ ,  $Yds$ ,  $Zds$  sind (also  $P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ ) in die anschließende Ebene fallen muß. Denn zerlegt man  $P$  in eine auf der anschließenden Ebene normale und eine dieser parallele Componente, so ist die erstere von beiden offenbar  $= X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma$ , und nach obiger Gleichung, Null. In der That muß die Kraft  $Pds$  mit den Spannungen der beiden in ihrem Angriffspunkte zusammenstoßenden Elemente im Gleichgewichte sein, also in der Ebene derselben, d. h. in der anschließenden Ebene liegen.

Um die noch nöthige zweite Gleichung zu erhalten, suche man den Werth von  $dt$  aus einer der Gleichungen 5. und setze ihn in die Gleichung 4. ein; so ergibt sich eine Differentialgleichung dritter Ordnung. Man hat also zwischen  $x, y, z$  eine Differentialgleichung zweiter, und eine dritter Ordnung, deren Integration fünf willkürliche Constanten herbeiführt. Diese werden, wie leicht zu sehen, völlig bestimmt, wenn z. B. die beiden Endpunkte des Fadens und seine Länge gegeben sind.

Es sei  $\Theta$  die Neigung der Kraft  $Pds = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \cdot ds$  gegen die Tangente der Fadencurve, so ist  $P \cos \Theta$  die tangentielle,  $P \sin \Theta$  die normale Componente von  $P$ . Zerlegt man aber jede der Kräfte  $X, Y, Z$  in eine tangentielle und eine normale Componente, so sind offenbar  $X \frac{dx}{ds}$ ,  $Y \frac{dy}{ds}$ ,  $Z \frac{dz}{ds}$  die tangentialen Componenten, deren Summe mithin  $= P \cos \Theta$  sein muß. Also ist

$$X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} = P \cos \Theta;$$

und mithin, nach 4.

$$dt + P \cos \Theta \cdot ds = 0. \quad 7.$$

Nun ist  $Pds$  die an dem Elemente  $ds$  wirkende Kraft; vorstehende Gleichung besagt mithin nichts Anderes, als daß die Zunahme der Spannung von einem Elemente zum andern mit der tangentialen Componente dieser Kraft im Gleichgewichte ist. In der That hält die Spannung an  $C$ , in dem Elemente  $CD$  (Fig. 23.) der Resultante von  $P, P', P''$  Gleichgewicht. Bezeichnet man daher die in der Richtung  $CB$  wirkende Resultante von  $P$  und  $P'$  für einen Augenblick mit  $R$ , und den Winkel  $\pi - BCD$  mit  $u$ , ferner den Winkel  $\pi - P''CD$  mit  $\Theta$ , und die Spannung in  $CD$ , an  $C$  (wie in §. 39.) mit  $t''$ ; so stellen  $R \cos u$  und  $P'' \cos \Theta$  die nach  $CD$  gerichteten Componenten von  $R$  und  $P''$  dar; mithin ist  $R \cos u + P'' \cos \Theta + t'' = 0$ . Es ist aber



$R = -t'$ , d. h. gleich der Spannung in BC, an C; also  $-t' \cos u + P'' \cos \Theta + t'' = 0$ . Für eine Curve wird der Winkel  $u$  unendlich klein, also  $\cos u = 1$ , und  $t'' - t' \cos u = t'' - t' = dt'$ ; ferner muß auch die Kraft  $P''$  unendlich klein sein, oder  $P'' ds$  anstatt  $P''$  geschrieben werden; also ergibt sich

$$dt' + P'' \cos \Theta \cdot ds = 0,$$

wie vorhin.

Addirt man noch die Quadrate der Gleichungen 5., und bemerkt, daß

$$(dyd^2x - dx d^2y)^2 + (dxd^2z - dz d^2x)^2 + (dz d^2y - dy d^2z)^2 = \frac{ds^6}{\rho^2}$$

wo  $\rho$  den Krümmungshalbmesser bedeutet (vgl. §. 70. I.), so kommt

$$\begin{aligned} \frac{t'^2 \cdot ds^2}{\rho^2} &= (X dy - Y dx)^2 + (Z dx - X dz)^2 + (Y dz - Z dy)^2 \\ &= (X^2 + Y^2 + Z^2) ds^2 - (X dx + Y dy + Z dz)^2 \\ &= P^2 ds^2 - P^2 \cos^2 \Theta ds^2, \end{aligned}$$

oder

$$t = \rho P \sin \Theta. \quad 8.$$

Die Spannung in jedem Punkte ist also dem Produkte aus dem Krümmungshalbmesser in die normale Componente der daselbst wirkenden Kraft ( $P ds$ ) proportional. Um diese Gleichung richtig zu verstehen, muß man bemerken, daß die Zahl  $P$  nicht allein von der Einheit der Kraft, sondern auch von der Einheit der Länge abhängt, wie im Anfange dieses §. in Bezug auf die Componenten  $X, Y, Z$  bemerkt wurde. Wird z. B. die Längeneinheit verdoppelt, so verwandelt sich  $P$  in  $2P$ , dagegen  $\rho$  in  $\frac{1}{2}\rho$ , und mithin bleibt  $t$  unverändert, wie erforderlich ist, da  $t$  nur von der Einheit der Kraft abhängt.

Anmerkung. Für die Kettenlinie war (§. 42.)  $P = 1$ ,  $\Theta$  gleich dem dortigen  $\varphi$ , also  $\sin \Theta = \frac{dy}{ds}$  und mithin, nach vorstehender Gleichung (8.)

$$t = \rho \frac{dy}{ds}.$$

Zugleich aber ist, nach c) und g) in §. 42., wenn noch  $T$  für das dortige  $\Theta$  gesetzt wird,

$$\frac{dy}{ds} = \frac{T}{t};$$

folglich ergibt sich

$$t^2 = T \cdot \rho,$$

wie am Ende von §. 42.

44. Ist der Faden über eine Fläche gespannt, so wirkt auf ein Element  $ds$  außer der äußeren Kraft  $Pds$  noch der Widerstand der Fläche  $Nds$ , dessen Neigungen gegen die Axen  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  seien. Die Gleichungen 3. des vorhergehenden §. gehen daher in folgende über:

$$\left. \begin{aligned} d\left(t \frac{dx}{ds}\right) + N \cos \lambda \, ds + Xds &= 0 \\ d\left(t \frac{dy}{ds}\right) + N \cos \mu \, ds + Yds &= 0 \\ d\left(t \frac{dz}{ds}\right) + N \cos \nu \, ds + Zds &= 0. \end{aligned} \right\} 1.$$

Zugleich ist, da der Widerstand  $Nds$  in die Normale fällt:

$$\cos \lambda \cdot dx + \cos \mu \cdot dy + \cos \nu \cdot dz = 0.$$

Mit Hülfe dieser Relation ergibt sich wie vorhin:

$$dt + Xdx + Ydy + Zdz = 0. \quad 2.$$

Ueberhaupt ist klar, daß die Ergebnisse des vorigen §. sich auf den gegenwärtigen Fall anwenden lassen, wenn man die Resultante von  $P$  und  $N$  an die Stelle von  $P$  setzt. Bei einem freien Faden muß die Kraft  $Pds$  in der anschließenden Ebene liegen; bei dem auf einer Fläche ruhenden Faden muß dasselbe von der Resultante der Kraft  $Pds$  und des Widerstandes  $Nds$  gelten. Wirken keine äußeren Kräfte auf den Faden, oder ist

$X=0$ ,  $Y=0$ ,  $Z=0$ , so muß der normale Widerstand  $N$  in die anschließende Ebene, und mithin in die Richtung des Krümmungshalbmessers der Curve fallen. Zugleich ist alsdann (nach 2.)  $dt=0$ , oder die Spannung constant (vgl. auch §. 40.). Die obigen Gleichungen 1. gehen in diesem Falle in folgende über:

$$t \frac{d^2x}{ds^2} + N \cos \lambda = 0, \quad t \frac{d^2y}{ds^2} + N \cos \mu = 0, \quad t \frac{d^2z}{ds^2} + N \cos \nu = 0,$$

und diese geben, nach Wegschaffung von  $\frac{N}{t}$ , die Proportion

$$\frac{d^2x}{ds^2} : \frac{d^2y}{ds^2} : \frac{d^2z}{ds^2} = \cos \lambda : \cos \mu : \cos \nu, \quad 3.$$

welche in der That nichts Anderes besagt, als daß der Krümmungshalbmesser der Curve in die Normale der Fläche fällt. Um dieses nachzuweisen, gehe man auf §. 70. im ersten Theile zurück, wo von der Bestimmung des Krümmungshalbmessers die Rede ist. Setzt man man in den Formeln 13. dieses §. anstatt  $A^2+B^2+C^2$  seinen Werth  $\frac{ds^6}{\rho^2}$ , so lassen sich diese folgendermaßen schreiben:

$$\frac{x-a}{\rho} = \frac{\rho(Cdy-Bdz)}{ds^4}, \quad \frac{y-b}{\rho} = \frac{\rho(Adz-Cdx)}{ds^4},$$

$$\frac{z-c}{\rho} = \frac{\rho(Bdx-Ady)}{ds^4}.$$

Nun ist aber

$$Cdy-Bdz = (dx d^2y - dy d^2x)dy - (dz d^2x - dx d^2z)dz$$

$$= dx(dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z) - ds^2 d^2x,$$

$$\text{also, weil } dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z = ds d^2s = 0,$$

$$Cdy-Bdz = -ds^2 d^2x$$

$$\text{Eben so ist: } Adz-Cdx = -ds^2 d^2y$$

$$Bdx-Ady = -ds^2 d^2z.$$

Nennt  $\alpha$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  die Neigungen des Krümmungshalbmessers gegen die Axen  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , so ist offenbar

$$\cos s = \frac{x-a}{\rho}, \quad \cos \eta = \frac{y-b}{\rho}, \quad \cos \zeta = \frac{z-c}{\rho};$$

folglich

$$\cos s : \cos \eta : \cos \zeta = \frac{d^2 x}{ds^2} : \frac{d^2 y}{ds^2} : \frac{d^2 z}{ds^2},$$

und also, nach 3.

$$\cos s : \cos \eta : \cos \zeta = \cos \lambda : \cos \mu : \cos \nu; \text{ w. z. b. w.}$$

Es sei  $f(x, y, z) = 0$  die Gleichung der Fläche und durch Differentiation derselben sei gefunden  $dz = p dx + q dy$  (die Bezeichnung ist wie in §. 72. I.); so hat man bekanntlich für die Neigungen der Normale gegen die Axen:

$$\cos \lambda : \cos \mu : \cos \nu = p : q : -1.$$

Also ist nach 3.

$$\frac{d^2 x}{ds^2} : \frac{d^2 y}{ds^2} : \frac{d^2 z}{ds^2} = p : q : -1,$$

oder  $\frac{d^2 x}{ds^2} + p \frac{d^2 z}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2 y}{ds^2} + q \frac{d^2 z}{ds^2} = 0.$

Die zweite dieser Gleichungen ist einerlei mit der, welche in §. 159. I. für die kürzeste Linie entwickelt worden (man sehe §. 40.). Die erste aber ist eine bloße Folge der zweiten; denn multiplicirt man die erste mit  $dx$ , die zweite mit  $dy$ , addirt die Producte, und bemerkt, daß  $p dx + q dy = dz$ , so kommt die Gleichung

$$\frac{dx d^2 x + dy d^2 y + dz d^2 z}{ds^2} = 0,$$

welche schon oben vorausgesetzt ist.

Der Druck des Fadens auf die Fläche ergibt sich sofort, wenn man in der Gleichung 8. des vorigen §.  $N$  statt  $P \sin \Theta$  setzt; nämlich

$$N = \frac{t}{\rho},$$

also der Krümmung  $\left(\frac{1}{\rho}\right)$  proportional, übereinstimmend mit §. 40.

45. Beispiel. Ein gleichförmiger schwerer Faden ABDE (Fig. 27.) sei über einen horizontalen Cylinder gelegt und durch zwei gleiche Gewichte  $Q, Q'$  gespannt. Es ist offenbar, daß der Faden in einer verticalen Ebene liegen wird. Man nehme diese Ebene zu der der  $xz$ , die  $x$  horizontal, die  $z$  vertical und positiv nach oben; der Anfang derselben ist der Mittelpunkt  $c$  des kreisförmigen Querschnittes ADEA, vom Halbmesser  $a$ ; mithin

$$x^2 + z^2 - a^2 = 0$$

die Gleichung der Fadencurve. Man hat nach 1.

$$d\left(t \frac{dx}{ds}\right) + N \cos \lambda ds = 0, \quad d\left(t \frac{dz}{ds}\right) + N \cos \nu ds - P ds = 0,$$

wo  $P ds$  das Gewicht des Fadenelementes ist.

Man setze für einen Punkt B des Fadens  $\angle BCA = \varphi$ , und  $x = a \cos \varphi$ ,  $z = a \sin \varphi$ , so ist  $ds = a d\varphi$ ,  $\frac{dx}{ds} = -\sin \varphi$ ,

$\frac{dz}{ds} = \cos \varphi$ ; ferner  $\cos \lambda = \cos \varphi$ ,  $\cos \nu = \sin \varphi$  (weil  $N ds$  in die Richtung des Halbmessers CB fällt); also

$$-d(t \sin \varphi) + N \cos \varphi ds = 0, \quad d(t \cos \varphi) + N \sin \varphi ds - P ds = 0, \quad 1.$$

oder, weil  $ds = a d\varphi$ :

$$d(t \sin \varphi) = + a N \cos \varphi \cdot d\varphi$$

$$d(t \cos \varphi) = - a N \sin \varphi \cdot d\varphi + a P d\varphi,$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit  $\sin \varphi$ , die zweite mit  $\cos \varphi$ , so kommt durch Addition:

$$dt = a P \cos \varphi \cdot d\varphi,$$

also

$$t = \text{Const.} + a P \sin \varphi,$$

oder, weil für den Punkt A, wo  $\varphi = 0$ , offenbar  $t = Q$  ist,

$$t = Q + a P \sin \varphi.$$

Multipliziert man die erste der obigen Gleichungen mit  $\cos \varphi$ , die zweite mit  $\sin \varphi$ , und subtrahirt, so folgt:

$$t = a N - a P \sin \varphi.$$

Demnach ist der Druck

$$N = \frac{Q + 2aP \sin \varphi}{a}.$$

Berücksichtigt man noch die Reibung des Fadens gegen den Cylinder, so können die beiden Gewichte  $Q$  und  $Q'$ , oder die Spannungen in den vertical gerichteten Elementen  $A$  und  $E$  ungleich sein, ohne daß das Gleichgewicht aufgehoben wird. Es sei z. B. die Spannung  $Q$  in  $A$  etwas größer als die Spannung  $Q'$  in  $B$ , so strebt der Faden in dem Sinne  $EDA$  auf dem Cylinder zu gleiten; dieses aber kann durch Reibung verhindert werden. Man bezeichne dieselbe, für ein Element  $ds$ , mit  $f ds$ , und bemerke, daß sie in dem Sinne von  $t$  (Bt, Fig. 27.) tangential wirkt; daher  $-f \sin \varphi ds$  ihre horizontale,  $+f \cos \varphi ds$  ihre verticale Componente ist. Werden diese in 1. hinzugefügt, so kommt:

$$-d(t \sin \varphi) + N \cos \varphi ds - f \sin \varphi ds = 0$$

$$d(t \cos \varphi) + N \sin \varphi ds + f \cos \varphi ds - P ds = 0$$

$$\text{oder} \quad \left. \begin{aligned} d(t \sin \varphi) &= (N \cos \varphi - f \sin \varphi) a d\varphi \\ d(t \cos \varphi) &= -(N \sin \varphi + f \cos \varphi - P) a d\varphi. \end{aligned} \right\} 2.$$

Hieraus folgt zuerst:

$$dt = (P \cos \varphi - f) a d\varphi, \quad 3.$$

$$\text{ferner:} \quad t = aN - aP \sin \varphi. \quad 4.$$

Die Reibung  $f$  ist, der Erfahrung nach, dem Drucke proportional, also  $f = \mu N$ ,  $\mu$  eine von  $N$  unabhängige, durch Beobachtung zu bestimmende Größe. Die Einsetzung dieses Werthes von  $f$  giebt:

$$dt = (P \cos \varphi - \mu N) a d\varphi. \quad 5.$$

Zugleich aber ist aus 4.  $dt = a dN - aP \cos \varphi d\varphi$ ; folglich

$$dN - P \cos \varphi d\varphi = (P \cos \varphi - \mu N) d\varphi;$$

$$\text{also} \quad dN + \mu N d\varphi = 2P \cos \varphi d\varphi.$$

Diese Gleichung werde mit dem integrierenden Factor  $e^{\mu\varphi}$  multiplicirt (vgl. §. 131. I.); so ergibt sich

$$d(e^{\mu\varphi}N) = 2P \cdot e^{\mu\varphi} \cos \varphi d\varphi.$$

Nun ist  $\int e^{\mu\varphi} \cos \varphi d\varphi = \frac{e^{\mu\varphi}(\sin \varphi + \mu \cos \varphi)}{1 + \mu^2}$

(Dieses Integral folgt leicht aus §. 121. Formel 8. im ersten Theile); also erhält man

$$e^{\mu\varphi}N = \frac{2P \cdot e^{\mu\varphi}(\sin \varphi + \mu \cos \varphi)}{1 + \mu^2} + \text{Const.},$$

oder  $N = c \cdot e^{-\mu\varphi} + \frac{2P(\sin \varphi + \mu \cos \varphi)}{1 + \mu^2}.$

Um die Constante  $c$  zu bestimmen, hat man die Spannung in A, für  $\varphi = 0$ , gleich  $Q$ , also, nach 4., für  $\varphi = 0$ ,  $t = Q$ ,

$$aN = Q;$$

folglich

$$\frac{Q}{a} = c + \frac{2P\mu}{1 + \mu^2}, \quad \text{oder} \quad c = \frac{Q}{a} - \frac{2P\mu}{1 + \mu^2}.$$

Demnach ist

$$N = \left( \frac{Q}{a} - \frac{2P\mu}{1 + \mu^2} \right) e^{-\mu\varphi} + \frac{2P(\sin \varphi + \mu \cos \varphi)}{1 + \mu^2}$$

und zugleich  $t = aN - aP \sin \varphi.$

Für  $\varphi = \pi$  ergeben sich die Spannung  $Q'$  und der Druck  $N'$  in E, nämlich

$$N' = \left( \frac{Q}{a} - \frac{2P\mu}{1 + \mu^2} \right) e^{-\mu\pi} - \frac{2P\mu}{1 + \mu^2}$$

und  $Q' = aN'.$

Es braucht also der Faden in E nur mit dem Gewichte

$$Q' = \left( Q - \frac{2aP\mu}{1 + \mu^2} \right) e^{-\mu\pi} - \frac{2P\mu}{1 + \mu^2}$$

gespannt zu sein, indem dieses mit Hülfe der Reibung der Spannung  $Q$  in A Gleichgewicht zu halten vermag. Setzt man das Gewicht des Fadens Null, also  $P = 0$ , so erhält man  $Q' = Q \cdot e^{-\mu\pi}$ ; durch das eigene Gewicht des Fadens wird

aber der Druck, und mithin die Reibung, verstärkt; also ist der obige Werth von  $Q'$  kleiner als dieser zweite, für  $P=0$ .

### Biegung elastischer Federn, in einer Ebene.

46. Es sei  $AECDEF$  (Fig. 28.) ein biegsames Vieleck, zunächst beliebig im Raume, auf welches in den Spitzen  $A, B, \dots$  äußere Kräfte  $P, P', \dots$  wirken, wie in §. 39. Indem aber durch die Biegung die Endpunkte je zweier auf einander folgender Seiten, wie  $A$  und  $C, B$  und  $D, C$  und  $E, \dots$  einander genähert werden, nehme man an, daß zwischen denselben eine gegenseitige Abstößung eintrete, welche die Seiten in eine einzige gerade Linie zurückzuführen strebe. Es wird also z. B. der Punkt  $D$  von  $B$  mit einer gewissen Kraft  $p$  in der Richtung  $BD$  abgestoßen, und stößt diesen wieder mit der gleichen und entgegengerichteten Kraft  $-p$  ab. Man bringe an  $C$  die Kraft  $p$  in ihrer Richtung und in entgegengesetzter an, so wird nichts geändert; es ergiebt sich aber ein Kräftepaar  $(p, -p)$  an dem Arme  $CD$ , und ein zweites Paar  $(p, -p)$  an  $BC$ ; beide liegen in einer Ebene ( $BCD$ ) und sind dem Sinne nach einander entgegengesetzt. Eben so sei  $q$  die Abstößung zwischen  $C$  und  $E$ , und man bringe in  $D$  die Kraft  $q$  in ihrer Richtung ( $CE$ ) und in entgegengesetzter an; so entsteht wieder ein Kräftepaar  $(q, -q)$  an dem Arme  $CD$ , und ein zweites Paar  $(q, -q)$  an dem Arme  $DE$ . An dem Arme  $CD$  wirken demnach zwei Paare  $(p, -p)$  und  $(q, -q)$ , die sich in ein einziges zusammen setzen lassen. Es seien ferner die Seiten des Vieleckes alle einander gleich, (ihre Länge  $=l$ ); und man nehme an, daß das Moment des Paares  $(p, -p)$  an  $CD$ , welches die Seite  $CD$  in die Verlängerung von  $BC$  zu drehen strebt, dem Biegungswinkel in  $C$ , d. i. dem Nebenwinkel von  $BCD$ , so wie das des Paares  $(q, -q)$ , welches  $CD$  in die Verlängerung von  $ED$  zu drehen strebt, dem Biegungswinkel in  $D$ , d. i.  $\pi - CDE$ , proportional



$$\left. \begin{aligned} t(dx d^2z - dz d^2x) &= -(Zdx - Xdz)ds^2 \\ t(dz d^2y - dy d^2z) &= -(Ydz - Zdy)ds^2 \end{aligned} \right\} 5.$$

Von diesen drei Gleichungen 5. ist jede eine Folge der beiden anderen. Man erhält aus ihnen, durch Elimination von  $t$ ,

$$\frac{dy d^2x - dx d^2y}{Xdy - Ydx} = \frac{dx d^2z - dz d^2x}{Zdx - Xdz} = \frac{dz d^2y - dy d^2z}{Ydz - Zdy}, \quad 6.$$

welche Gleichungen jedoch nur für eine gelten.

Um die Bedeutung derselben zu verstehen, bemerke man, daß die Zähler in vorstehenden Ausdrücken sich der Reihe nach verhalten, wie die Cosinus der Neigungen der anschließenden Ebene der Curve gegen die Ebenen  $xy$ ,  $zx$ ,  $xz$  (vgl. §. 70. I.). Oder wenn auf der anschließenden Ebene ein Loth errichtet wird, dessen Neigungen gegen die Axen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  mit  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  bezeichnet werden, so verhalten sich diese Zähler der Reihe nach wie  $\cos \gamma : \cos \beta : \cos \alpha$ ; mithin geben vorstehende Gleichungen die Proportion:

$$\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma = Ydz - Zdy : Zdx - Xdz : Xdy - Ydx,$$

$$\text{woraus folgt: } \cos \alpha \cdot dx + \cos \beta \cdot dy + \cos \gamma \cdot dz = 0$$

$$X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen besagt weiter nichts, als daß das Loth auf der anschließenden Ebene zugleich auf der Tangente senkrecht ist; was sich von selbst versteht. Die zweite Gleichung lehrt, daß die auf das Element  $ds$  wirkende Kraft  $Pds$ , deren Componenten  $Xds$ ,  $Yds$ ,  $Zds$  sind (also  $P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ ) in die anschließende Ebene fallen muß. Denn zerlegt man  $P$  in eine auf der anschließenden Ebene normale und eine dieser parallele Componente, so ist die erstere von beiden offenbar  $= X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma$ , und nach obiger Gleichung, Null. In der That muß die Kraft  $Pds$  mit den Spannungen der beiden in ihrem Angriffspunkte zusammenstoßenden Elemente im Gleichgewichte sein, also in der Ebene derselben, d. h. in der anschließenden Ebene liegen.

Um die noch nöthige zweite Gleichung zu erhalten, suche man den Werth von  $dt$  aus einer der Gleichungen 5. und setze ihn in die Gleichung 4. ein; so ergibt sich eine Differentialgleichung dritter Ordnung. Man hat also zwischen  $x, y, z$  eine Differentialgleichung zweiter, und eine dritter Ordnung, deren Integration fünf willkürliche Constanten herbeiführt. Diese werden, wie leicht zu sehen, völlig bestimmt, wenn z. B. die beiden Endpunkte des Fadens und seine Länge gegeben sind.

Es sei  $\Theta$  die Neigung der Kraft  $Pds = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \cdot ds$  gegen die Tangente der Fadencurve, so ist  $P \cos \Theta$  die tangentielle,  $P \sin \Theta$  die normale Componente von  $P$ . Zerlegt man aber jede der Kräfte  $X, Y, Z$  in eine tangentielle und eine normale Componente, so sind offenbar  $X \frac{dx}{ds}$ ,  $Y \frac{dy}{ds}$ ,  $Z \frac{dz}{ds}$  die tangentialen Componenten, deren Summe mithin  $= P \cos \Theta$  sein muß. Also ist

$$X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} = P \cos \Theta;$$

und mithin, nach 4.

$$dt + P \cos \Theta \cdot ds = 0. \quad 7.$$

Nun ist  $Pds$  die an dem Elemente  $ds$  wirkende Kraft; vorstehende Gleichung besagt mithin nichts Anderes, als daß die Zunahme der Spannung von einem Elemente zum andern mit der tangentialen Componente dieser Kraft im Gleichgewichte ist. In der That hält die Spannung an  $C$ , in dem Elemente  $CD$  (Fig. 23.) der Resultante von  $P, P', P''$  Gleichgewicht. Bezeichnet man daher die in der Richtung  $CB$  wirkende Resultante von  $P$  und  $P'$  für einen Augenblick mit  $R$ , und den Winkel  $\pi - BCD$  mit  $u$ , ferner den Winkel  $\pi - P''CD$  mit  $\Theta$ , und die Spannung in  $CD$ , an  $C$  (wie in §. 39.) mit  $t''$ ; so stellen  $R \cos u$  und  $P'' \cos \Theta$  die nach  $CD$  gerichteten Componenten von  $R$  und  $P''$  dar; mithin ist  $R \cos u + P'' \cos \Theta + t'' = 0$ . Es ist aber

mithin:

$$\left. \begin{aligned} -t &= \cos u \cdot \Sigma P \cos \alpha + \sin u \cdot \Sigma P \sin \alpha \\ Q &= \sin u \cdot \Sigma P \cos \alpha - \cos u \cdot \Sigma P \sin \alpha. \end{aligned} \right\} 2.$$

Man hat  $Ql = k(\varphi' - \varphi)$ , oder, wenn man auf beiden Seiten mit  $l$  multiplicirt,  $Ql^2 = kl(\varphi' - \varphi)$ . Nun sind, nach der Voraussetzung, alle Seiten des Vielecks einander gleich, und mithin ist das Product  $kl$  constant; man schreibe daher  $k$  statt  $kl$ , wodurch erhalten wird  $Ql^2 = k(\varphi' - \varphi)$ .

Man denke sich anstatt des elastisch biegsamen Vielecks eine stetige Curve, oder eine elastische Feder. Für diese wird

$$l = ds, \quad \operatorname{tg} u = \frac{dy}{dx}, \quad \sin u = \frac{dy}{ds}, \quad \cos u = \frac{dx}{ds};$$

bezeichnen ferner  $Xds$ ,  $Yds$  die Componenten der an einem Elemente wirkenden äußeren Kraft, so ist

$$\Sigma P \cos \alpha = \int Xds, \quad \Sigma P \sin \alpha = \int Yds;$$

und mithin, indem man alle diese Werthe in 2. setzt:

$$\left. \begin{aligned} -t &= \frac{dx}{ds} \int Xds + \frac{dy}{ds} \int Yds \\ Q &= \frac{dy}{ds} \int Xds - \frac{dx}{ds} \int Yds. \end{aligned} \right\} 3.$$

Ferner wird noch  $\varphi$ , d. i. der Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Elementen der Curve gleich  $du$ , mithin  $\varphi' - \varphi = d^2u$ , und folglich

$$Q \cdot ds^2 = k d^2u.$$

Bezeichnet  $\rho$  den Krümmungshalbmesser,  $\lambda$  die Krümmung der Curve, so ist bekanntlich  $\lambda = \frac{1}{\rho}$ , und  $\rho du = ds$ , also

$$du = \lambda ds, \quad d^2u = d\lambda ds; \quad \text{mithin} \quad Q = k \frac{d\lambda}{ds}, \quad \text{und, nach 3.}$$

$$kd\lambda = dy \int Xds - dx \int Yds.$$

47. Man nehme an, daß nur an den Endpunkten A und F der elastischen Feder äußere Kräfte wirken, welche, wie früher

bemerkt worden, einander gleich und entgegengerichtet sein müssen. Die Curve der Feder ist alsdann nothwendig eben. Es sei A der Anfang der Coordinaten, AF die Axe der x, und P die an A angebrachte Kraft, so ist offenbar  $\int X ds = P$ ,  $\int Y ds = 0$ , und mithin wird die vorstehende Gleichung:

$$k d\lambda = P dy,$$

also

$$k\lambda = Py + \text{Const.}$$

Für den Anfang A ist aber nicht allein  $y=0$ , sondern auch nothwendig die Krümmung  $\lambda$  Null, mithin  $\text{Const.} = 0$ . Denn es sei  $AB = ds$  das erste Element der Curve,  $\varepsilon$  seine Neigung gegen das folgende Element BC (also  $\varepsilon$  der Nebenwinkel von ABC), so ist  $\varepsilon = \lambda ds$ , und mithin hat das der Biegung widerstrebende Paar an dem Arme AB, d. i. (Aa, Bb) (Fig. 28, a.) den früheren Annahmen gemäß, das Moment  $\frac{k\varepsilon}{ds}$  oder  $k\lambda$ . Diesem Momente muß offenbar das Moment der Kraft P, in Bezug auf den Punct B, d. i.  $Pdy$ , Gleichgewicht halten; daher muß  $Pdy = k\lambda$ , folglich  $\lambda$  unendlich klein sein, w. z. b. w. (Der Contingenz-Winkel  $\varepsilon = \lambda ds$  ist demnach im Anfange der Curve ein Unendlich-Kleines der zweiten Ordnung). Es ergibt sich also für die gesuchte Gestalt der elastischen Feder folgende Gleichung:

$$k\lambda = Py. \quad 1.$$

Da an jedem Elemente  $ds$  der Curve das Paar  $Qds = k d\lambda$  wirkt, so ist  $\int Qds = k\lambda$  die Summe der Momente aller dieser von A an bis zu irgend einem Puncte der Curve wirkenden Elementar-Paare, welche man das Moment der Elasticität, in Bezug auf Biegung, oder auch das Biegemoment nennt. Die Gleichung 1. drückt demnach aus, daß das Moment der Kraft P, in Bezug auf jeden Punct der Curve, dem Biegemomente in Bezug auf diesen Punct, Gleichgewicht halten muß.

Der Werth der Krümmung  $\lambda$  ist bekanntlich

$$\pm \frac{dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds} \left( \text{vgl. I. §. 48., wo } r = \frac{1}{\lambda} \right);$$

folglich hat man, wenn noch zur Abkürzung  $k = Ph^2$  gesetzt wird, aus 4.

$$\pm \frac{h^2 dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds^3} = y.$$

Es sei  $\frac{dy}{dx} = q$ , so giebt vorstehende Gleichung

$$\pm \frac{h^2 dq}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}} dx} = y,$$

oder, auf beiden Seiten mit  $dy$  multiplicirt:

$$\pm \frac{h^2 q dq}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} = y dy.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$\pm \frac{2h^2}{\sqrt{1+q^2}} = y^2 + \text{Const.},$$

oder weil

$$\frac{1}{\sqrt{1+q^2}} = \frac{\pm dx}{ds},$$

so kommt

$$\pm 2h^2 \frac{dx}{ds} = y^2 + \text{Const.}$$

Für den Punkt A sei  $\frac{dy}{ds} = \text{tg } \mu$ ,  $\frac{dx}{ds} = \cos \mu$ , so wird

$\text{Const.} = \pm 2h^2 \cos \mu$ , und man erhält mithin

$$2h^2 \frac{dx}{ds} = 2h^2 \cos \mu \pm y^2. \quad 2.$$

Hieraus ergibt sich weiter

$$2h^2 \frac{dy}{ds} = \pm \sqrt{4h^4 - (2h^2 \cos \mu \pm y^2)^2}. \quad 3.$$

Setzt man zu Abkürzung

$$\sqrt{4h^4 - (2h^2 \cos \mu \pm y^2)^2} = U,$$

so folgt 
$$dx = \pm \frac{(2h^2 \cos \mu \pm y^2) dy}{U}. \quad 4.$$

$$ds = \pm \frac{2h^2 dy}{U}. \quad 5.$$

Die Gleichung 4. ist die Differentialgleichung der Curve, deren Integration keine neue Constante herbeiführt, weil für  $x=0$ , auch  $y=0$  werden muß. Man sieht aus dieser Gleichung, daß nichts an Allgemeinheit verloren geht, wenn man bloß das eine der vor  $y^2$  stehenden Zeichen in Betracht zieht, und zwei Fälle unterscheidet, je nachdem  $\cos \mu$  positiv oder negativ ist. (Der Fall, in welchem  $\cos \mu = 0$ , braucht nicht besonders hervorgehoben zu werden.) Man setze also:

$$U = \sqrt{4h^4 - (2h^2 \cos \mu + y^2)^2},$$

und

$$\pm U dx = (2h^2 \cos \mu + y^2) dy, \quad \pm U ds = 2h^2 dy.$$

Indem nun  $y$  und  $s$  von Null anfangend wachsen, gilt in den vorstehenden Gleichungen das positive Vorzeichen von  $U$ , bis für den größten Werth von  $y$ , welcher mit  $f$  bezeichnet werde,  $\frac{dy}{dx} = 0$ ,  $U = 0$  wird. Indem alsdann  $y$  wieder von  $+f$  bis  $-f$  abnimmt, gilt das negative Zeichen von  $U$ ; für  $y = -f$  wird  $U$  wieder Null, und wechselt das Zeichen, u. s. f., in's Unendliche. Der Werth von  $f$  ergibt sich aus der Gleichung  $4h^4 = (2h^2 \cos \mu + f^2)^2$ ; man findet

$$|f| = 2h \sin \frac{1}{2}\mu. \quad 6.$$

Es sei (Fig. 29.)  $AB = c$ ,  $BC = f$ , Bogen  $AC = l$ , so hat man:

$$c = \int_0^f \frac{(2h^2 \cos \mu + y^2) dy}{U}. \quad 7.$$

$$l = \int_0^f \frac{2h^2 dy}{U}. \quad 8.$$

$X=0$ ,  $Y=0$ ,  $Z=0$ , so muß der normale Widerstand  $N$  in die anschließende Ebene, und mithin in die Richtung des Krümmungshalbmessers der Curve fallen. Zugleich ist alsdann (nach 2.)  $dt=0$ , oder die Spannung constant (vgl. auch §. 40.). Die obigen Gleichungen 1. gehen in diesem Falle in folgende über:

$$t \frac{d^2x}{ds^2} + N \cos \lambda = 0, \quad t \frac{d^2y}{ds^2} + N \cos \mu = 0, \quad t \frac{d^2z}{ds^2} + N \cos \nu = 0,$$

und diese geben, nach Wegschaffung von  $\frac{N}{t}$ , die Proportion

$$\frac{d^2x}{ds^2} : \frac{d^2y}{ds^2} : \frac{d^2z}{ds^2} = \cos \lambda : \cos \mu : \cos \nu, \quad 3.$$

welche in der That nichts Anderes besagt, als daß der Krümmungshalbmesser der Curve in die Normale der Fläche fällt. Um dieses nachzuweisen, gehe man auf §. 70. im ersten Theile zurück, wo von der Bestimmung des Krümmungshalbmessers die Rede ist. Setzt man man in den Formeln 13. dieses §. anstatt  $A^2+B^2+C^2$  seinen Werth  $\frac{ds^6}{\rho^2}$ , so lassen sich diese folgendermaßen schreiben:

$$\frac{x-a}{\rho} = \frac{\rho (Cdy - Bdz)}{ds^4}, \quad \frac{y-b}{\rho} = \frac{\rho (Adz - Cdx)}{ds^4},$$

$$\frac{z-c}{\rho} = \frac{\rho (Bdx - Ady)}{ds^4}.$$

Nun ist aber

$$Cdy - Bdz = (dx d^2y - dy d^2x)dy - (dz d^2x - dx d^2z)dz$$

$$= dx(dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z) - ds^2 d^2x,$$

$$\text{also, weil } dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z = ds d^2s = 0,$$

$$Cdy - Bdz = -ds^2 d^2x$$

$$\text{Eben so ist: } Adz - Cdx = -ds^2 d^2y$$

$$Bdx - Ady = -ds^2 d^2z.$$

Nennt  $s$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  die Neigungen des Krümmungshalbmessers gegen die Axen  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , so ist offenbar

$$\cos s = \frac{x-a}{\rho}, \quad \cos \eta = \frac{y-b}{\rho}, \quad \cos \zeta = \frac{z-c}{\rho};$$

folglich

$$\cos s : \cos \eta : \cos \zeta = \frac{d^2 x}{ds^2} : \frac{d^2 y}{ds^2} : \frac{d^2 z}{ds^2},$$

und also, nach 3.

$$\cos s : \cos \eta : \cos \zeta = \cos \lambda : \cos \mu : \cos \nu; \text{ w. z. b. w.}$$

Es sei  $f(x, y, z) = 0$  die Gleichung der Fläche und durch Differentiation derselben sei gefunden  $dz = p dx + q dy$  (die Bezeichnung ist wie in §. 72. I.); so hat man bekanntlich für die Neigungen der Normale gegen die Axen:

$$\cos \lambda : \cos \mu : \cos \nu = p : q : -1.$$

Also ist nach 3.

$$\frac{d^2 x}{ds^2} : \frac{d^2 y}{ds^2} : \frac{d^2 z}{ds^2} = p : q : -1,$$

oder 
$$\frac{d^2 x}{ds^2} + p \frac{d^2 z}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2 y}{ds^2} + q \frac{d^2 z}{ds^2} = 0.$$

Die zweite dieser Gleichungen ist einerlei mit der, welche in §. 159. I. für die kürzeste Linie entwickelt worden (man sehe §. 40.). Die erste aber ist eine bloße Folge der zweiten; denn multiplicirt man die erste mit  $dx$ , die zweite mit  $dy$ , addirt die Producte, und bemerkt, daß  $p dx + q dy = dz$ , so kommt die Gleichung

$$\frac{dx d^2 x + dy d^2 y + dz d^2 z}{ds^2} = 0,$$

welche schon oben vorausgesetzt ist.

Der Druck des Fadens auf die Fläche ergibt sich sofort, wenn man in der Gleichung 8. des vorigen §.  $N$  statt  $P \sin \Theta$  setzt; nämlich

$$N = \frac{t}{\rho},$$

also der Krümmung  $\left(\frac{1}{\rho}\right)$  proportional, übereinstimmend mit §. 40.



45. Beispiel. Ein gleichförmiger schwerer Faden ABDE (Fig. 27.) sei über einen horizontalen Cylinder gelegt und durch zwei gleiche Gewichte  $Q, Q'$  gespannt. Es ist offenbar, daß der Faden in einer verticalen Ebene liegen wird. Man nehme diese Ebene zu der der  $xz$ , die  $x$  horizontal, die  $z$  vertical und positiv nach oben; der Anfang derselben ist der Mittelpunkt  $c$  des kreisförmigen Querschnittes ADEA, vom Halbmesser  $a$ ; mithin

$$x^2 + z^2 - a^2 = 0$$

die Gleichung der Fadencurve. Man hat nach 1.

$$d\left(t \frac{dx}{ds}\right) + N \cos \lambda ds = 0, \quad d\left(t \frac{dz}{ds}\right) + N \cos \nu ds - P ds = 0,$$

wo  $P ds$  das Gewicht des Fadenelementes ist.

Man setze für einen Punkt B des Fadens  $\angle BCA = \varphi$ , und  $x = a \cos \varphi$ ,  $z = a \sin \varphi$ , so ist  $ds = a d\varphi$ ,  $\frac{dx}{ds} = -\sin \varphi$ ,

$\frac{dz}{ds} = \cos \varphi$ ; ferner  $\cos \lambda = \cos \varphi$ ,  $\cos \nu = \sin \varphi$  (weil  $N ds$  in die Richtung des Halbmessers CB fällt); also

$$-d(t \sin \varphi) + N \cos \varphi ds = 0, \quad d(t \cos \varphi) + N \sin \varphi ds - P ds = 0, \quad 1.$$

oder, weil  $ds = a d\varphi$ :

$$d(t \sin \varphi) = + a N \cos \varphi \cdot d\varphi$$

$$d(t \cos \varphi) = - a N \sin \varphi \cdot d\varphi + a P d\varphi,$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit  $\sin \varphi$ , die zweite mit  $\cos \varphi$ , so kommt durch Addition:

$$dt = a P \cos \varphi \cdot d\varphi,$$

also

$$t = \text{Const.} + a P \sin \varphi,$$

oder, weil für den Punkt A, wo  $\varphi = 0$ , offenbar  $t = Q$  ist,

$$t = Q + a P \sin \varphi.$$

Multipliziert man die erste der obigen Gleichungen mit  $\cos \varphi$ , die zweite mit  $\sin \varphi$ , und subtrahirt, so folgt:

$$t = a N - a P \sin \varphi.$$

Demnach ist der Druck

$$N = \frac{Q + 2aP \sin \varphi}{a}.$$

Berücksichtigt man noch die Reibung des Fadens gegen den Cylinder, so können die beiden Gewichte  $Q$  und  $Q'$ , oder die Spannungen in den vertical gerichteten Elementen  $A$  und  $E$  ungleich sein, ohne daß das Gleichgewicht aufgehoben wird. Es sei z. B. die Spannung  $Q$  in  $A$  etwas größer als die Spannung  $Q'$  in  $B$ , so strebt der Faden in dem Sinne  $EDA$  auf dem Cylinder zu gleiten; dieses aber kann durch Reibung verhindert werden. Man bezeichne dieselbe, für ein Element  $ds$ , mit  $f ds$ , und bemerke, daß sie in dem Sinne von  $t$  (Bt, Fig. 27.) tangential wirkt; daher  $-f \sin \varphi ds$  ihre horizontale,  $+f \cos \varphi ds$  ihre verticale Componente ist. Werden diese in 1. hinzugefügt, so kommt:

$$-d(t \sin \varphi) + N \cos \varphi ds - f \sin \varphi ds = 0$$

$$d(t \cos \varphi) + N \sin \varphi ds + f \cos \varphi ds - P ds = 0$$

$$\text{oder } \left. \begin{aligned} d(t \sin \varphi) &= (N \cos \varphi - f \sin \varphi) a d\varphi \\ d(t \cos \varphi) &= -(N \sin \varphi + f \cos \varphi - P) a d\varphi. \end{aligned} \right\} 2.$$

Hieraus folgt zuerst:

$$dt = (P \cos \varphi - f) a d\varphi, \quad 3.$$

$$\text{ferner: } t = aN - aP \sin \varphi. \quad 4.$$

Die Reibung  $f$  ist, der Erfahrung nach, dem Drucke proportional, also  $f = \mu N$ ,  $\mu$  eine von  $N$  unabhängige, durch Beobachtung zu bestimmende Größe. Die Einsetzung dieses Werthes von  $f$  giebt:

$$dt = (P \cos \varphi - \mu N) a d\varphi. \quad 5.$$

Zugleich aber ist aus 4.  $dt = a dN - aP \cos \varphi d\varphi$ ; folglich

$$dN - P \cos \varphi d\varphi = (P \cos \varphi - \mu N) d\varphi;$$

$$\text{also } dN + \mu N d\varphi = 2P \cos \varphi d\varphi.$$

Diese Gleichung werde mit dem integrierenden Factor  $e^{\mu\varphi}$  multiplicirt (vgl. §. 131. I.); so ergibt sich

sei (das Gesetz der Abstoßung, welcher aus dieser Hypothese folgen würde, braucht hier nicht weiter untersucht zu werden). Ist nun  $\angle BCD = \pi - \varphi$ ,  $CDE = \pi - \varphi'$ ; so kann demnach das Moment des Paares  $(p, -p)$  an dem Arme  $CD = k\varphi$ , und das von  $(q, -q)$  an demselben Arme  $= k\varphi'$  gesetzt werden, wo  $k$  eine Constante ist. Wird noch zur Vereinfachung das Vieleck  $ABCD$ .. in der Folge immer als eben angenommen, so ist klar, daß die Paare  $k\varphi$  und  $k\varphi'$  an  $CD$  einander entgegenwirken, und mithin zusammengesetzt ein Paar bilden, dessen Moment  $= k(\varphi - \varphi')$  ist. Man denke sich dasselbe auf die Breite  $CD = l$  gebracht, und setze sein Moment  $= Ql$ , so ist  $Ql = k(\varphi - \varphi')$ . Dieses Paar sei in der Figur  $(Cc, Dd)$ . Ein ähnliches hat man sich an jeder Seite des Vielecks zu denken.

Sind nun an dem Vielecke beliebige äußere Kräfte mit den inneren Kräften, nämlich den Widerständen gegen Biegung und den Spannungen, im Gleichgewichte, so wird dieses nicht gestört, wenn die gegenseitigen Entfernungen aller Spitzen des Vielecks unveränderlich werden. Alsdann kann man alle der Biegung widerstrebenden Paare in ein einziges zusammensetzen; man sieht aber sogleich, daß dieses Paar Null ist. Denn z. B. dem Paare  $(p, -p)$  an  $CD$  entspricht ein anderes Paar  $(p, -p)$  an  $BC$ ; beide aber sind dem Winkel  $\pi - \angle BCD = \varphi$  proportional, also ihre Momente  $= k\varphi$ , und mithin einander gleich; und da das eine dem anderen entgegenwirkt, so heben sie einander auf, nachdem ihre Arme fest verbunden sind. In der That muß die Summe der Momente aller der Biegung widerstrebenden Paare Null sein, weil dieselben, nach der Voraussetzung, von gegenseitigen Abstoßungen zwischen den Punkten herrühren, die zu zweien einander gleich und entgegengerichtet sind. Es muß demnach an dem festgewordenen Vielecke, weil in diesem die der Biegung widerstrebenden inneren Kräfte unter einander im Gleichgewichte sind, zwischen den äußeren Kräften  $P, P'$ .. Gleichgewicht bestehen, mithin die Mittelkraft und das zusammengesetzte Paar von diesen, Null sein. Wirken insbesondere auf das Vieleck,

welches ein elastisch biegsames heißen mag, nur zwei äußere Kräfte  $P$  und  $P'$ , in den Endpunkten  $A$  und  $F$ , so müssen diese einander gleich und entgegengerichtet sein (Fig. 28.). Zugleich ist alsdann das Vieleck nothwendig eben. Denn es seien (Fig. 28. a.)  $AB$ ,  $BC$ , die beiden ersten Seiten, auf welche die dem Winkel  $\pi - ABC$  proportionalen, einander gleichen Paare ( $Aa$ ;  $Bb$ ) und ( $B\beta$ ,  $C\beta'$ ), in der Ebene  $ABC$ , wirken. Eben so wirken in der Ebene  $BCD$  der zweiten und dritten Seite, an  $BC$  und  $CD$ , die wiederum einander gleichen, dem Winkel  $\pi - BCD$  proportionalen Paare. Nun muß die Resultante der Kräfte  $P$  und  $Aa$ , an  $A$ , in die Richtung  $AB$  fallen; indem sie der Spannung in  $AB$ , an  $A$ , Gleichgewicht hält; folglich muß  $P$  in der Ebene  $aAB$ , d. i. an der Ebene  $ABC$  liegen. Ferner müssen die Kräfte  $Bb$ ,  $B\beta$ ,  $Bc$  an  $B$  mit den nach  $BA$  und  $BC$  gerichteten Spannungen an  $B$  im Gleichgewichte sein, also muß die Kraft  $Bc$  in die Ebene  $ABC$  der vier anderen fallen; mithin muß auch das Paar ( $Bc$ ,  $Cc'$ ) in der Ebene  $ABC$  liegen, und da dieses Paar auch in der Ebene  $BCD$  liegt, so muß  $CD$  sich in der Ebene  $ABC$  befinden; u. s. f. für die übrigen Seiten.

Um die Gestalt des Vieleckes und die Spannungen in seinen Seiten zu bestimmen, verfähre man ganz eben so, wie bei dem biegsamen Vielecke in §. 39. Die Spannung in irgend einer Seite, z. B. in  $CD$ , an  $C$ , hält der Mittelfraft aus allen Kräften Gleichgewicht, die von  $A$  bis  $C$  an dem Vielecke vorhanden sind. Dieselben sind die äußeren Kräfte  $P$ ,  $P'$ , und die Kraft  $Q = Cc$  (Fig. 28.), indem die noch übrigen Kräfte der Paare an  $AB$ ,  $BC$  die Mittelfraft Null geben. Zerlegt man diese Kräfte, die alle in einer Ebene gedacht werden sollen, nach zwei auf einander senkrechten Axen  $x$  und  $y$ , und bezeichnet die Neigungen der auf einander senkrechten  $t$  und  $Q$ , gegen  $x$ , mit  $u$  und  $\frac{\pi}{2} + u$ , so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} t \cos u - Q \sin u + \sum P \cos \alpha &= 0 \\ t \sin u + Q \cos u + \sum P \sin \alpha &= 0 \end{aligned} \right\} 1.$$

mithin:

$$\left. \begin{aligned} -t &= \cos u \cdot \Sigma P \cos \alpha + \sin u \cdot \Sigma P \sin \alpha \\ Q &= \sin u \cdot \Sigma P \cos \alpha - \cos u \cdot \Sigma P \sin \alpha. \end{aligned} \right\} 2.$$

Man hat  $Ql = k(\varphi' - \varphi)$ , oder, wenn man auf beiden Seiten mit  $l$  multiplicirt,  $Ql^2 = kl(\varphi' - \varphi)$ . Nun sind, nach der Voraussetzung, alle Seiten des Vielecks einander gleich, mithin ist das Product  $kl$  constant; man schreibe daher  $l$  statt  $kl$ , wodurch erhalten wird  $Ql^2 = k(\varphi' - \varphi)$ .

Man denke sich anstatt des elastisch biegsamen Vielecks eine stetige Curve, oder eine elastische Feder. Für diese wird

$$l = ds, \quad \operatorname{tg} u = \frac{dy}{dx}, \quad \sin u = \frac{dy}{ds}, \quad \cos u = \frac{dx}{ds};$$

bezeichnen ferner  $Xds$ ,  $Yds$  die Componenten der an einem Elemente wirkenden äußeren Kraft, so ist

$$\Sigma P \cos \alpha = \int Xds, \quad \Sigma P \sin \alpha = \int Yds;$$

und mithin, indem man alle diese Werthe in 2. setzt:

$$\left. \begin{aligned} -t &= \frac{dx}{ds} \int Xds + \frac{dy}{ds} \int Yds \\ Q &= \frac{dy}{ds} \int Xds - \frac{dx}{ds} \int Yds. \end{aligned} \right\} 3.$$

Ferner wird noch  $\varphi$ , d. i. der Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Elementen der Curve gleich  $du$ , mithin  $\varphi' - \varphi = d^2u$ , und folglich

$$Q \cdot ds^2 = kd^2u.$$

Bezeichnet  $\rho$  den Krümmungshalbmesser,  $\lambda$  die Krümmung der Curve, so ist bekanntlich  $\lambda = \frac{1}{\rho}$ , und  $\rho du = ds$ , also

$du = \lambda ds$ ,  $d^2u = d\lambda ds$ ; mithin  $Q = k \frac{d\lambda}{ds}$ , und, nach 3.

$$kd\lambda = dy \int Xds - dx \int Yds.$$

47. Man nehme an, daß nur an den Endpuncten A und F der elastischen Feder äußere Kräfte wirken, welche, wie früher

Bemerkt worden, einander gleich und entgegengerichtet sein müssen. Die Curve der Feder ist alsdann nothwendig eben. Es sei A der Anfang der Coordinaten, AF die Axe der  $x$ , und P die an A angebrachte Kraft, so ist offenbar  $\int X ds = P$ ,  $\int Y ds = 0$ , und mithin wird die vorstehende Gleichung:

$$k d\lambda = P dy,$$

also  $k\lambda = Py + \text{Const.}$

Für den Anfang A ist aber nicht allein  $y=0$ , sondern auch nothwendig die Krümmung  $\lambda$  Null, mithin  $\text{Const.} = 0$ . Denn es sei  $AB = ds$  das erste Element der Curve,  $s$  seine Neigung gegen das folgende Element BC (also  $s$  der Nebenwinkel von ABC), so ist  $s = \lambda ds$ , und mithin hat das der Biegung widerstrebende Paar an dem Arme AB, d. i. (Aa, Bb) (Fig. 28. a.)

den früheren Annahmen gemäß, das Moment  $\frac{k s}{ds}$  oder  $k\lambda$ . Die-

sem Momente muß offenbar das Moment der Kraft P, in Bezug auf den Punct B, d. i.  $Pdy$ , Gleichgewicht halten; daher muß  $Pdy = k\lambda$ , folglich  $\lambda$  unendlich klein sein, w. z. b. w. (Der Contingenz-Winkel  $s = \lambda ds$  ist demnach im Anfange der Curve ein Unendlich-Kleines der zweiten Ordnung). Es ergibt sich also für die gesuchte Gestalt der elastischen Feder folgende Gleichung:

$$k\lambda = Py. \quad 1.$$

Da an jedem Elemente  $ds$  der Curve das Paar  $Qds = k d\lambda$  wirkt, so ist  $\int Qds = k\lambda$  die Summe der Momente aller dieser von A an bis zu irgend einem Puncte der Curve wirkenden Elementar-Paare, welche man das Moment der Elasticität, in Bezug auf Biegung, oder auch das Biegemoment nennt. Die Gleichung 1. drückt demnach aus, daß das Moment der Kraft P, in Bezug auf jeden Punct der Curve, dem Biegemomente in Bezug auf diesen Punct, Gleichgewicht halten muß.

Der Werth der Krümmung  $\lambda$  ist bekanntlich

$$\pm \frac{dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds} \left( \text{vgl. I. §. 48., wo } r = \frac{1}{\lambda} \right);$$

folglich hat man, wenn noch zur Abkürzung  $k = Ph^2$  gesetzt wird, aus 4.

$$\pm \frac{h^2 dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds^3} = y.$$

Es sei  $\frac{dy}{dx} = q$ , so giebt vorstehende Gleichung

$$\pm \frac{h^2 dq}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}} dx} = y,$$

oder, auf beiden Seiten mit  $dy$  multiplicirt:

$$\pm \frac{h^2 q dq}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} = y dy.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$\frac{\mp 2h^2}{\sqrt{1+q^2}} = y^2 + \text{Const.},$$

oder weil

$$\frac{1}{\sqrt{1+q^2}} = \frac{\pm dx}{ds},$$

so kommt

$$\pm 2h^2 \frac{dx}{ds} = y^2 + \text{Const.}$$

Für den Punkt A sei  $\frac{dy}{ds} = \text{tg } \mu$ ,  $\frac{dx}{ds} = \cos \mu$ , so wird

$\text{Const.} = \pm 2h^2 \cos \mu$ , und man erhält mithin

$$2h^2 \frac{dx}{ds} = 2h^2 \cos \mu \pm y^2. \quad 2.$$

Hieraus ergibt sich weiter

$$2h^2 \frac{dy}{ds} = \pm \sqrt{4h^4 - (2h^2 \cos \mu \pm y^2)^2}. \quad 3.$$

Setzt man zu Abkürzung

$$\sqrt{4h^4 - (2h^2 \cos \mu \pm y^2)^2} = U,$$

so folgt  $dx = \pm \frac{(2h^2 \cos \mu \pm y^2) dy}{U}. \quad 4.$

$$ds = \pm \frac{2h^2 dy}{U}. \quad 5.$$

Die Gleichung 4. ist die Differentialgleichung der Curve, deren Integration keine neue Constante herbeiführt, weil für  $x=0$ , auch  $y=0$  werden muß. Man sieht aus dieser Gleichung, daß nichts an Allgemeinheit verloren geht, wenn man bloß das eine der vor  $y^2$  stehenden Zeichen in Betracht zieht, und zwei Fälle unterscheidet, je nachdem  $\cos \mu$  positiv oder negativ ist. (Der Fall, in welchem  $\cos \mu = 0$ , braucht nicht besonders hervorgehoben zu werden.) Man setze also:

$$U = \sqrt{4h^4 - (2h^2 \cos \mu \pm y^2)^2},$$

und

$$\pm U dx = (2h^2 \cos \mu \pm y^2) dy, \quad \pm U ds = 2h^2 dy.$$

Indem nun  $y$  und  $s$  von Null anfangend wachsen, gilt in den vorstehenden Gleichungen das positive Vorzeichen von  $U$ , bis für den größten Werth von  $y$ , welcher mit  $f$  bezeichnet werde,  $\frac{dy}{dx} = 0$ ,  $U = 0$  wird. Indem alsdann  $y$  wieder von  $+f$  bis  $-f$  abnimmt, gilt das negative Zeichen von  $U$ ; für  $y = -f$  wird  $U$  wieder Null, und wechselt das Zeichen, u. s. f., in's Unendliche. Der Werth von  $f$  ergibt sich aus der Gleichung  $4h^4 = (2h^2 \cos \mu \pm f^2)^2$ ; man findet

$$|f| = 2h \sin \frac{1}{2}\mu. \quad 6.$$

Es sei (Fig. 29.)  $AB = c$ ,  $BC = f$ , Bogen  $AC = l$ , so hat man:

$$c = \int_0^f \frac{(2h^2 \cos \mu \pm y^2) dy}{U}. \quad 7.$$

$$l = \int_0^f \frac{2h^2 dy}{U}. \quad 8.$$



Die Figur 29. entspricht dem Falle, daß  $\cos \mu$  positiv, oder die Neigung der Tangente in A gegen die Richtung der Kraft P spitz ist. In dieser Figur wird  $y=0$  für  $x=2c=AD$ , ferner  $y=-f$  für  $x=3c=AE$ , u. s. f. Die elastische Curve bildet hier mehrere gleiche, abwechselnd auf verschiedenen Seiten der Axe liegende Bogen; sie kann auch nur einen solchen Bogen bilden (Fig. 30.). Jeder der Durchschnitte der Curve mit der Axe AF, wie D, H in Fig. 29., ist zugleich ein Wendepunct, weil wegen der Gleichung  $k\lambda=Py$  die Krümmung daselbst ihr Zeichen wechselt.

Ist  $\cos \mu$  negativ, so wird, wenn man  $\pi - \mu'$  statt  $\mu$  schreibt

$$dx = \pm \frac{(y^2 - 2h^2 \cos \mu') dy}{U}, \quad U = \sqrt{4h^4 - (y^2 - 2h^2 \cos \mu')^2},$$

$$f = 2h \cos \frac{1}{2} \mu'.$$

Es sei noch  $q^2 = 2h^2 \cos \mu'$ ,  $q$  positiv, wie  $f$ , so ist  $q < f$ , weil  $\sqrt{2 \cos \mu'} < 2 \cos \frac{1}{2} \mu'$ , wie leicht zu sehen; man setze ferner

$$-p = \int_0^q \frac{(y^2 - 2h^2 \cos \mu') dy}{U},$$

wo  $p$  wesentlich positiv ist. Die Werthe von  $-p$  und  $q$  stellen die Coordinaten (AM und MN, Fig. 31.) des dem Anfange A zunächst liegenden von denjenigen Punkten der Curve dar, in welchen die Tangente auf der Axe  $x$  senkrecht steht. Es sei noch, wie oben,  $c$  die Abstände des Punctes C (Fig. 31.), in welchem die Tangente der Axe  $x$  parallel ist, so hat man

$$c = \int_0^f \frac{(y^2 - 2h^2 \cos \mu') dy}{U}.$$

Dieser Werth von  $c$  kann eben sowohl positiv wie negativ sein.

In den Fig. 31. 32. 33. werden verschiedene Formen der elastischen Curve dargestellt, alle unter Voraussetzung eines negativen Werthes von  $\cos \mu$ . In denselben ist überall A der Anfang, AP die Richtung der positiven  $x$ ,  $AM = -p$ ,  $MN = q$ ;

$AB=c$ ,  $BC=f$ ;  $AM'=2c+p$ ,  $M'N'=q$ , u. s. f. In Fig. 31. ist  $c$  positiv und größer als  $p$ . Wäre  $c$  kleiner als  $p$ , so würden die Bogen  $ACD$  und  $HKF$  einander schneiden. In Fig. 32. 33. ist  $c$  negativ, und zwar in Fig. 32. auch  $2c+p$  negativ, in 33. dagegen ist  $2c+p$  positiv.

Für die Spannung der Feder ergibt sich aus der ersten der Gleichungen 3. (§. 46.), weil  $\int X ds = P$ ,

$$-t = P \frac{dx}{ds} = \frac{P(y^2 + 2h^2 \cos \mu)}{2h^2}. \quad 9.$$

Die Spannung ist also in jedem Punkte gleich der nach der Tangente gerichteten Componente von  $P$ . Dies ist in der That augenscheinlich nothwendig; denn geht man auf das in §. 46. betrachtete Vieleck (Fig. 28.) zurück, so muß die Spannung z. B. an  $C$ , in der Seite  $CD$ , der Mittelfraft aller an  $A$ ,  $B$ ,  $C$  wirkenden Kräfte Gleichgewicht halten. Diese Mittelfraft hat aber zu Componenten nur die Kräfte  $P$  und  $Cc$ , indem die Kräfte der an  $AB$ ,  $BC$  wirkenden Paare einander aufheben; zerlegt man also  $P$  in eine nach  $CD$  gerichtete und eine darauf senkrechte Componente, so muß die zweite mit  $Cc$ , die erste mit der Spannung im Gleichgewichte sein, w. z. b. w. Die Spannung ist z. B. in Fig. 31. in dem Bogen  $AN$  positiv, weil für diesen  $\frac{dx}{ds}$  negativ ist; dagegen ist sie in dem Bogen  $NN'$  negativ, weil für diesen  $\frac{dx}{ds}$  positiv ist. Die äußeren Kräfte streben mithin den Bogen  $AN$  auszudehnen, und den Bogen  $NN'$  zusammenzudrücken.

Anmerkung. Wird die gebogene Feder in einem ihrer Punkte, z. B. in  $N$  (Fig. 31.) fest eingeklemmt, so wird das Gleichgewicht nicht gestört; also bleibt z. B. der Theil  $AN$  unverändert. Wäre mithin nur dieser Theil  $AN$ , in  $N$  eingeklemmt, und in  $A$  durch die Kraft  $P$  gebogen, vorgelegt; so müßte man ebenfalls von der obigen Gleichung  $kl = Py$  ausgehen, um seine

Gestalt zu bestimmen. Man würde nur zur Bestimmung der Constanten der Integration andere Gleichungen erhalten, als vorhin.

Es sei die Feder AB (Fig. 34.) in B eingeflemmt, in A durch die Kraft P gebogen; so erhält man, wenn wieder A zum Anfange, AP zur Axe der x genommen wird, wie oben für den Bogen AN in Fig. 31.:

$$dx = \frac{(y^2 - 2h^2 \cos \mu') dy}{U}, \quad U = \sqrt{4h^4 - (y^2 - 2h^2 \cos \mu')^2},$$

oder, wenn man  $\mu$  statt  $\mu'$ , und  $-x$  statt  $x$  schreibt, also die positiven  $x$  in der Richtung von A nach C annimmt:

$$-dx = \frac{(y^2 - 2h^2 \cos \mu) dy}{U}, \quad \text{und} \quad ds = \frac{2h^2 dy}{U}.$$

Für den Punkt B sei  $x = AC = a$ ,  $y = CB = b$ ,  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$ ;

die Länge des Bogens AB sei  $L$ ; so ergeben sich folgende Gleichungen zur Bestimmung der Constanten  $a$ ,  $b$ ,  $\mu$ :

$$\cotg \alpha = \frac{2h^2 \cos \mu - b^2}{\sqrt{4h^4 - (2h^2 \cos \mu - b^2)^2}}, \quad L = 2h^2 \int_0^b \frac{dy}{U},$$

$$a = \int_0^b \frac{(2h^2 \cos \mu - y^2) dy}{U}.$$

48. In diesem §. ist wieder von einer freien, durch zwei in den Endpunkten angebrachte Kräfte gebogenen, Feder die Rede. Sind die Constanten  $P$  und  $k$ , mithin  $h = \sqrt{\frac{k}{P}}$ , und die Länge der Feder ( $L$ ) sämmtlich gegeben, so muß man, um die Gestalt derselben zu bestimmen, die Werthe von  $f$ ,  $c$ ,  $\mu$  aus den Gleichungen 6., 7., 8. finden. In der Gleichung 8. ist aber der Werth von  $l$  nicht unbedingt gegeben; nur so viel ist klar, daß die gesammte Länge der Feder ein gerades Vielfache des Bogens  $l$ , also daß  $L = 2nl$  ist; welche Werthe von  $n$  zulässig sind,

bleibt noch zu entscheiden. Zu dem Ende werde  $\mu$  aus  $U$  eliminiert; man hat nämlich

$$U^2 = (2h^2 - 2h^2 \cos \mu - y^2)(2h^2 + 2h^2 \cos \mu + y^2)$$

und  $2h^2 - 2h^2 \cos \mu = f^2;$

folglich  $U^2 = (f^2 - y^2)(4h^2 - f^2 + y^2),$  und aus 8.

$$l = \frac{L}{2n} = 2h^2 \int_0^f \frac{dy}{U},$$

wo die Quadratwurzel  $U$  positiv zu nehmen ist, wie in 8. Man setze  $y = f \cdot z$ , und  $\frac{f}{2h} = \sin \frac{1}{2} \mu = g$ , so wird

$$2h \int_0^f \frac{dy}{U} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-g^2(1-z^2))}} = G,$$

wo das Integral  $G$  offenbar eine Function von  $g$  ist. Für

$g=0$  wird  $G = \frac{1}{2}\pi$ , für  $g=1$ ,  $G = \int_0^1 \frac{dz}{z\sqrt{1-z^2}} = \infty$ . In

dem ferner  $g$  von 0 bis 1 wächst, sieht man leicht, daß  $G$  von  $+\frac{1}{2}\pi$  bis  $\infty$  stetig zunimmt. Nun muß aber sein

$$L = 2nhG,$$

und da  $G > \frac{1}{2}\pi$ , auch  $L > nh\pi$ . Folglich sind nur diejenigen Werthe von  $n$  zulässig, welche kleiner sind als  $\frac{L}{h\pi}$ . So-

bald aber die positive ganze Zahl  $n$  kleiner als  $\frac{L}{h\pi}$  und nicht

Null ist, ist auch die transcendente Gleichung  $L = 2nhG$ , oder

$$L = 2nh \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-g^2(1-z^2))}}$$

nothwendig lösbar; denn da  $G$  stetig von  $\frac{1}{2}\pi$  bis  $\infty$  wächst, und  $L > nh\pi$  ist, so muß es einen, und nur einen Werth von  $g$ , zwischen 0 und 1, geben, für welchen genau  $L = 2nhG$  wird.

Setzt man also für  $n$  alle positiven ganzen Zahlen, die kleiner sind als  $\frac{L}{h\pi}$ , so erhält man eben so viele Werthe von  $g$ , die

alle von einander verschieden sind, weil zu einem größeren  $n$  offenbar ein kleineres  $g$  gehört. Mithin ergiebt sich der bemerkenswerthe Satz: Eine elastische Feder von gegebener Länge  $L$ , kann durch zwei gleiche und entgegengerichtete an ihren Endpunkten angebrachte Kräfte ( $P$ ) immer auf so viele verschiedene Arten gebogen werden, als die zunächst unter dem Quotienten  $\frac{LV/P}{\pi\sqrt{k}}$  liegende ganze Zahl Einheiten enthält.

In diesem Quotienten bedeutet  $k$  eine von der Länge der Feder unabhängige, durch die sonstige Beschaffenheit derselben bedingte Constante;  $\pi$  ist  $= 3,1415 \dots$  Man könnte auch doppelt so viele Biegungen zählen, in so fern jeder Biegung eine zweite entspricht, welche aus der ersten durch Vertauschung von Rechts und Links entsteht. Diese kann aber mit der anderen für einerlei gelten.

Außer diesen gebogenen Stellungen der Feder ist aber auch noch die gerade Stellung möglich, und zwar auf doppelte Weise, je nachdem nämlich die Kräfte  $P$  die Feder auszudehnen oder zusammenzudrücken streben. In dem ersten Falle ist das Gleichgewicht der Feder offenbar sicher, d. h. wenn man die Feder ein wenig böße, so würde es sich sofort wieder herstellen; in dem zweiten Falle kann das Gleichgewicht sicher oder unsicher sein.

Wenn nämlich der Quotient  $\frac{LV/P}{\pi\sqrt{k}}$  nicht größer ist als die Einheit, so folgt aus dem vorstehenden Satze, daß die Feder sich gar nicht biegen kann; das Gleichgewicht ist alsdann sicher. Wird also z. B. eine auf fester Unterlage vertical stehende gerade elastische Feder oben mit dem Gewichte  $P$  gedrückt, so kann sie sich nicht biegen, so lange nicht  $\frac{LV/P}{\pi\sqrt{k}} > 1$ , also  $P > \frac{k \cdot \pi^2}{L^2}$  ist.

Der Quotient  $\frac{k\pi^2}{L^2}$  giebt mithin ein Maass für die Festigkeit der Feder, in Bezug auf Biegung, welche, wie man sieht, unter

sonst gleichen Umständen, dem Quadrate der Länge der Feder umgekehrt proportional ist.

Ist  $f$  gegen  $h$  sehr klein, so findet nur eine sehr geringe Biegung Statt. Alsdann ist auch  $g = \frac{f}{2h}$  ein sehr kleiner Bruch, und man erhält, mit Vernachlässigung der zweiten und höheren Potenzen von  $g$ ,  $G = \frac{1}{2}\pi$ ; doch ist zu bemerken, daß  $G$  nothwendig etwas größer ist als  $\frac{1}{2}\pi$ . Folglich muß auch, wenn eine sehr kleine Biegung Statt finden soll,  $L$  sehr nahe  $= nh\pi$ , jedoch größer als  $nh\pi$  sein. Alsdann ist nahe  $P = \frac{n^2 k \pi^2}{L^2}$ ; also folgt:

Eine sehr kleine Biegung der Feder kann nur dann Statt finden, wenn der Druck  $P$  einem der Werthe  $\frac{k\pi^2}{L^2}$ ,  $\frac{4k\pi^2}{L^2}$ ,  $\frac{9k\pi^2}{L^2}$ , .. sehr nahe kommt, den er aber zugleich übertreffen muß.

Bei sehr geringer Biegung muß offenbar  $\frac{dy}{dx}$  überall sehr klein, oder die Curve gegen die Aze der  $x$ , in welche die Richtung des Druckes fällt, wenig geneigt sein. Man kann daher die Gestalt der Feder aus der Grundgleichung (§. 47. 1.) leicht ermitteln. Werden nämlich die zweiten und höheren Potenzen von  $\frac{dy}{dx}$  vernachlässigt, so ergiebt sich  $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 1$ ,

wodurch der Ausdruck der Krümmung  $\lambda$  sich in  $\pm \frac{d^2 y}{dx^2}$ , und die Gleichung 1. in  $\pm h^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = y$  verwandelt. Man überzeugt sich

aber leicht, daß hier das Zeichen  $+$  nicht Statt finden kann, indem die aus der Annahme desselben hervorgehende Curve der Voraussetzung einer sehr kleinen Biegung widerspricht. Es muß daher das negative Zeichen gelten, d. h. die Curve muß gegen die Aze  $x$  überall hohl sein, was auch ohne Rechnung klar ist. Die Differentialgleichung ist mithin:

$$-h^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = y,$$

und wird dieselbe so integriert, daß  $y$  mit  $x$  zugleich Null wird,

so kommt 
$$y = f \sin \frac{x}{h},$$

wo  $f$  eine Constante ist, die gegen  $h$  sehr klein sein muß. Bezeichnet man den Abstand der Endpunkte der Feder von einander (z. B.  $AF$ , Fig. 30.), mit  $e$ , so muß für  $x=e$ ,  $y=0$  sein. Entweder ist also  $f=0$ , und die Feder gerade, oder, wenn  $f$  nicht Null ist,  $\sin \frac{e}{h} = 0$ , also  $e = hn\pi$ . Da aber  $e$  sehr nahe der Länge  $L$  der Feder gleich ist, so muß sehr nahe  $L = nh\pi$  sein; wie schon vorhin gefunden wurde. Für  $n=1$  wird  $h = \frac{L}{\pi}$ , und  $y = \sin \frac{\pi x}{L}$ ; alsdann hat die Feder die Gestalt der

Figur 30. Für  $n=2$  wird  $y = f \sin \frac{2\pi x}{L}$ , oder die Feder schneidet die Ase  $x$  dreimal, für  $x=0$ ,  $x=\frac{1}{2}L$ ,  $x=L$ . Für  $n=3$  wird  $y = f \sin \frac{3\pi x}{L}$ ; die Gestalt der Feder entspricht der Figur 29. u. s. f.

49. Die elastische Feder  $ACB$  sei auf zwei Stützen  $A$  und  $B$  horizontal gelegt, und zwischen denselben in  $C$  durch ein Gewicht  $P$  beschwert; man verlangt die Biegung derselben zu bestimmen, jedoch nur unter der Voraussetzung, daß dieselbe sehr klein sei (Fig. 35.).

Diese Feder kann angesehen werden als zusammengesetzt aus zweien,  $CA$  und  $CB$ , welche in  $C$ , in einer noch zu bestimmenden gemeinsamen Richtung eingeklemmt sind. Von diesen beiden Theilen sei  $CA$  der kleinere. Man nehme  $C$  zum Anfange der Coordinaten, die horizontale  $Ca$  zur Ase der  $x$ ; es sei  $Ca=c$ ,  $Cb=-c'$ , (also  $c$  und  $c'$  positiv); ferner bezeichne man den Druck in  $A$  und  $B$  mit  $Q$  und  $Q'$ , so hat man

$$Q + Q' = P, \quad Qc = Q'c',$$

mithin

$$Q = \frac{Pc'}{c+c'}, \quad Q' = \frac{Pc}{c+c'}.$$

Nun ist CA in C eingeklemmt, und wird durch die Kraft Q in A gebogen, deren Moment in Bezug auf irgend einen Punkt von CA gleich  $Q(c-x)$  ist. Man hat mithin  $k\lambda = Q(c-x)$ ,

oder, weil  $\lambda = \frac{d^2 y}{dx^2} \left( \frac{dx}{ds} \right)^3$

$$k \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \left( \frac{dx}{ds} \right)^3 = Q(c-x).$$

Da nach der Annahme die Biegung sehr klein sein soll, so ist  $\frac{dy}{dx}$  ein sehr kleiner Bruch, dessen zweite und höhere Potenzen

vernachlässigt werden. Hieraus ergibt sich  $\frac{dx}{ds} = 1$ , und

$$k \frac{d^2 y}{dx^2} = Q(c-x),$$

mithin durch Integration:

$$k \frac{dy}{dx} = Q(cx - \frac{1}{2}x^2) + \text{Const.}$$

Für  $x=0$ , also in dem Punkte C, sei  $\frac{dy}{dx} = \text{tg } w$ ; so folgt:

$$k \frac{dy}{dx} = k \text{tg } w + Q(cx - \frac{1}{2}x^2)$$

und durch weitere Integration, indem für  $x=0$ , auch  $y=0$  sein muß:

$$ky = kx \text{tg } w + Q(\frac{1}{2}cx^2 - \frac{1}{6}x^3). \quad 1.$$

Für den zweiten Theil CB, in welchem  $x$  negativ ist, schreibe man  $-x$  statt  $x$ , so ist offenbar  $Q'(c'-x)$  das Moment von  $Q'$  in B, für irgend einen Punkt von CB; also

$$k \frac{d^2 y}{dx^2} = Q'(c'-x),$$



und durch Integration:

$$k \frac{dy}{dx} = Q'(c'x - \frac{1}{2}x^2) + \text{Const.}$$

Für  $x=0$  ist, in Bezug auf CB,  $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} w$ ; also

$$k \frac{dy}{dx} = Q'(c'x - \frac{1}{2}x^2) - k \operatorname{tg} w,$$

und  $ky = Q'(\frac{c'x^2}{2} - \frac{1}{6}x^3) - kx \operatorname{tg} w. \quad 2.$

Für  $x=c$  werde in 1.  $y=f=Aa$  (s. Fig. 35.); so muß für  $x=c'$  in 2. ebenfalls  $y=Bb=f$  werden; also ergibt sich aus 1. und 2.

$$kf = \frac{1}{3}Qc^3 + kc \operatorname{tg} w, \quad kf = \frac{1}{3}Q'c'^3 - kc' \operatorname{tg} w.$$

Durch Einsetzung der obigen Werthe von  $Q$  und  $Q'$  ergeben sich hieraus für  $f$  und  $\operatorname{tg} w$  die Werthe:

$$f = \frac{Pc^2c'^2}{3k(c+c')}, \quad \operatorname{tg} w = \frac{Pcc'(c'-c)}{3k(c+c')}.$$

Da, mit Vernachlässigung der zweiten und höheren Potenzen von  $\frac{dy}{dx}$ ,  $ds=dx$  ist, sind auch  $c$  und  $c'$  den Bogen CA und CB gleich, oder  $c+c'$  ist die gesammte Länge der Feder.

Um den tiefsten Punct G zu finden, der zwischen C und B liegen muß, setze man in 2.  $\frac{dy}{dx} = 0$ , so kommt

$$Q'(c'x - \frac{1}{2}x^2) = k \operatorname{tg} w,$$

oder, wenn für  $Q'$  und  $\operatorname{tg} w$  ihre Werthe eingeführt werden,

$$c'x - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{3}c'(c'-c).$$

Hieraus folgt  $x = c' - \sqrt{\frac{1}{3}c'(c'+2c)}$ , wo das negative Zeichen gelten muß, weil Abscisse  $x$  von G nicht größer als  $c'$  sein kann.

Es sei insbesondere das Gewicht P in der Mitte zwischen A und B angebracht, so wird  $c=c'$ , und der tiefste Punct G

fällt in C. Sein Abstand von der Horizontallinie ist alsdann  $=f$ , man findet:

$$f = \frac{Pc^3}{6k}.$$

50. Es sei (Fig. 36.) die Feder AB in A horizontal eingeklemmt, in B gestützt und in C, zwischen A und B, durch das Gewicht P beschwert. Der unbekannte Druck auf B heiße Q; Die horizontale AB sei Axe, A Anfang der x, AD=c die Abscisse von C, AB=c'. Die Biegung wird wieder als sehr klein vorausgesetzt.

Man erhält zuerst für den Theil AC, welchen die Kraft P abwärts, Q aufwärts zu biegen strebt,

$$k \frac{d^2y}{dx^2} = P(c-x) - Q(c'-x)$$

$$k \frac{dy}{dx} = P(cx - \frac{1}{2}x^2) - Q(c'x - \frac{1}{2}x^2),$$

ohne Constante, weil für  $x=0$ , wegen der horizontalen Einklemmung in A,  $\frac{dy}{dx}=0$  ist. Ferner:

$$ky = P(\frac{1}{2}cx^2 - \frac{1}{6}x^3) - Q(\frac{c'x^2}{2} - \frac{1}{6}x^3). \quad 1.$$

Der Theil CB kann als eingeklemmt in C angesehen werden. Man erhält für denselben:

$$k \frac{d^2y}{dx^2} = -Q(c'-x)$$

$$k \frac{dy}{dx} = \text{Const.} - Q(c'x - \frac{1}{2}x^2).$$

Für  $x=c$  muß dieser Werth von  $\frac{dy}{dx}$  dem vorigen gleich sein;

hieraus folgt  $\text{Const.} = \frac{Pc^2}{2}$ ; also

$$k \frac{dy}{dx} = \frac{Pc^2}{2} - Q(c'x - \frac{1}{2}x^2).$$

Weiter  $ky = \frac{Pc^2x}{2} - Q\left(\frac{c'x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \text{Const.}$

Für  $x=c$  muß der Werth von  $y$  aus dieser Gleichung mit dem aus 1. hervorgehenden einerlei sein; hieraus folgt  $\text{Const.} = -\frac{Pc^2}{6}$

und  $ky = \frac{Pc^2x}{2} - \frac{Pc^3}{6} - Q\left(\frac{c'x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$  2.

Für  $x=c'$  wird in 2.  $y=0$ , also  $\frac{Pc^2}{2}(c' - \frac{1}{3}c) = \frac{Qc'^3}{3}$ ; und

mithin:  $Q = \frac{Pc^2(3c' - c)}{2c'^3},$

wodurch der Druck in B bestimmt ist.

Es sei insbesondere das Gewicht  $P$  in der Mitte angebracht, mithin  $c'=2c$ , so wird  $Q = \frac{5}{16}P$ . Die Gleichungen 1. und 2. geben in diesem Falle:

$$ky = \frac{1}{16}P\left(3cx - \frac{11}{6}x^2\right)$$

$$ky = \frac{1}{2}P\left(c^2x - \frac{5}{8}cx^2 + \frac{5}{48}x^3 - \frac{c^3}{3}\right)$$

und mithin  $k \frac{dy}{dx} = \frac{1}{8}P(3cx - \frac{11}{4}x^2)$  für AC

$$k \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}P\left(c^2 - \frac{5}{4}cx + \frac{5}{16}x^2\right) \text{ für CB.}$$

Die erste dieser Gleichungen giebt  $\frac{dy}{dx} = 0$  für  $x = \frac{11}{11}c$ , welcher Werth nicht zulässig ist, weil für AC,  $x$  nicht größer als  $c$  werden kann. Die zweite Gleichung giebt  $\frac{dy}{dx} = 0$  für  $5x^2 - 20cx + 16c^2 = 0$ , d. i.  $x = 2c(1 - \sqrt{\frac{1}{5}})$ . Setzt man diesen Werth von  $x$  in die Gleichung 2, so kommt der Abstand  $y'$  des tiefsten Punctes von der Horizontalen AB:

$$y' = \frac{Pc^3}{6k}(\sqrt{5} - \frac{3}{2}).$$

Nach dem vorigen §. war dieser Abstand bei der bloß gestützten und in der Mitte beschwerten Feder gleich  $\frac{Pc^3}{6k}$ ; derselbe wird mithin, durch die Einklemmung des einen Endes der Feder, in dem Verhältnisse von  $\sqrt{5-\frac{3}{2}} : 1$  oder etwa von 14 : 19 vermindert.

51. Es sei die horizontal liegende Feder AC in den Punkten A, B, C gestützt, zwischen denselben in D und E mit den Gewichten P und P' belastet (Fig. 37.). Man nehme A zum Anfange der horizontalen x; es sei  $AD=c$ ,  $AB=c'$ ,  $AE=c''$ ,  $AC=c'''$ ; ferner seien Q, Q', Q'' die Drucke in A, B, C. Man hat zuerst:

$$Q+Q'+Q''=P+P', \quad Q'c'+Q''c'''=Pc+P'c''. \quad 1.$$

Für den Theil AD der Feder ist:

$$k \frac{d^2y}{dx^2} = P(c-x) - Q'(c'-x) + P'(c''-x) - Q''(c'''-x)$$

oder, mit Rücksicht auf die vorhergehenden Bedingungen,

$$k \frac{d^2y}{dx^2} = -Qx,$$

mithin  $k \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}Q(c^2-x^2) + k \operatorname{tg} w,$

und  $ky = \frac{1}{2}Q(c^2x - \frac{1}{3}x^3) + kx \operatorname{tg} w, \quad 2.$

wenn in D, für  $x=c$ ,  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} w$ . Für den folgenden Theil DB:

$$k \frac{d^2y}{dx^2} = -Q'(c'-x) + P'(c''-x) - Q''(c'''-x)$$

oder auch

$$k \frac{d^2y}{dx^2} = -Qx - P(c-x),$$

$$k \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}Q(c^2-x^2) + \frac{1}{2}P(c-x)^2 + k \operatorname{tg} w,$$

weil für  $x=c$ , dieser Werth von  $\frac{dy}{dx}$  mit dem vorigen übereins-

Spannung proportionale Verkürzung oder Verlängerung erleidet, in die Rechnung einführen. Es sei  $ds'$  die ursprüngliche,  $ds$  die durch die Spannung geänderte Länge des Elementes; so ist  $ds = ds'(1 + \gamma t)$ , wo  $\gamma$  einen constanten positiven Coefficienten bedeutet, wie in der Anmerkung zu §. 39. Besteht nun zwischen den an der elastischen Feder angebrachten Kräften Gleichgewicht, so kann jedes Element als unveränderlich betrachtet werden, und man erhält mithin insbesondere für eine Feder, die durch zwei an ihren Endpunkten angebrachte Kräfte gebogen ist, die nämliche Gleichung (1.) wie in §. 46. Die durch die Spannung geänderte Länge eines Elementes  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  wird, wie dort, durch die Gleichung 5.  $\left(ds = \pm \frac{2h^2 dx}{U}\right)$  ausgedrückt. aus dieser aber folgt die ursprüngliche Länge

$$ds' = \pm \frac{2h^2 dx}{(1 + \gamma t)U}.$$

Man nehme der Einfachheit wegen an, daß die Feder nur einen Bogen bilde, wie Fig. 30. Bezeichnet nun  $2l'$  die ganze ursprüngliche Länge der Feder, so erhält man, anstatt der Gleichung 8. in §. 46., folgende:

$$l' = \int_0^f \frac{2h^2 dy}{(1 + \gamma t)U}.$$

Für die Spannung besteht die nämliche Gleichung, wie in §. 46. Aus derselben ergibt sich

$$1 + \gamma t = 1 - \frac{\gamma P(2h^2 \cos \mu + y^2)}{2h^2}$$

und folglich

$$l' = \int_0^f \frac{4h^4 dy}{(2h^2 - \gamma P(2h^2 \cos \mu + y^2))U}.$$

Dieser Ausdruck für  $l'$ , an die Stelle der Gleichung 8. in §. 46. gesetzt, giebt, in Verbindung mit den dortigen Gleichungen 6. 7. die Mittel zur Bestimmung der Constanten  $\mu$ ,  $f$ ,  $c$ . Berechnet man ferner noch das Integral

$$l = \int_0^{2l'} \frac{2h^2 dy}{U},$$

so giebt die Differenz  $2l' - 2l$  die gesammte Verkürzung der Feder an, welche bei der Biegung Statt findet.

Bisher ist auch die Dicke der Feder, d. h. ihre Ausdehnung in der Richtung des Krümmungshalbmessers, gänzlich bei Seite gesetzt worden. Es ist aber wichtig, noch zu zeigen, wie auch diese Ausdehnung in Rechnung gebracht und namentlich die Constante  $k$  mit Rücksicht auf dieselbe bestimmt werden kann.

Ein biegsamer Stab, von der Gestalt eines geraden Prismas mit rechteckiger Grundfläche, sei an dem einen Ende eingeflemmt, und zwar so, daß zwei seiner Seitenflächen horizontal, also die beiden anderen vertical liegen. An dem freien Ende werde ein Gewicht  $P$  angebracht, und dadurch der Stab gebogen. Es sei  $ABCD$  ein verticaler Längendurchschnitt desselben (Fig. 38.),  $AB$  das eingeflemmte Ende. Man denke sich den Stab als bestehend aus unendlich dünnen Längenfaseru, wie  $ac$ , deren jede einzelne ohne Widerstand biegsam, zugleich aber einer der Spannung proportionalen Verlängerung oder Verkürzung fähig ist. Bei der Biegung werden einige Fasern sich ausdehnen, andere sich zusammenziehen; es wird aber angenommen, daß diejenigen Punkte der verschiedenen Fasern, welche vor der Biegung in einem normalen Querschnitte des Stabes lagen, sich auch nach der Biegung noch in einem solchen befinden, und zwar in der nämlichen Lage gegen einander, so daß die Gestalt des Querschnittes nicht geändert ist. Legt man also durch einen Punkt  $N$  der gebogenen Faser  $AND$  (Fig. 38.) eine auf ihrer Tangente in  $N$  senkrechte Ebene, so ist der dadurch entstehende Querschnitt (in der Figur dargestellt durch  $NM$ ) ein Rechteck von der nämlichen Gestalt, wie er ohne Biegung des Stabes sein würde. Diejenige Faser  $ac$ , welche von den beiden äußeren  $AD$  und  $BC$  gleich weit absteht, heiße die mittlere Faser des Durchschnit-  
tes  $ABCD$ . Es sei  $M'N'$  eine der  $MN$  unendlich nahe Normale,  $K$  ihr Durchschnitt mit jener, so ist  $Km = \rho$  der Krümmungs-

Halbmesser der mittlen Faser, in dem Elemente  $mm' = ds$ . Die Länge eines Elementes  $nn'$  einer anderen Faser, in dem Abstand  $mn = v$  von der mittlen, ist offenbar:

$$nn' = \left(1 + \frac{v}{\rho}\right) ds.$$

Ferner sei  $ds'$  die anfängliche Länge,  $t$  die Spannung von  $mm'$ , so ist  $ds = ds'(1 + \gamma t)$ , und mithin

$$nn' = \left(1 + \frac{v}{\rho}\right) (1 + \gamma t) ds'.$$

In der Anwendung werden  $\frac{v}{\rho}$  und  $\gamma$  immer nur sehr kleine Brüche sein; vernachlässigt man demnach das Product derselben, so kommt einfacher:

$$nn' = \left(1 + \frac{v}{\rho} + \gamma t\right) ds'.$$

Die anfängliche Länge  $ds'$  des Elementes  $nn'$  ist also um  $\left(\frac{v}{\rho} + \gamma t\right) ds'$  vermehrt; mithin entwickelt dieses Element eine seiner Ausdehnung proportionale Spannung. Wird dieselbe  $= \Theta$  gesetzt, so ist  $\gamma \Theta ds'$  die ihr entsprechende Verlängerung; mithin ist

$$\gamma \Theta ds' = \left(\frac{v}{\rho} + \gamma t\right) ds'$$

oder

$$\Theta = t + \frac{v}{\gamma \rho}.$$

Man bezeichne die auf der Ebene ABCD senkrechte Breite des Stabes mit  $u$ , so kann der unendlich kleine Querschnitt der Faser  $nn'$  durch  $du \cdot dv$  ausgedrückt werden, und die Kraft, mit welcher die Faser sich wieder bis auf ihre anfängliche Länge zusammenziehen strebt, ist mithin

$$= \Theta \cdot du \, dv = \left(t + \frac{v}{\gamma \rho}\right) du \, dv.$$

Betrachtet man zunächst den ersten Theil dieses Ausdrucks,

nämlich  $t \, du \, dv$ , so lassen sich die durch denselben dargestellten gleichen und parallelen, an  $N'M'$  wirkenden Kräfte in eine Resultante vereinigen, welche an dem Punkte  $m$  anzubringen ist. Setzt man die halbe Dicke des Stabes  $m'N' = v'$ , so ist die Intensität dieser Resultante  $= t \, du \int_{-v'}^{+v'} dv = 2tv' \, du$ .

Der andere Theil des obigen Ausdrucks giebt, in Bezug auf die gesammte Länge von  $N'M'$  integrirt, die Summe  $\frac{du}{\gamma \rho} \int_{-v'}^{+v'} v' \, dv = 0$ . Diese Kräfte geben mithin ein Paar, dessen Moment offenbar  $= \frac{2 \, du}{\gamma \rho} \int_0^{v'} v'^2 \, dv = \frac{2}{3} \frac{v'^3 \cdot du}{\gamma \rho}$  ist.

Denkt man sich  $ABCD$  als den mittlen Durchschnitt, d. h. gleich weit von den beiden äußern verticalen Seitenflächen abstehend, so ist nunmehr auch die mittlere Faser des Stabes, d. h. diejenige, welche durch die Schwerpunkte aller seiner (als gleichartige Flächen gedachten) Querschnitte geht. Wird nun noch in Bezug auf  $u$  integrirt, so erhält man die gesammte Spannung  $2tuv'$ , welche in  $m$  vereinigt gedacht werden kann, und das Paar  $\frac{2}{3} \frac{v'^3 u}{\gamma \rho}$ , welches man sich ebenfalls in der Ebene des mittlen Durchschnittes an der Normale  $N'M'$  wirkend vorstellen kann. Diesem Paare wirkt auf der anderen Seite der Normale  $N'M'$  ein zweites entgegen, welches von ihm um sein Differential verschieden ist; der Unterschied beider Paare, d. i.  $\frac{2}{3} \frac{v'^3 u}{\gamma} d\left(\frac{1}{\rho}\right)$  ist es also, welcher die Normale  $N'M'$  zu drehen strebt.

Es wird nun nichts geändert, wenn man sich alle Fasern in der mittlen Faser des Stabes vereinigt und an jedem Elemente derselben wie  $mm'$  das angegebene Paar  $\frac{2}{3} \frac{v'^3 u}{\gamma} d\left(\frac{1}{\rho}\right)$  in gehörigem Sinne angebracht denkt. Man setze

$$\frac{2}{3} \frac{v'^3 u}{\gamma} = k,$$



und schreibe  $\lambda$  für  $\frac{1}{\rho}$ , so ist  $k d \lambda$  das Moment dieses Paares, wie in §. 46. Oder, wenn man das Paar auf die Breite  $ds$  bringt, und sein Moment  $= Q ds$  setzt, so erhält man  $Q = k \frac{d\lambda}{ds}$ . Man hat also einen biegsamen Faden, welcher in jedem Elemente ein der Biegung widerstrebendes Paar  $= Q ds = k d \lambda$  darbietet, oder eine elastische Feder, die genau den in §. 46. gemachten Annahmen entspricht, nur mit dem Unterschiede, daß sie zugleich ausdehnbar ist. Man erhält mithin für die Curve der mittleren Faser, wie in §. 47.,  $k \lambda = P y$ , und eine weitere Fortsetzung dieser Betrachtungen würde überhaupt nur Vorhergegangenes zu wiederholen haben, also überflüssig sein.

Die Spannung  $t$  ist hier, wie in §. 47., der nach der Tangente der mittleren Faser gerichteten Componente von  $P$  gleich. Da nun bei nicht beträchtlicher Biegung diese Tangente überall nur wenig von der Horizontalen abweicht, so ist alsdann die Spannung  $t$  sehr gering, und mithin auch die mittlere Faser sehr wenig ausgedehnt.

Den vorstehenden ganz ähnliche Betrachtungen lassen sich überhaupt in Bezug auf biegsame Stäbe von beliebigem Querschnitte anstellen; dieselben sollen jedoch hier nicht weiter ausgeführt werden, um diesen Abschnitt nicht über Gebühr zu verlängern.

### Allgemeine Untersuchung über die Bedingung des Gleichgewichtes.

53. Die bisherigen Untersuchungen über das Gleichgewicht einiger Systeme sind nur als einzelne Beispiele zu betrachten, welche ihrer Wichtigkeit oder auch ihrer Einfachheit wegen hervorgehoben wurden; sie enthalten aber noch keine allgemeine Regel, nach welcher die Bedingungen des Gleichgewichtes beliebiger Systeme gefunden werden könnten. Eine solche soll im Folgenden unter der Voraussetzung entwickelt werden, daß die Verbindung der Punkte des Systemes unter einander sich durch Gleichungen zwischen ihren Coordinaten in Bezug auf drei im Raume unbewegliche Axen ausdrücken lasse. Diese Voraussetzung findet z. B. Statt, wenn die gegenseitigen Abstände einiger Punkte unveränderlich, oder auch wenn Punkte auf unbeweglichen Flächen oder Curven zu bleiben genöthigt sind; und sie ist überhaupt von sehr großer Allgemeinheit.

Man bemerke zuerst, daß das Gleichgewicht zwischen äußeren Kräften an einem Systeme nur vermittelt der durch die Verbindung der Punkte bedingten Widerstände oder inneren Kräfte zu Stande kommt, welche allemal in dem Maaße an den Punkten auftreten, als gerade nöthig ist, um diese Verbindung unter Einwirkung der äußeren Kräfte unverletzt zu erhalten. Denkt man sich diese Widerstände an jedem Punkte als Kräfte angebracht, so kann man von der gegenseitigen Verbindung der Punkte gänzlich absehen, und es muß Gleichgewicht bestehen zwischen den äußeren und inneren Kräften an jedem einzelnen Punkte, der als gänzlich frei anzusehen ist. Folglich kommt es bei Auffuchung der allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichtes nur auf die

Herleitung der Widerstände aus der gegebenen Verbindung der Punkte an; nach dieser hat man nur noch das Gleichgewicht zwischen Kräften an freien Punkten zu betrachten.

Die Widerstände werden jedoch durch die Art der Verbindung der Punkte, oder durch die zwischen den Coordinaten derselben bestehenden Bedingungsgleichungen nicht unmittelbar bestimmt, sondern lassen sich aus diesen nur mit Hülfe eines neuen, sogleich anzugebenden Grundsatzes herleiten. Um dieses deutlich zu machen, betrachte man zwei festverbundene Punkte. Zwischen zwei solchen stellt man sich gern, als Mittel der festen Verbindung, eine starre materielle Linie vor; da aber die Punkte von dieser wiederum mit einander fest verbunden sein müssen, so wird dadurch nichts gewonnen. Die Vorstellung einer starren Linie muß vielmehr beseitigt werden, so daß nur zwei materielle Punkte, in beliebiger Entfernung von einander, übrig bleiben; sie mögen *a* und *b* heißen. Ihre feste Verbindung besteht nun darin, daß, wenn äußere Kräfte, an ihnen angebracht, den Abstand *ab* zu vermehren oder zu vermindern streben, zwischen *a* und *b* sofort eine gegenseitige Anziehung oder Abstoßung rege wird, welche allemal gerade hinreicht, um diesen Abstand ungeändert zu erhalten. Ueber den Ursprung dieses Widerstandes, wie überhaupt aller Kräfte, hat die Statik nichts zu sagen; derselbe ist mit dem Begriffe einer festen Verbindung gegeben. Da die Anziehungen (oder Abstoßungen) zwischen den Punkten einander entgegengerichtet sind, so müssen auch die äußeren Kräfte, wenn jene diesen Gleichgewicht halten sollen, einander entgegenrichtet sein. Daß sie aber auch einander gleich sein müssen, wie der Grundsatz in §. 10. behauptet, folgt erst dann, wenn man annimmt, daß die Anziehungen (oder Abstoßungen) zwischen *a* und *b* einander gleich sind. Hieraus wird klar, daß die Widerstände bei einem festen Systeme aus dem Begriffe der festen Verbindung allein noch nicht hergeleitet werden können, sondern daß zur Bestimmung derselben noch der Grundsatz erfordert wird, welcher unter dem Namen des Satzes von der Gleichheit zwischen Wirkung

und Gegenwirkung (Action und Reaction) bekannt ist. Nach diesem Grundsatz ist die Wirkung (Anziehung oder Abstoßung) eines Punctes  $a$  auf einen anderen Punct  $b$  ohne Ausnahme begleitet von einer gleichen und entgegengerichteten Wirkung (Gegenwirkung) von  $b$  auf  $a$ ; oder die Kräfte, mit welchen zwei Puncte  $a$  und  $b$  einander anziehen (abstoßen), sind allemal einander gleich. Dieser Satz gilt für alle in der Natur beobachteten Anziehungen oder Abstoßungen; derselbe muß auch der theoretischen Untersuchung der Bedingungen des Gleichgewichtes beliebiger Systeme zu Grunde gelegt werden, wenn diese nicht auf alle Anwendbarkeit verzichten will. Von welcher Art also die Verbindung zwischen den Puncten eines Systemes auch sei, so wird in der Folge unbedingt vorausgesetzt, daß jeder Punct auf jeden andern nur in der Richtung der geraden Linie zwischen beiden anziehend oder abstoßend wirken kann, und daß die Anziehungen (Abstoßungen) zwischen je zwei Puncten allemal gegenseitig, entgegengerichtet, und gleich sind. Wie sich nun mit Hülfe dieses Grundsatzes die Widerstände allgemein bestimmen lassen, soll im Folgenden gezeigt werden.

54. Zunächst läßt sich beweisen, daß das Gleichgewicht allemal möglich sein muß, ohne daß die an den Puncten angebrachten Kräfte, jede einzeln, Null sind. Denn es ist augenscheinlich möglich, an dem Systeme solche Kräfte  $P, P', P'' \dots$  anzubringen, welche die Verbindung der Puncte zu verletzen streben, oder welche die Richtigkeit der zwischen den Coordinaten derselben obwaltenden Bedingungsgleichungen aufheben würden, wenn ihnen keine Widerstände entgegenwirkten. Die Kräfte  $P, P', \dots$  ertheilen nun den Puncten, wenn sie einander nicht Gleichgewicht halten, irgend welche Bewegungen. Da diese Bewegungen aber mit den Bedingungen des Systemes verträglich sein müssen, was diejenigen Bewegungen, welche die Puncte erhalten würden, wenn keine Widerstände Statt fänden, nach der Voraussetzung nicht sein würden, weil die Kräfte die Bedingungen des Systemes

zu verlegen streben; so sind die wirklichen Bewegungen aller oder wenigstens einiger Punkte, nach Richtung oder nach Geschwindigkeit, im Allgemeinen nach beiden, von denen verschieden, welche die Punkte, als unabhängig von einander gedacht, durch die Kräfte erhalten würden. Nun denke man sich an jedem Punkte zugleich mit  $P$  eine zweite Kraft  $Q$  derjenigen Bewegung gerade entgegen angebracht, zu welcher der Punkt durch die Kraft  $P$  und durch seine Verbindung mit den übrigen Punkten veranlaßt wird; und es sei  $Q$  gerade groß genug, um diese Bewegung aufzuheben; so besteht zwischen den Kräften  $P, P', P'', \dots$  einerseits und  $Q, Q', Q'', \dots$  andererseits, an dem Systeme Gleichgewicht, ohne daß die Resultante der Kräfte  $P$  und  $Q$  an jedem einzelnen Punkte gerade Null ist; also ist das Gleichgewicht an jedem Systeme möglich, ohne daß die an den Punkten desselben angebrachten Kräfte, jede einzeln, Null sind, w. z. b. w.

Nach der Voraussetzung bestehen zwischen den Coordinaten der Punkte des Systemes, in Bezug auf die im Raume festen Axen  $x, y, z$ , mehrere Bedingungsgleichungen, die durch  $L=0, M=0, N=0, \dots$  bezeichnet werden mögen. Nun denke man sich, daß dieses System in irgend einer Stellung, die jedoch immer mit jenen Bedingungsgleichungen verträglich sein muß, gleichzeitig von mehreren Kräften ergriffen werde, zwischen denen gerade Gleichgewicht bestehe, so haben die Kräfte keinen Einfluß auf den Zustand des Systemes, in Hinsicht auf Ruhe oder Bewegung. Sie können auch keinen erhalten, wenn man sich vorstellt, daß in dem Augenblicke ihrer Anbringung zu den bisherigen Bedingungsgleichungen des Systemes eine neue hinzutrete, welche durch  $H=0$  bezeichnet werde, und die, wie sich von selbst versteht, von der Art sein muß, daß die gegenwärtigen Werthe der Coordinaten der Punkte ihr Genüge thun. Um diese Bemerkung noch deutlicher zu machen, denke man sich über das System ein zweites jenem ganz gleiches so gelegt, daß beide einander völlig decken. Werden an dem ersten Systeme (A) Kräfte angebracht, die einander Gleichgewicht halten, und wird zugleich

an dem zweiten (B) die neue Bedingung  $H=0$  hinzugefügt; so besteht an jedem einzelnen Gleichgewicht; denn: an A sind die angebrachten Kräfte im Gleichgewichte, und an B sind gar keine Kräfte angebracht. Wenn nun das System B, welches bisher nur über A lag, und dieses genau deckte, sich zugleich mit A unveränderlich verbindet, so wird dadurch augenscheinlich an dem Gleichgewichte der Kräfte an A nichts geändert, während doch das ganze System nunmehr, außer den übrigen, auch noch der Bedingung  $H=0$  unterworfen ist. Eine solche Bedingung wäre z. B. die, daß die gegenseitige Entfernung zweier Punkte unveränderlich würde, oder die, daß ein Punkt auf einer unbeweglichen, durch seinen gegenwärtigen Ort gehenden Fläche von nun an zu bleiben gezwungen wäre. Da das Gleichgewicht der Kräfte an dem Systeme nicht gestört wird, wenn eine Bedingung dieser Art hinzukommt; so kann man deren eben so gut zwei, oder drei, oder überhaupt beliebig viele hinzufügen, ohne das Gleichgewicht aufzuheben. Man kann z. B. annehmen, daß ein bisher beweglicher Punkt unbeweglich werde; alsdann fügt man, wenn der Punkt nicht schon vorher auf einer Fläche oder Curve zu bleiben gezwungen war, drei neue Bedingungen hinzu, indem man seine Coordinaten unveränderlich setzt; dadurch wird das Gleichgewicht nicht gestört.

55. Man betrachte jetzt ein System, von dessen Punkten keiner unbeweglich oder durch ein äußeres Hinderniß in gewissen Bewegungen gehemmt sei; also ein freies System. Da die aus der Verbindung der Punkte hervorgehenden Widerstände gegen äußere Kräfte in gegenseitigen Anziehungen oder Abstoßungen zwischen den Punkten bestehen, welche, nach dem in §. 53. erläuterten Grundsatz von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung, einander allemal zu zweien entgegengerichtet und gleich sind; und da, wenn Gleichgewicht besteht, die äußeren und inneren Kräfte an jedem Punkte des Systemes mit einander im Gleichgewichte sein müssen; so erfordert das Gleichgewicht, daß

$$X = \lambda \frac{dL}{dx}. \quad \text{Eben so folgt} \quad Y = \lambda \frac{dL}{dy}, \quad Z = \lambda \frac{dL}{dz}.$$

Es verhalten sich also die Componenten von  $P$ , nach den Axen  $x, y, z$ , d. i.  $X, Y, Z$  zu einander wie  $\frac{dL}{dx} : \frac{dL}{dy} : \frac{dL}{dz}$ , d. h. wie die Cosinus der Neigungen der Normale gegen  $x, y, z$ ; folglich ist ihre Resultante auf der Fläche normal, w. z. b. r. Within müssen die Componenten nach  $p, q, r$  der Kraft  $P$  an  $L$  sich verhalten, wie die Ableitungen  $\frac{df}{dp}, \frac{df}{dq}, \frac{df}{dr}$ ; sie sind demnach  $\lambda \frac{df}{dp}, \lambda \frac{df}{dq}, \lambda \frac{df}{dr}$ .

Da nun die Kräfte in den Kanten des Tetraeders einander zu zweien gleich und entgegengerichtet sind, so muß z. B. an dem Punkte  $A$  in der Kante  $p=AD$  ebenfalls die Kraft  $\lambda \frac{df}{dp}$  wirken. Ferner aber müssen auch die Kräfte in den in  $A$  zusammenstoßenden Kanten  $l, m$ , sich zu einander verhalten, wie die Ableitungen von  $\frac{df}{dp} : \frac{df}{dl} : \frac{df}{dm}$ ; und Aehnliches gilt von den beiden noch übrigen Punkten; folglich sind nunmehr die Richtungen und die Verhältnisse der Intensitäten aller Kräfte, welche an dem Systeme einander Gleichgewicht halten können, völlig bestimmt. Werden nun Kräfte in diesen bestimmten Richtungen und mit diesen bestimmten Verhältnissen der Intensitäten an dem Systeme angebracht, so muß auch zwischen ihnen Gleichgewicht bestehen. Denn es ist einleuchtend, daß das Gleichgewicht an einem Systeme, wenn es besteht, dadurch nicht aufgehoben wird, daß die Intensitäten aller Kräfte an dem Systeme in einem gemeinsamen Verhältnisse geändert werden, während die Richtungen derselben, wie sich von selbst versteht, ungeändert bleiben. Oder mit anderen Worten, das Gleichgewicht zwischen mehreren Kräften kann nur bedingt sein durch die Verhältnisse zwischen den Intensitäten der Kräfte. Denn besteht zwischen mehreren Kräften Gleichgewicht, und wird jede derselben an ihrem Angriffspunkte noch einmal angebracht,

so besteht wieder zwischen den neuen Kräften Gleichgewicht; man kann also die Intensitäten alle z. B. verdoppeln, ohne das Gleichgewicht zu stören. Nähme man aber von allen Intensitäten z. B. die Hälfte, und bestände nunmehr nicht Gleichgewicht; so denke man sich das System als zusammengesetzt aus zweien, die über einander liegen und einander genau decken, überhaupt aber ganz gleich sind, und an deren jedem die Kräfte von den halben Intensitäten wirken, welche, nach der Voraussetzung, nicht im Gleichgewichte sind. Die Kräfte ertheilen mithin jedem Systeme eine gewisse Bewegung, und offenbar beiden dieselbe; diese Bewegungen stören auch einander gar nicht, sondern die Systeme begleiten einander nur fortwährend; man kann also beide eben so gut als ein einziges betrachten, an welchem mithin die Kräfte von den ursprünglichen ganzen Intensitäten einander nicht Gleichgewicht halten würden; dies ist aber gegen die Voraussetzung. Was hier von den doppelten und den halben Intensitäten gesetzt ist, läßt sich eben so leicht auf die  $n$ -fachen Intensitäten oder die  $n$ ten Theile derselben anwenden, und gilt mithin auch allgemein für jede beliebige Aenderung der Intensitäten nach einem gemeinsamen Verhältnisse.

Wenn also an dem vorgelegten Systeme von vier Punkten Kräfte angebracht werden, deren Richtungen und Intensitäts-Verhältnisse den obigen Bedingungen genügen, und es bestände zwischen ihnen doch nicht Gleichgewicht; so gäbe es überhaupt gar keine Kräfte, die, an dem Systeme angebracht, einander Gleichgewicht hielten; was dem in §. 54. Bewiesenen widerspricht.

56. Es sei ferner ein System von beliebig vielen Punkten gegeben, zwischen deren gegenseitigen Abständen eine Bedingungsgleichung Statt finde, nämlich

$$L = f(l, m, n, p, q, r, p', q', r', \dots) = 0.$$

In dieser Gleichung bedeuten  $l, m, n$  die Abstände zwischen dreien der Punkte, nämlich  $A, B, C$ , ferner  $p, q, r$  die Entfernungen



eines vierten (D) von diesen, eben so  $p', q', r'$  die eines fünften  $D'$  ebenfalls von A, B, C; u. s. f. Denn welche Gleichung zwischen den gegenseitigen Entfernungen der Punkte auch gegeben sei, so kann doch der Abstand zwischen je zwei Punkten wie  $DD'$ , ausgedrückt werden durch die Entfernungen derselben von drei anderen A, B, C, und die Abstände zwischen diesen A, B, C. Man kann also annehmen, daß in der Gleichung  $L=0$  nur die Entfernungen der drei Punkte A, B, C von einander, und die jedes anderen von diesen dreien vorkommen. Ist  $n$  die Anzahl der Punkte des Systemes, so hat man auf die Weise  $n-3$  Tetraeder, wie  $DABC, D'ABC$ , u. s. f. zu betrachten, welche das Dreieck ABC, dessen Seiten  $l, m, n$  sind, zu gemeinsamer Grundfläche haben. Man zerlege die Kräfte  $P, P'$  an D,  $D'$  .. beziehungsweise nach den Kanten  $p, q, r; p', q', r'; \dots$  in die Componenten  $u, v, w; u', v', w'; \dots$ , und bringe an den gemeinsamen Endpunkten A, B, C dieser Kanten die in jede derselben fallende Componente in ihrer Richtung und in entgegengesetzter an; also z. B. an dem Punkte A, in welchem  $p, p'$  .. zusammentreffen, die Kräfte  $+u$  und  $-u$  in der Richtung von  $p$ ,  $+u'$  und  $-u'$  in der von  $p'$ , u. s. f. Das Gleichgewicht wird nicht gestört, wenn sämtliche Kanten unveränderlich werden; alsdann halten aber in jeder der Kanten  $p, q, r, p', q', r', \dots$  die beiden gleichen und entgegengerichteten Componenten, wie z. B.  $u$  an D und  $-u$  an A, in der Kante  $p$ , einander Gleichgewicht; folglich muß auch zwischen den noch übrigen an A, B, C wirkenden Kräften Gleichgewicht bestehen. Diese sind  $u, u'$  .. an A,  $v, v'$  .. an B,  $w, w'$  .. an C, welche von D,  $D'$  .. nach diesen Punkten übergetragen sind; außer ihnen noch die an A, B, C wirkenden Kräfte (sie heißen  $Q, Q', Q''$ ), welche mit den übrigen ( $P, P', \dots$ ) im Gleichgewichte sind. Es seien  $R, R', R''$  die Resultanten von  $Q, u, u'$  .. an A,  $Q', v, v'$  .. an B,  $Q'', w, w'$  .. an C; so muß zwischen  $R, R', R''$  Gleichgewicht bestehen; diese drei Kräfte müssen also in die Ebene des Dreieckes ABC fallen, und sich nach den Seiten  $l,$

$m, n$ , desselben in je zwei gleiche und entgegengerichtete zerlegen lassen. Hieraus folgt, daß die Kräfte des Systemes, nämlich  $Q, Q', Q'', P, P', \dots$ , welche einander Gleichgewicht halten, und sich mithin überhaupt in je zwei gleiche und entgegengerichtete müssen zerlegen lassen, sich allemal auch auf diese bestimmte Weise, nämlich nach den Kanten der Tetraeder  $DABC, D'ABC, \dots$  in je zwei gleiche und entgegengerichtete zerlegen lassen.

Diese Zerlegung vorausgesetzt, denke man sich die sämtlichen nach  $D', D'', \dots$  gerichteten Kanten, wie  $p', q', r'; p'', q'', r'' \dots$  unveränderlich; es bleiben also nur noch die 6 Kanten  $l, m, n, p, q, r$  des Tetraeders  $DABC$  veränderlich. Die unveränderlichen Kanten sind für sich im Gleichgewichte, und stören die Bewegungen der Punkte  $D, A, B, C$  gar nicht; also muß auch an dem Tetraeder  $DABC$ , welches nunmehr als gänzlich frei zu betrachten ist, Gleichgewicht bestehen, und mithin müssen die in den Kanten desselben ( $l, m, n, p, q, r$ ) wirkenden, einander paarweise gleichen und entgegengerichteten Kräfte sich verhalten, wie die Ableitungen der Function  $f(l, m, n, p, q, r, \dots)$  nach  $l, m, n, p, q, r$ . Werden also die beiden gleichen und entgegengerichteten Kräfte in der Kante  $p$  durch  $\lambda \frac{df}{dp}$  ausgedrückt, so sind die in den Kanten  $l, m, n, p, q, r$  wirkenden gleichen und entgegengerichteten Kräfte beziehungsweise gleich  $\lambda \frac{df}{dl}, \lambda \frac{df}{dm}, \lambda \frac{df}{dn}, \lambda \frac{df}{dp}, \lambda \frac{df}{dq}, \lambda \frac{df}{dr}$ . Wendet man dieselben Betrachtungen auf das Tetraeder  $D'ABC$  an, indem man sich jetzt  $p', q', r'$  als veränderlich, dagegen  $p, q, r$  als unveränderlich vorstellt, so müssen die nach den Kanten von  $D'ABC$  gerichteten Kräfte wieder den Ableitungen von  $f$  nach  $l, m, n, p', q', r'$  proportional sein; und da die Kräfte in den Kanten  $l, m, n$  dieselben sind, wie vorhin, nämlich  $\lambda \frac{df}{dl}, \lambda \frac{df}{dm}, \lambda \frac{df}{dn}$ ; so sind auch die nach  $p', q', r'$  gerichteten Kräfte gleich  $\lambda \frac{df}{dp'}, \lambda \frac{df}{dq'}, \lambda \frac{df}{dr'}$ . u. s. f.

Werden diese Kräfte sämmtlich nach den Axen  $x, y, z$  gelegt, so erhält man für die Componenten der Kraft  $P$  an dem Punkte  $D$ , dessen Coordinaten  $x, y, z$  seien, ganz wie in §. 54.

$$X = \lambda \frac{dL}{dx}, \quad Y = \lambda \frac{dL}{dy}, \quad Z = \lambda \frac{dL}{dz}.$$

Eben so für die Componenten der Kraft  $P'$ , an  $D'$ , wenn  $x', y', z'$  die Coordinaten von  $D'$  sind:

$$X' = \lambda \frac{dL}{dx'}, \quad Y' = \lambda \frac{dL}{dy'}, \quad Z' = \lambda \frac{dL}{dz'}.$$

In dem Punkte  $A$  wirken nach den Ranten  $l, m, p, p', p''$  die Kräfte  $\lambda \frac{df}{dl}, \lambda \frac{df}{dm}, -\lambda \frac{df}{dp}, -\lambda \frac{df}{dp'}, \dots$  Die Componenten der Kraft  $\lambda \frac{df}{dp}$  an  $D$  nach  $x, y, z$  sind, nach §. 55.,  $\lambda \frac{df}{dp} \cdot \frac{dp}{dx}, \lambda \frac{df}{dp} \cdot \frac{dp}{dy}, \lambda \frac{df}{dp} \cdot \frac{dp}{dz}$ ; dieselben Componenten, aber mit entgegengesetzten Zeichen, gehören der in  $A$  nach der Richtung  $p$  wirkenden Kraft. Es seien  $x_0, y_0, z_0$  die Coordinaten von  $A$ ,  $x, y, z$  die von  $D$ , wie vorher, so ist

$$p^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

$$\text{folglich} \quad \frac{dp}{dx} = \frac{x - x_0}{p} = -\frac{dx_0}{p}; \quad \text{eben so} \quad \frac{dp}{dy} = -\frac{dy_0}{p},$$

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{dz_0}{p}.$$

Folglich sind die Componenten der an  $A$  nach der Richtung  $p$  wirkenden Kraft, nach Größe und Zeichen:

$$\lambda \frac{df}{dp} \cdot \frac{dp}{dx_0}, \quad \lambda \frac{df}{dp} \cdot \frac{dp}{dy_0}, \quad \lambda \frac{df}{dp} \cdot \frac{dp}{dz_0}.$$

Es seien noch  $x_1, y_1, z_1$  die Coordinaten von  $B$ ,  $x_2, y_2, z_2$  die von  $C$ , und mithin

$$l^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2$$

$$m^2 = (x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2 + (z_0 - z_2)^2,$$

so sind wiederum

$$\lambda \frac{df}{dl} \cdot \frac{dl}{dx_0}, \lambda \frac{df}{dl} \cdot \frac{dl}{dy_0}, \lambda \frac{df}{dl} \cdot \frac{dl}{dz_0}$$

die Componenten von  $\lambda \frac{df}{dl}$  nach  $x, y, z$ ; eben so  $\lambda \frac{df}{dm} \cdot \frac{dm}{dx_0}, \dots$

die Componenten von  $\lambda \frac{df}{dm}$  nach  $x, y, z$ ; folglich erhält man überhaupt, wenn  $X_0, Y_0, Z_0$  die Componenten nach  $x, y, z$  der Resultante aller an A wirkenden Kräfte bedeuten:

$$X_0 = \lambda \left( \frac{df}{dl} \cdot \frac{dl}{dx_0} + \frac{df}{dm} \cdot \frac{dm}{dx_0} + \frac{df}{dp} \cdot \frac{dp}{dx_0} + \frac{df}{dp'} \cdot \frac{dp'}{dx_0} + \dots \right)$$

oder 
$$X_0 = \lambda \frac{dL}{dx_0},$$

und eben so 
$$Y_0 = \lambda \frac{dL}{dy_0}, \quad Z_0 = \lambda \frac{dL}{dz_0}.$$

Auf gleiche Weise ergeben sich als Componenten der an B wirkenden Kraft:

$$X_1 = \lambda \frac{dL}{dx_1}, \quad Y_1 = \lambda \frac{dL}{dy_1}, \quad Z_1 = \lambda \frac{dL}{dz_1};$$

und für den Punkt C:

$$X_2 = \lambda \frac{dL}{dx_2}, \quad Y_2 = \lambda \frac{dL}{dy_2}, \quad Z_2 = \lambda \frac{dL}{dz_2}.$$

Also sind überhaupt

$$\lambda \frac{dL}{dx}, \lambda \frac{dL}{dy}, \lambda \frac{dL}{dz}$$

die Componenten nach  $x, y, z$ , der an einem Punkte des Systems, dessen Coordinaten  $x, y, z$  sind, anzubringenden Kraft.

Oben ist vorausgesetzt, daß in der Gleichung  $L = f(l, m, n, p, q, \dots) = 0$  nur einige der gegenseitigen Entfernungen der Punkte vorkommen, durch welche alle übrigen sich ausdrücken lassen. Wenn aber die Gleichung ursprünglich zwischen beliebigen oder zwischen allen Entfernungen ohne Unterschied gegeben ist, und nun die Ent-

fernungen durch Coordinaten ausgedrückt werden, so erhält man eine Bedingungsgleichung zwischen den Coordinaten der Punkte, die ganz einerlei sein muß mit derjenigen, welche man nach Elimination einiger Entfernungen zwischen den Coordinaten erhalten würde. Denn es sei z. B.  $\varrho$  der Abstand zwischen D und D', und die gegebene Gleichung sei:

$$L = f(l, m, n, p, q, r, p', q', r', \varrho \dots) = 0.$$

Der Abstand  $\varrho$  läßt sich durch die Abstände der Punkte D und D' von A, B, C und die Seiten l, m, n des Dreiecks ABC ausdrücken; also ist

$$\varrho = \varphi(l, m, n, p, q, r, p', q', r'),$$

wo  $\varphi$  eine gewisse Function ist, die hier nicht weiter gesucht wird.

Wenn man nun alle Entfernungen l, m, n, ... r' durch Coordinaten ausdrückt, so giebt die vorstehende Function  $\varphi$  den Ausdruck von  $\varrho$  in Coordinaten; dieser aber kann kein anderer sein als der bekannte:

$$\varrho = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2};$$

folglich ergibt sich durch Einführung der Function  $\varphi$  in die Gleichung  $L = 0$ , keine andere Gleichung in Coordinaten, als wenn man in der Gleichung  $L = 0$  sofort alle Abstände durch Coordinaten ausdrückt, ohne einen derselben zu eliminiren.

Da es nun nach dem Obigen, um die Componenten der an einem Punkte anzubringenden Kraft, nach den Axen x, y, z, auszudrücken, nur auf die Ableitungen von L nach den Coordinaten dieses Punktes ankommt; so folgt, daß man nicht nöthig hat, an der ursprünglichen Bedingungsgleichung  $L = 0$ , zwischen den gegenseitigen Entfernungen der Punkte, irgend eine Veränderung vorzunehmen; sondern daß vielmehr die Ableitungen von L nach den Coordinaten jedes Punktes, multiplicirt in einen für alle Punkte unveränderlichen, sonst aber beliebigen Coefficienten  $\lambda$ , die Componenten der an dem Punkte anzubringenden Kraft ausdrücken. Und werden an dem Systeme solche Kräfte angebracht,

so muß nothwendig Gleichgewicht bestehen, welcher Werth auch dem Coefficienten  $\lambda$  beigelegt worden sei; wie in §. 54. erläutert worden.

57. Finden mehrere Bedingungsgleichungen zwischen den gegenseitigen Entfernungen der Punkte Statt, nämlich  $L=0$ ,  $M=0$  n. s. f.; so kann man erstens an dem Systeme Kräfte anbringen, deren Componenten  $\lambda \frac{dL}{dx}$ ,  $\lambda \frac{dL}{dy}$ ,  $\lambda \frac{dL}{dz}$  sind, und die einander Gleichgewicht halten, weil die Gleichung  $L=0$  Statt findet. Eben so kann man Kräfte von den Componenten  $\mu \frac{dM}{dx}$ ,  $\mu \frac{dM}{dy}$ ,  $\mu \frac{dM}{dz}$  anbringen, die wieder wegen der Gleichung  $M=0$ , unter einander im Gleichgewichte sind; u. s. f. Also besteht überhaupt Gleichgewicht zwischen Kräften, deren Componenten sind:

$$\lambda \frac{dL}{dx} + \mu \frac{dM}{dx} + \dots, \quad \lambda \frac{dL}{dy} + \mu \frac{dM}{dy} + \dots, \quad \lambda \frac{dL}{dz} + \mu \frac{dM}{dz} + \dots$$

Diese Kräfte sind, wie man sieht, die Resultanten von denjenigen, welche wegen jeder einzelnen Bedingung zum Gleichgewichte erfordert werden. Um einzusehen, daß nur diese an dem Systeme einander Gleichgewicht halten können, denke man sich alle Bedingungen bis auf eine z. B.  $L=0$ , hinweg, zugleich aber an der Stelle von jenen passende Kräfte angebracht, welche das Gleichgewicht ungestört erhalten; was offenbar möglich ist. Alsdann besteht nur noch die Bedingung  $L=0$ , vermöge deren nur Kräfte von den Componenten  $\lambda \frac{dL}{dx}$ , ... an dem Systeme im Gleichgewichte sein können. Also erfordert jede einzelne Gleichung zum Gleichgewichte immer die nämlichen Kräfte, als wenn sie allein vorhanden wäre; daher müssen, wie unmittelbar folgt, bei mehreren Bedingungen die Kräfte, welche im Gleichgewichte sind, Resultanten von solchen sein, wie sie jede einzelne Bedingung fordert; w. z. b. w.

58. Nun stelle man sich vor, daß einige von den Punkten des Systemes unbeweglich werden; so ist das System nicht mehr frei wie bisher, das Gleichgewicht besteht aber fort zwischen den nämlichen Kräften, welche so eben angegeben wurden. An den unbeweglichen Punkten vorhandenen Kräfte sind jedoch nunmehr nur Widerstände, welche diese Punkte dem auf sie ausgeübten Drucke der übrigen Kräfte entgegensetzen. Sieht man daher von denselben ab, so besteht das Gleichgewicht an den übrigen Punkten unter Kräften, deren Componenten sind:

$$\lambda \frac{dL}{dx} + \mu \frac{dM}{dx} + \dots, \text{ u. s. w., wie oben; dasselbe kommt jedoch}$$

nur vermittelt der Widerstände jener unbeweglichen Punkte zu Stande. Indem man alsdann in den Gleichungen zwischen den gegenseitigen Entfernungen, nämlich  $L=0, M=0, \dots$  die Coordinaten der unbeweglichen Punkte, als bloße Constanten, aufhebt, gehen dieselben in irgend welche Gleichungen zwischen den Coordinaten der beweglichen Punkte des Systemes über. Umgekehrt, wenn eine Gleichung zwischen den Coordinaten der beweglichen Punkte gegeben ist, welche sich nicht auf eine Gleichung zwischen den gegenseitigen Entfernungen dieser Punkte zurückführen läßt, so kann man sich immer die gegenseitigen Entfernungen der Punkte ausgedrückt denken als Functionen der Coordinaten dreier beliebig im Raume angenommener unbeweglicher Punkte, und der Abstände der beweglichen Punkte von diesen; und da die Coordinaten der unbeweglichen Punkte, als Constanten, nicht in Betracht kommen, so hat man wieder eine Gleichung zwischen den gegenseitigen Entfernungen aller Punkte unter denen drei unbewegliche sich befinden. Also müssen die Kräfte an den beweglichen Punkten, welche an dem System im Gleichgewicht sind, sich eben so ausdrücken lassen, wie oben. Uebrigens hat man die Bedingungsgleichungen  $L=0, M=0$ , zwischen den Coordinaten zu nehmen wie sie sind, um aus ihnen die Ableitung  $\frac{dL}{dx}$ , u. s. f. zu entwickeln; denn wenn man

zuerst die Coordinaten vermittelst der Entfernungen, und nachher wieder die Entfernungen durch die Coordinaten ausdrückt, so bleiben die Gleichungen zwischen den Coordinaten ganz die nämlichen, welche sie anfänglich waren, wie schon in §. 55. bemerkt worden.

Hiermit ist folgender allgemeine Lehrsatz der Statik bewiesen:

Wenn zwischen den Coordinaten der Punkte eines Systemes die Bedingungsgleichungen

$$L=0, M=0, N=0, \dots$$

gegeben sind, so lassen die den Axen  $x, y, z$  parallelen Componenten von Kräften, welche, an dem Systeme gleichzeitig angebracht, einander Gleichgewicht halten, für irgend einen der Punkte, dessen Coordinaten  $x, y, z$ , sich immer ausdrücken wie folgt:

$$X = \lambda \frac{dL}{dx} + \mu \frac{dM}{dx} + \nu \frac{dN}{dx} + \dots$$

$$Y = \lambda \frac{dL}{dy} + \mu \frac{dM}{dy} + \nu \frac{dN}{dy} + \dots \quad a.$$

$$Z = \lambda \frac{dL}{dz} + \mu \frac{dM}{dz} + \nu \frac{dN}{dz} + \dots$$

Diese Componenten sind mithin, für einen anderen Punkt des Systemes, dessen Coordinaten  $x', y', z'$ :

$$X' = \lambda \frac{dL}{dx'} + \mu \frac{dM}{dx'} + \nu \frac{dN}{dx'} + \dots$$

$$Y' = \lambda \frac{dL}{dy'} + \mu \frac{dM}{dy'} + \nu \frac{dN}{dy'} + \dots \quad b.$$

$$Z' = \lambda \frac{dL}{dz'} + \mu \frac{dM}{dz'} + \nu \frac{dN}{dz'} + \dots$$

u. s. f. für alle Punkte des Systemes.

59. Um aus diesen Gleichungen die Bedingungen des Gleichgewichtes irgend eines Systemes herzuleiten, muß man aus



denselben die unbestimmten Coefficienten  $\lambda, \mu, \nu, \dots$  eliminirt; die alsdann sich ergebenden Gleichungen zwischen den Coordinaten der Punkte und den Componenten der Kräfte sind die gesuchten Bedingungen.

Es sei z. B. ein freies festes System von  $n$  Punkten gegeben; so sind von den  $\frac{n(n-1)}{2}$  gegenseitigen Entfernungen der Punkte  $3n-6$  als gegeben anzusehen, durch welche alle übrigen bestimmt werden. Man hat also  $3n-6$  Bedingungsgleichungen:

$$L = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 - a^2 = 0$$

$$M = (x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z'')^2 - a'^2 = 0$$

$$N = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2 - a''^2 = 0$$

u. s. f.

Der obige Lehrsatz giebt für jeden Punkt drei, im Ganzen also  $3n$  Gleichungen; in denselben kommen aber  $3n-6$  unbestimmte Coefficienten  $\lambda, \mu, \nu, \dots$  vor, nach deren Elimination mithin 6 Bedingungen des Gleichgewichtes übrig bleiben. Um diese zu finden, bemerke man, daß z. B.  $\frac{dL}{dx} = 2(x - x') = -\frac{dL}{dx'}$ , also

$$\frac{dL}{dx} + \frac{dL}{dx'} = 0, \text{ eben so } \frac{dM}{dx} + \frac{dM}{dx''} = 0, \frac{dN}{dx'} + \frac{dN}{dx''} = 0, \dots$$

Nun ist, nach obigem Satze:

$$X = \lambda \frac{dL}{dx} + \mu \frac{dM}{dx} + \nu \frac{dN}{dx} + \dots$$

$$X' = \lambda \frac{dL}{dx'} + \mu \frac{dM}{dx'} + \nu \frac{dN}{dx'} + \dots, \quad \text{a.}$$

$$X'' = \lambda \frac{dL}{dx''} + \mu \frac{dM}{dx''} + \nu \frac{dN}{dx''} + \dots$$

. . . . .

$$X^{(n-1)} = \lambda \frac{dL}{dx^{(n-1)}} + \mu \frac{dM}{dx^{(n-1)}} + \nu \frac{dN}{dx^{(n-1)}} + \dots$$

Addirt man alle diese Gleichungen, und bemerkt, daß

$\frac{L}{x} + \frac{dL}{dx} = 0$ , alle übrigen Ableitungen von  $L$  aber, wie  $\frac{L}{x''}$ , ... sämmtlich Null sind, und daß Aehnliches für die Ableitungen von  $M, N, \dots$  gilt; so kommt  $X + X' + X'' + \dots + X^{(n-1)} = 0$ , oder  $\Sigma X = 0$ . Auf gleiche Weise ergibt sich  $\Sigma Y = 0$ ,  $\Sigma Z = 0$ ; hiermit sind also drei Bedingungen des Gleichgewichtes gefunden. Man schreibe noch:

$$Y = \lambda \frac{dL}{dy} + \mu \frac{dM}{dy} + \nu \frac{dN}{dy} + \dots$$

$$Y' = \lambda \frac{dL}{dy'} + \mu \frac{dM}{dy'} + \nu \frac{dN}{dy'} + \dots \quad b.$$

u. s. w.,

multiplizire die Gleichungen a. der Reihe nach mit  $y, y', y'', \dots$ , die b. mit  $x, x', x'', \dots$  und subtrahire die zweiten Producte von den ersten, so kommt

$$Xy - Yx + X'y' - Y'x' + \dots = \Sigma(Xy - Yx) = \lambda l + \mu m + \nu n + \dots,$$

in welcher Gleichung die zur Abkürzung eingeführten Zeichen  $l, m, n, \dots$  folgende Werthe haben, die man sogleich findet, wenn

man sich erinnert, daß  $\frac{dL}{dx''} = 0$ ,  $\frac{dL}{dy''} = 0$ ,  $\frac{dM}{dx'} = 0$ ,  $\frac{dM}{dy'} = 0$ ,

$\frac{dN}{dx} = 0$ ,  $\frac{dN}{dy} = 0$ , u. s. w.; nämlich

$$l = y \frac{dL}{dx} - x \frac{dL}{dy} + y' \frac{dL}{dx'} - x' \frac{dL}{dy'},$$

$$m = y \frac{dM}{dx} - x \frac{dM}{dy} + y'' \frac{dM}{dx''} - x'' \frac{dM}{dy''},$$

$$n = y' \frac{dN}{dx} - x' \frac{dN}{dy} + y'' \frac{dN}{dx''} - x'' \frac{dN}{dy''},$$

. . . . .

Da nun  $\frac{dL}{dx} + \frac{dL}{dx'} = 0$ ,  $\frac{dL}{dy} + \frac{dL}{dy'} = 0$ , so ergibt sich:

$$l = (y - y') \frac{dL}{dx} - (x - x') \frac{dL}{dy},$$

und weil  $\frac{dL}{dx} = 2(x - x')$ ,  $\frac{dL}{dy} = 2(y - y')$ , so folgt offenbar  $l = 0$ .

Auf gleiche Weise erhält man  $m = 0$ ,  $n = 0$ , u. s. f.; mithin

$$\Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

Auf dieselbe Art lassen sich auch die beiden Bedingungen  $\Sigma(Zy - Yz) = 0$ ,  $\Sigma(Xz - Zx) = 0$  herleiten; wodurch die sechs Bedingungen für das Gleichgewicht eines frei beweglichen festen Systemes auf's Neue, übereinstimmend mit §. 17., gefunden sind.

60. Aus den allgemeinen Formeln des §. 58. lassen sich die unbestimmten Coefficienten  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , .. auf eine allgemeine, von der Form der zwischen den Coordinaten der Punkte obwaltenden Gleichungen  $L = 0$ ,  $M = 0$ , .. ganz unabhängige Art eliminiren, wodurch ein für alle Systeme gültiger Satz erhalten wird, welche unter dem Namen des Satzes der virtuellen Geschwindigkeiten bekannt ist. Um denselben gehörig darzustellen, ist erforderlich, einige Bemerkungen über die Bewegung voranzuschicken, welche sich an die ersten §§. der Einleitung anschließen.

Wirken auf einen anfänglich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in gerader Linie fortgehenden Punkt nach einander mehrere Kräfte in beliebigen Richtungen, so ertheilt jede dem Punkt eine ihrer Intensität proportionale Geschwindigkeit, die sich mit der schon vorhandenen, nach der Regel des Parallelogrammes, in eine resultirende Geschwindigkeit zusammensetzt. Die Bahn des Punktes ist also im Allgemeinen eine von mehreren Geraden gebildete gebrochene Linie, und seine Geschwindigkeit, nach Richtung und Größe, in jedem Augenblicke gleich der Resultante aus der anfänglichen und den inzwischen durch die Kräfte ihm er-

theilten Geschwindigkeiten. Letzteres gilt unter allen Umständen; hier kommt es nun darauf an, den Ausdruck der Geschwindigkeit unter der Voraussetzung zu entwickeln, daß die Kräfte ununterbrochen oder stetig auf den Punct einwirken, und seine Geschwindigkeit in jedem unendlich kleine Zeittheile unendlich wenig verändern. Dieselbe ist alsdann stetig veränderlich, und kann nicht mehr, wie die gleichförmige, durch den in der Zeiteinheit durchlaufenen Weg gemessen werden; man findet aber ihr richtiges Maas leicht auf folgende Art: Die den Axen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  parallelen Componenten der Geschwindigkeit, zur Zeit  $t$ , seien  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ; nach Ablauf der Zeit  $dt$ , also zur Zeit  $t + dt$ , seien sie  $u + du$ ,  $v + dv$ ,  $w + dw$ ; nach der Voraussetzung sind  $du$ ,  $dv$ ,  $dw$  unendlich klein, wenn  $dt$  unendlich klein ist. Man kann immer annehmen, daß die den Axen parallelen Componenten der sämtlichen Kräfte, welche in der Zeit  $dt$  auf den Punct wirken, nach jeder Axe in einerlei Sinne wirken, und mithin die Geschwindigkeit nach jeder Axe in der Zeit  $dt$  entweder beständig vermehren oder beständig vermindern. Denn fände in dieser Zeit ein Wechsel zwischen Ab- und Zunahme in Bezug auf eine der Geschwindigkeiten  $u$ ,  $v$ ,  $w$  Statt, so könnte man  $dt$  kleiner als zuvor und klein genug annehmen, um denselben auszuschließen. Bezeichnet nun  $dx$  den in der Zeit  $dt$  nach der Richtung der  $x$  durchlaufenen Weg, also die Projection des von dem Puncte in dieser Zeit durchlaufenen Weges auf die Axe  $x$ , so ist klar, daß derselbe lediglich durch die mit  $x$  parallelen, von  $u$  bis  $u + du$  stetig zu- oder abnehmenden Componenten der Geschwindigkeit des Punctes bedingt wird. Blicke die Geschwindigkeit nach  $x$  während der Zeit  $dt$  beständig gleich  $u$ , so würde der durchlaufene Weg gleich  $u dt$  sein; wäre dagegen die Geschwindigkeit während dieser Zeit  $dt$  beständig gleich  $u + du$ , so wäre  $(u + du) dt$  der durchlaufene Weg. Da aber die Geschwindigkeit von  $u$  bis  $u + du$  beständig wächst oder beständig abnimmt, so liegt auch der durchlaufene Weg  $dx$  nothwendig zwischen den Grenzen  $u dt$

$$\frac{dL}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dL}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{dL}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{dL}{dx'} \cdot \frac{dx'}{dt} + \frac{dL}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dt} + \frac{dL}{dz'} \cdot \frac{dz'}{dt}$$

oder in kürzerer Bezeichnung der Ausdruck

$$\Sigma \left( \frac{dL}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dL}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{dL}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \right)$$

nichts Anderes als  $\frac{dL}{dt}$ , und mithin gleich Null ist; und ebenso:

$$\Sigma \left( \frac{dM}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dM}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{dM}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \right) = \frac{dM}{dt} = 0, \quad \text{u. s. w.}$$

so erhält man

$$X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} + X' \frac{dx'}{dt} + Y' \frac{dy'}{dt} + Z' \frac{dz'}{dt} + \dots = 0$$

$$\text{oder} \quad \Sigma \left( X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right) = 0. \quad A.$$

Es sei  $P$  die Intensität der an dem Punkte  $(x, y, z)$  wirkenden Kraft,  $\frac{ds}{dt}$  die Geschwindigkeit dieses Punktes, beide positiv genommen; so ist

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}}.$$

Man setze noch  $X = P \cos \alpha$ ,  $Y = P \cos \beta$ ,  $Z = P \cos \gamma$ ,

$$\frac{dx}{ds} = \cos a, \quad \frac{dy}{ds} = \cos b, \quad \frac{dz}{ds} = \cos c,$$

und  $\cos \alpha \cos a + \cos \beta \cos b + \cos \gamma \cos c = \cos \theta$ ,

so wird

$$= P \frac{ds}{dt} (\cos \alpha \cos a + \cos \beta \cos b + \cos \gamma \cos c) = P \frac{ds}{dt} \cdot \cos \theta,$$

und die obige Gleichung A geht mithin in folgende über:

$$\Sigma \left( P \frac{ds}{dt} \cdot \cos \theta \right) = 0. \quad B.$$

Diese Gleichung enthält nun den Satz der virtuellen Geschwindigkeiten, auf die einfachste Form gebracht. In derselben bezeichnet  $P$  die Intensität der auf den Punkt  $(x, y, z)$  wirkenden Kraft,  $\frac{ds}{dt}$  die Geschwindigkeit dieses Punktes in irgend einem Augenblicke der vorausgesetzten Bewegung des Systemes (beide,  $P$  und  $\frac{ds}{dt}$ , sind positiv zu nehmen); ferner  $\Theta$  den Winkel, welchen die Richtung der Kraft  $P$  mit der Richtung der Geschwindigkeit einschließt. Die Bewegung des Systemes ist schlechthin jede mögliche (nur durch die Bedingungen  $\frac{dL}{dt}=0$ ,  $\frac{dM}{dt}=0$ , ... eingeschränkt, mit denen sie immer verträglich sein muß); dieses wird durch den dafür gebräuchlichen Ausdruck virtuelle Bewegung einigermaßen angedeutet. Die Geschwindigkeit eines Punktes in dieser virtuellen Bewegung heißt seine virtuelle Geschwindigkeit, und das Product aus derselben in den Ausdruck  $P \cos \Theta$  das virtuelle Moment der Kraft  $P$ , welches mithin gleich  $P \cos \Theta \cdot \frac{ds}{dt}$  ist. Zerlegt man die Kraft  $P$  nach der Richtung der virtuellen Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes und nach einer darauf senkrechten, so ist die erstere dieser beiden Componenten gleich  $P \cos \Theta$ ; das virtuelle Moment ist mithin das Product aus der virtuellen Geschwindigkeit in die nach der Richtung derselben wirkende Componente der Kraft. Oder zerlegt man die Geschwindigkeit  $\frac{ds}{dt}$  nach der Richtung der Kraft  $P$ , und einer darauf senkrechten, so ist die erstere Componente  $\frac{ds}{dt} \cdot \cos \Theta$ ; das virtuelle Moment ist mithin auch gleich dem Product aus der Kraft  $P$  in die nach der Richtung derselben geschätzte virtuelle Geschwindigkeit. Das virtuelle Moment ist positiv oder negativ, je nachdem die Neigung ( $\Theta$ ) der Kraft gegen die Richtung der virtuellen Geschwindigkeit spitz oder

stumpf ist, oder je nachdem die in die Richtung der virtuellen Geschwindigkeit fallende Componente von  $P$  in dem Sinne der Geschwindigkeit oder demselben entgegen wirkt.

Der in der Gleichung B. enthaltene Satz läßt sich nun folgendermaßen aussprechen:

Denkt man sich ein System in irgend einer beliebigen, nur mit seinen Bedingungen verträglichen, Bewegung begriffen, und, indem es durch irgend eine Stellung hindurchgeht, gleichzeitig von Kräften getroffen, zwischen denen Gleichgewicht besteht; so ist die Summe der virtuellen Momente aller dieser Kräfte Null.

Man kann auch aus der Formel B. oder vielmehr aus der ihr gleichgeltenden A. die allgemeinen Formeln des §. 58. herleiten, und damit beweisen, daß auch umgekehrt an dem in irgend einer zulässigen Stellung gedachten Systeme Gleichgewicht besteht, wenn für jede mögliche (virtuelle) Bewegung von dieser Stellung aus, die Summe der virtuellen Momente Null ist. Denn sei das System z. B. zweien Bedingungen  $L=0$ ,  $M=0$  unterworfen. Man hat nach A.

$$\Sigma \left( X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right) = 0,$$

$$\text{ferner} \quad \frac{dL}{dt} = \Sigma \left( \frac{dL}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dL}{dy} \frac{dy}{dt} + \frac{dL}{dz} \frac{dz}{dt} \right) = 0,$$

$$\frac{dM}{dt} = \Sigma \left( \frac{dM}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dM}{dy} \frac{dy}{dt} + \frac{dM}{dz} \frac{dz}{dt} \right) = 0.$$

Multipliziert man die zweite dieser Gleichungen mit  $\lambda$ , die dritte mit  $\mu$  und addirt die Producte zur ersten, so kommt:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \left( \left( X + \lambda \frac{dL}{dx} + \mu \frac{dM}{dx} \right) \frac{dx}{dt} + \left( Y + \lambda \frac{dL}{dy} + \mu \frac{dM}{dy} \right) \frac{dy}{dt} \right. \\ \left. + \left( Z + \lambda \frac{dL}{dz} + \mu \frac{dM}{dz} \right) \frac{dz}{dt} \right) = 0. \end{aligned} \right\}$$

Man bestimme die beiden Coefficienten  $\lambda$ ,  $\mu$  so, daß sei

oder weil  $\cos \alpha = \sin \gamma \cos \varepsilon$ ,  $\cos \beta = \sin \gamma \sin \varepsilon$ , u. s. w.

$$Ra = \Sigma P (x \cos \alpha + y \cos \beta)$$

$$Rb = \Sigma P (y \cos \alpha - x \cos \beta).$$

Projicirt man die Kräfte eben so auf die Ebene  $xz$ , so erhält man wieder einen Mittelpunkt. Bezeichnet man die Coordinaten desselben mit  $a'$ ,  $c'$ , so ist

$$Ra' = \Sigma P (x \cos \alpha + z \cos \gamma)$$

$$Rc' = \Sigma P (z \cos \alpha - x \cos \gamma).$$

Folglich ist

$$\Pi = \Sigma P (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) = R(a + a') - \Sigma P x \cos \alpha.$$

Setzt man  $\Sigma P x \cos \alpha = a'' \Sigma P \cos \alpha = Ra''$ , so ist offenbar  $a''$  die Abscisse des Schwerpunktes der mit  $x$ , also mit der Mittelfraft parallelen Componenten der Kräfte; d. h.  $a''$  ist die Abscisse des Centralpunktes; und

$$\Pi = R(a + a' - a'').$$

Denkt man sich nun an jedem der beiden Mittelpunkte in den Ebenen  $xy$  und  $xz$  die Kraft  $R$  in ihrer Richtung, und am Centralpunkte dieselbe Kraft in gerade umgekehrter Richtung angebracht, und wird die Abscisse des Schwerpunktes dieser drei parallelen Kräfte mit  $x_1$  bezeichnet, so ist offenbar  $x_1 = a + a' - a''$ , und mithin  $\Pi = Rx_1$ .

Man bemerke noch, daß der Werth von  $\Pi$  sich auch so ausdrücken läßt:  $\Pi = \Sigma P \int \cos \Theta ds$ , weil  $d\Pi = \Sigma P (\cos \alpha \cdot dx + \dots) = \Sigma P \cos \Theta ds$  ist (§. 61.). Offenbar ist aber  $\int \cos \Theta \cdot ds$  die Projection des von dem Angriffspunkte der Kraft  $P$  durchlaufenen Weges auf die (unveränderliche) Richtung der Kraft  $P$ , so wie  $x_1$  die Projection des von jenem Schwerpunkte durchlaufenen Weges auf die Richtung der Mittelfraft ist; und die Bedeutung der Gleichung  $\Pi = Rx_1 = \Sigma P \int \cos \Theta ds$  läßt sich mithin folgendermaßen aussprechen:

Denkt man sich ein System, an welchem Kräfte von unveränderlichen Richtungen und Intensitäten wirken, deren Mit-



$$X = \pm P \left( \frac{x-a}{r} \right), \quad Y = \pm P \left( \frac{y-b}{r} \right), \quad Z = \pm P \left( \frac{z-c}{r} \right).$$

Je nachdem die Kraft  $P$  ihren Angriffspunct  $B$  gegen den beweglichen Punct  $A$  hinzieht oder von ihm abstößt, muß in den stehenden Ausdrücken das eine oder das andere Zeichen genommen werden. Nun hat man nach der Formel A. in §. 6. wenn Gleichgewicht besteht

$$\sum \pm P \frac{((x-a)dx + (y-b)dy + (z-c)dz)}{r dt} = 0,$$

oder, weil  $(x-a)dx + (y-b)dy + (z-c)dz = r dr$ , mit Beseitigung von  $dt$ ,

$$\sum \pm P dr = 0.$$

Die Stellungen des Gleichgewichtes sind also solche, bei welchen in Bezug auf die Werthe der Function  $\sum \pm Pr$  das eintritt, was in §. 33. des ersten Theiles ein augenblicklicher Stillstand genannt worden ist, indem für diese Stellungen die Ableitung der Function Null wird. Dabei findet in der Regel in Bezug auf die Function  $\sum \pm Pr$  ein Wechsel zwischen Ab- und Zunahme also ein größter oder kleinster Werth Statt; doch müssen die Umstände in jedem einzelnen Falle näher untersucht werden. Uebrigens gilt in der Formel  $\sum \pm Pr$  das eine, z. B. wenn man will, das positive Vorzeichen von  $r$  für Kräfte, welche ihre Angriffspuncte gegen die unbeweglichen Puncte hinziehen; für abstoßende Kräfte dagegen das andere Zeichen.

In diesem Falle ist, wie man sieht, der Ausdruck  $\sum (X dx + Y dy + Z dz)$  unmittelbar integrabel. Dieses findet auch Statt, wenn die Intensitäten der nach festen Puncten gerichteten Kräfte  $P, P' \dots$  nicht constant, sondern beliebige Functionen der Abstände  $r, r', \dots$  ihrer Angriffspuncte von jenen festen Puncten sind. Es sei  $P = \varphi r, P' = \varphi_1 r',$  u. s. f., so wird für das Gleichgewicht

$$\pm \varphi r \cdot dr \pm \varphi_1 r' \cdot dr' \dots = 0,$$

also im Allgemeinen die Function  $\sum \pm \int \varphi r dr$  ein Maximum

oder Minimum. In diesem Ausdrucke kann man wieder die oberen Zeichen für anziehende, die unteren für abstoßende Kräfte nehmen.

Der Ausdruck  $\Sigma(X dx + Y dy + Z dz)$  ist auch noch integrabel, wenn die Kräfte in gegenseitigen Anziehungen oder Abstoßungen zwischen den beweglichen Punkten des Systemes bestehen, deren Intensitäten Functionen der Entfernungen sind. Denn es seien  $x, y, z$  die Coordinaten des Punktes A,  $x', y', z'$  die von B;  $r$  die Entfernung AB, und  $fr$  die gegenseitige Wirkung zwischen A und B; so sind die Componenten der Kraft  $fr$  an A

$$X = fr \left( \frac{x - x'}{r} \right), \quad Y = fr \left( \frac{y - y'}{r} \right), \quad Z = fr \left( \frac{z - z'}{r} \right),$$

und die der Kraft an B, welche der vorigen gleich und entgegengerichtet ist,

$$X' = fr \left( \frac{x' - x}{r} \right), \quad Y' = fr \left( \frac{y' - y}{r} \right), \quad Z' = fr \left( \frac{z' - z}{r} \right);$$

mithin erhält man, weil

$$(x - x')(dx - dx') + (y - y')(dy - dy') + (z - z')(dz - dz') = r dr,$$

$$X dx + Y dy + Z dz + X' dx' + Y' dy' + Z' dz' = fr \cdot dr.$$

Folglich ist überhaupt die Summe  $\Sigma(X dx + \dots) = \Sigma fr dr$ , und mithin wieder integrabel; auch ist ihr Integral, wenn Gleichgewicht besteht, im Allgemeinen ein Maximum oder Minimum, wie in den vorigen Fällen.

63. Bemerkenswerth ist die Anwendung des Satzes der virtuellen Geschwindigkeiten auf solche Fälle, in denen die Kräfte mit unveränderlichen Intensitäten in unveränderlichen Richtungen an ihren Angriffspunkten haften, in welcher Stellung das System sich auch befinde. In der Gleichung A. des §. 61. sind alsdann die Größen  $X, Y, Z$  beständig. Setzt man  $X = P \cos \alpha$ ,  $Y = P \cos \beta$ ,  $Z = P \cos \gamma$ , so wird dieselbe

$$\Sigma P (\cos \alpha \cdot dx + \cos \beta \cdot dy + \cos \gamma \cdot dz) = 0,$$

Also ist in diesem Falle, für das Gleichgewicht, die Function

$$\Pi = \Sigma P (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)$$

im Allgemeinen ein Maximum oder Minimum. Man denke sich ein beliebiges, aber nicht freies System, und es sei die Mittelfraft  $R$  aus allen  $P, P' \dots$ , welche in allen Stellungen des Systemes nach Richtung und Größe die nämliche bleibt, nicht Null. ferner wähle man die Axe der  $x$  ihr parallel. Alsdann  $\Sigma P \cos \alpha = R, \Sigma P \cos \beta = 0, \Sigma P \cos \gamma = 0$ . Nun projicirt man die Kräfte und Punkte des Systemes, in irgend einer Stellung gedacht, auf die Ebene  $xy$ , so erhält man ein System von Kräften in dieser Ebene, deren Mittelfraft wieder gleich  $R$ , nicht Null ist, und welche mithin einen Mittelpunkt haben. Um die Coordinaten desselben zu finden, verfähre man wie §. 3. Die Kräfte in der Ebene  $x, y$ , sind  $P \cos \alpha, P' \cos \alpha', \dots$  parallel mit  $x, P \cos \beta, P' \cos \beta', \dots$  parallel mit  $y$ ; die Coordinaten des gemeinsamen Angriffspunktes von  $P \cos \alpha$  und  $P \cos \beta$  ist  $x, y$ ; u. s. f. für die übrigen.

Bei Auffuchung des Mittelpunktes muß man sich vorstellen, daß die Kräfte in der Ebene  $xy$  sich um ihre Angriffspunkte drehen. Man setze, weil  $\cos \alpha^2 + \cos \beta^2 = 1 - \cos \gamma^2 = \sin^2 \gamma$  ist,  $\cos \alpha = \sin \gamma \cos \varepsilon, \cos \beta = \sin \gamma \sin \varepsilon$ ; so ist  $\varepsilon$  die Neigung der Kraft  $P \sin \gamma$ , d. i. der Projection von  $P$  auf die Ebene  $xy$ , gegen die Axe  $x$ ; welche Neigung allein bei der Drehung sich ändert, während  $\gamma$  ungeändert bleibt. Eben so sei  $\cos \alpha' = \sin \gamma' \cos \varepsilon', \cos \beta' = \sin \gamma' \sin \varepsilon'$ ; u. s. f. Nennt man nun  $\psi$  die Neigung der Resultante gegen die Axe  $x$ , nach einer gewissen Drehung der Kräfte, durch welche zugleich die Winkel  $\varepsilon, \varepsilon', \dots$  in  $\varepsilon + \psi, \varepsilon' + \psi, \dots$  übergehen, und werden die Coordinaten des Mittelpunktes durch  $a, b$  bezeichnet, so hat man, nach §. 20,

$$R(b \cos \psi - a \sin \psi) = \Sigma P \sin \gamma (y \cos(\psi + \varepsilon) - x \sin(\psi + \varepsilon))$$

Hieraus folgt, wie in §. 20.

$$Ra = \Sigma P \sin \gamma (x \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon)$$

$$Rb = \Sigma P \sin \gamma (y \cos \varepsilon - x \sin \varepsilon),$$

$$s^2 + h^2 = (y + h)^2.$$

Vertauscht man die Buchstaben  $y$  und  $h$  mit  $x$  und  $\Theta$ , so erhält man  $s^2 + \Theta^2 = (x + \Theta)^2$ , wie in §. 42.

64. Man denke sich noch einen schweren und magnetischen Körper, wie in §. 38. Die magnetische Kraft wird hiet, wie an jener Stelle, ohne Rücksicht auf die Variationen, welchen sie bekanntlich unterworfen ist, als unveränderlich betrachtet. Soll dieser Körper in einem Punkte  $A$  befestigt, in Ruhe bleiben, so müssen die an ihm wirkenden Kräfte sich durch eine einzige ersetzen lassen, deren Richtung durch den Befestigungspunct geht. Das an der Centralage wirkende magnetische Paar muß mithin mit der Resultante der Schwerkkräfte am Schwerpuncte in einer durch  $A$  gehenden Ebene liegen. Es sei  $ABD$  diese Ebene (Fig. 40.),  $BD$  die Centralage,  $D$  der Schwerpunct; die verticale  $DP$  stelle das Gewicht des Körpers,  $(Bm, Dm')$  das magnetische Paar,  $MR$  die Resultante dar, welche parallel und gleich  $GP$  ist; so muß  $MR$  durch  $A$  und zugleich durch den Mittelpunkt  $M$  der Kräfte des Systemes gehen, und der Punct  $M$  sich mithin in der durch  $A$  gehenden Verticalen befinden. Diese Bemerkung liefert ebenfalls ein Beispiel zu dem Satze des vorigen §. in Bezug auf Kräfte, die einer Ebene parallel sind; der Leser wird sich dasselbe bei einigem Nachdenken selbst genauer zu erläutern im Stande sein. Wenn bloß von der Stellung des sicheren Gleichgewichtes die Rede ist, so muß  $M$  unter  $A$  und unter der Centralage liegen. Der Punct  $M$  ist einer der beiden Durchschnitte des Centralkreises mit der Ebene  $ABD$ . Würde der Körper in einem anderen, ebenfalls oberhalb  $BD$  in der Ebene  $ABD$  befindlichen Punct  $A'$  befestigt; so würde in der Stellung des sichern Gleichgewichtes wieder der nämliche Punct  $M$  in der Verticalen unter  $A'$  liegen. Dies giebt den Satz: Wird ein schwerer und magnetischer Körper nach einander in verschiedenen Puncten befestigt, die alle in einer und derselben durch die Centralage gehenden Ebene und auf derselben Seite dieser

telkraft  $R$  nicht Null ist, durch eine mit seinen Bedingungen verträgliche Bewegung aus irgend einer Stellung in eine andere gelangend, so ist das Product aus der Intensität der Mittelfkraft in die Verschiebung eines gewissen Punctes, der sich in jeder Stellung des Systemes construiren läßt, nach der Richtung jener Kraft, gleich der Summe der Producte aus jeder Kraft in die Verschiebung ihres Angriffspunctes, nach der Richtung der Kraft. Jener Punct aber wird gefunden, wenn man das System auf zwei gegen einander senkrechte, der Kraft  $R$  parallele Ebenen projectirt, an jedem der Mittelpunkte beider Projectionen die Kraft in ihrer Richtung, zugleich am Centralpuncte dieselbe Kraft in umgekehrter Richtung anbringt, und von den drei parallelen Kräften ( $R, R, -R$ ) den Schwerpunkt sucht.

In den Stellungen des Gleichgewichtes (solche giebt es jedoch, weil die Mittelfkraft nicht Null ist, nur dann, wenn das System nicht frei ist) ist die Verschiebung dieses Schwerpunktes nach der Richtung der Mittelfkraft, im Allgemeinen ein Maximum oder Minimum.

Ist dagegen die Mittelfkraft Null, so kann man nur sagen, daß in jeder Stellung des Gleichgewichtes die Summe der Producte aus jeder Kraft in die Verschiebung ihres Angriffspunctes nach der Richtung der Kraft, im Allgemeinen ein Maximum oder Minimum ist. Dieser Fall bleibt im Folgenden, wie bisher, ausgeschlossen.

Sind insbesondere die Kräfte alle einer Ebene (sie sei  $xy$ ) parallel, so erhält man,

$$\Pi = \sum P(x \cos \alpha + y \cos \beta)$$

weil  $\cos \gamma = 0, \cos \gamma' = 0$ , u. s. f. Der vorstehende Ausdruck bezieht sich auf den Mittelpunct, welcher durch Projection der Kräfte auf die ihnen parallele Ebene  $xy$  erhalten wird; die Verschiebung desselben nach der Richtung der Mittelfkraft, oder der Abstand von einer auf dieser Richtung senkrechten unveränderlichen Ebene ist also, in jeder Stellung des Gleichgewichtes, im Allgemeinen ein Maximum oder Minimum.

Um diesen Satz an einem möglichst einfachen Beispiele anschaulich zu machen, sei ABCD (Fig. 39.) ein biegsames Vieleck, dessen Endpunkte A, D unbeweglich oder auf zwei in einer und derselben Ebene befindlichen Curven aa', dd, beweglich sind, und dessen Spitzen B, C sich ebenfalls von dieser Ebene nicht entfernen können. Auf die Punkte B, C wirken zwei nach Richtungen und Intensitäten unveränderlich gegebene Kräfte P, Q, beide in der Ebene des Vieleckes, deren Mittelkraft nicht Null sei. Diese ist mithin nach Richtung und Intensität ebenfalls unveränderlich. In der Ebene des Vieleckes ziehe man eine beliebige, aber unveränderliche Gerade (sie sei KN), senkrecht auf der Richtung der Mittelkraft. Gibt man nun dem Vielecke irgend eine Stellung, so wird man den Mittelpunkt M der Kräfte P, Q auf die bekannte Weise construiren können, und wenn die Stellung diejenige des Gleichgewichtes ist, so ist der senkrechte Abstand des Mittelpunktes (MG) von der festen Geraden KN (in dem durch Fig. 39. dargestellten Falle) ein Maximum, oder mit anderen Worten, der Mittelpunkt M ist, in der Stellung des Gleichgewichtes, in der Richtung der Mittelkraft möglichst weit vorgeschoben.

Sind endlich alle Kräfte einander parallel, so ist in dem obigen Werthe von  $\Pi$  auch noch  $\cos \beta = 0$ ,  $\cos \beta' = 0$ , u. s. f., mithin  $\Pi = \sum P_x \cos \alpha = \sum \pm P_x$ , weil  $\cos \alpha^2 = 1$ ,  $\cos \alpha'^2 = 1, \dots$ ; also ist in diesem Falle der Abstand des Mittelpunktes der parallelen Kräfte von einer auf der Richtung der Mittelkraft senkrechten Ebene ein Maximum oder Minimum. Nach diesem Gesetze muß z. B. der Schwerpunkt irgend eines nicht freien Systemes von schweren Punkten oder Körpern, wenn dieses in der Stellung des Gleichgewichtes ruhen soll, tiefer liegen als in jeder anderen. Derselbe könnte freilich, nach dem nämlichen Gesetze, auch so hoch als möglich liegen, weil jedoch das Gleichgewicht alsdann offenbar unsicher sein oder durch die kleinste Störung gänzlich aufgehoben werden würde; so kann ein Körper in der Natur, in welcher es niemals an störenden

Age sich befinden; so trifft in der jedesmaligen Stellung des sicheren Gleichgewichtes die durch den Befestigungspunct gezogene Verticale immer einen und denselben Punct des Körpers, nämlich den auf der anderen Seite der Centralaxe liegenden Durchschnitt des Centralkreises mit jener Ebene.

Wenn man den Körper, anstatt in A, in M befestigt, so besteht ebenfalls Gleichgewicht, welches auch durch Drehung um eine durch M gehende auf der Ebene ABD senkrechte Axe nicht gestört wird. Der magnetische Körper wird mithin astatic, wenn man diese Axe unbeweglich macht.

Auch über den allgemeinsten Fall eines Systemes unveränderlicher Kräfte an einem festen Körper, in welchem eine Central-Ebene Statt findet, ließen sich ähnliche Betrachtungen anstellen, welche zu dem allgemeinen Satze des vorigen §. Beispiele liefern würden; diese müssen jedoch, beschränkten Raumes wegen, hier wegbleiben.

---

**D y n a m i t.**

---





## D y n a m i k.

## Bewegung eines Punctes.

65. Es seien  $P$  und  $P'$  die Intensitäten zweier Kräfte, welche demselben materiellen Puncte beziehungsweise die Geschwindigkeiten  $v$  und  $v'$  ertheilen, so hat man, weil die Kräfte den Geschwindigkeiten proportional sind, die Gleichung  $\frac{P}{v} = \frac{P'}{v'}$ ,

oder der Quotient  $\frac{P}{v}$  ist, für denselben Punct, eine unver-

änderliche Größe, welche die Masse des Punctes genannt wird. Nach dieser Erklärung kommt die Einheit der Masse demjenigen Puncte zu, welchem die Einheit der Kraft die Einheit der Geschwindigkeit mittheilt. Die Einheit der Geschwindigkeit ist aber diejenige gleichförmige Geschwindigkeit, vermöge deren in der Zeiteinheit die Längeneinheit durchlaufen wird. Kennt man die Geschwindigkeit  $v'$ , welche eine Kraft von bekannter Intensität  $P'$  einem Puncte ertheilt, so ergibt sich die Masse  $m$  desselben aus der Gleichung  $m = \frac{P'}{v'}$ ,

und für jede beliebige Kraft  $P$  und entsprechende Geschwindigkeit  $v$  gilt, bei demselben Puncte, die Gleichung  $P = mv$ , aus welcher nunmehr wieder die Intensität irgend einer Kraft  $P$  gefunden wird, wenn die ihr entsprechende Geschwindigkeit  $v$  z. B. aus Beobachtung bekannt ist. Das Product aus der Masse eines Punctes in seine Geschwindigkeit heißt sein Bewegungsmoment. Ertheilt dieselbe Kraft  $P$  einem anderen Puncte von der Masse  $m_1$  die Geschwindigkeit  $v_1$ , so ist wiederum  $P = m_1 v_1$ ,

und mithin  $m_1 v_1 = m v$ ; d. h. die Geschwindigkeiten, welche gleiche Kräfte zweien Puncten ertheilen, verhalten sich umgekehrt wie deren Massen, oder mit anderen Worten: gleiche Kräfte ertheilen allen Puncten gleiche Bewegungsmomente. Ueberhaupt aber sieht man, daß jedes Bewegungsmoment einer gewissen Kraft gleich gilt.

Die Kräfte in der Natur ändern die Geschwindigkeiten ihrer Angriffspuncte nie augenblicklich um endliche Größen, sondern die Aenderung der Geschwindigkeit einer unendlich kleinen Zeit ist immer unendlich klein, wenn gleich nicht selten, z. B. bei dem Stöße der Körper, große Aenderungen so rasch erfolgen, daß sie für augenblicklich gehalten werden. Kräfte, welche die Geschwindigkeiten ihrer Angriffspuncte, durch stetige Einwirkung, in einer unendlich kleinen Zeit unendlich wenig ändern, nennt man überhaupt beschleunigende Kräfte; die in der Natur vorhandenen sind solche. Da es aber in Bezug auf die zuletzt hervorgehende zusammengesetzte Geschwindigkeit eines Punctes einerlei ist, ob die Kräfte, welche dazu beitragen, gleichzeitig oder nach einander angebracht werden, so ist auch die Geschwindigkeit, welche ein Punct, durch die während einer beliebigen Zeit stetig fort dauernde Einwirkung beschleunigender Kräfte, am Ende dieser Zeit erhält, dieselbe, welche er auf einmal erhalten würde, wenn alle diese Kräfte gleichzeitig auf ihn wirkten. Man denke sich zunächst eine gleichförmig beschleunigende Kraft, d. h. eine solche, welche immer in derselben Richtung wirkt und ihrem Angriffspuncte in gleichen Zeiten immer gleiche Geschwindigkeiten ertheilt. Wirkt diese Kraft während der Zeiteinheit auf einen Punct, dessen Masse der Einheit gleich sein mag, und bezeichnet man mit  $X$  die Geschwindigkeit, welche der Punct nach Ablauf der Zeiteinheit durch sie erhalten hat, so drückt die Zahl  $X$  unmittelbar auch die Intensität der Resultante aus allen Elementarkräften aus, welche während der Dauer der Zeiteinheit auf den Punct wirkten, und in diesem Sinne ist sie das Maß der Intensität der gleichförmig beschleunigenden Kraft. Theilt man

ferner die Zeiteinheit in  $n$  gleiche Theile, so ist  $\frac{1}{n} \cdot X$  die Geschwindigkeit, welche der Punct durch die Einwirkung der Kraft während der Dauer eines solchen Theiles erhält, weil die Kraft seine Geschwindigkeit, nach der Voraussetzung, in gleichen Zeiten überhaupt um gleich viel ändert. Für ein unendlich großes  $n$  geht der  $n$ te Theil der Zeiteinheit ein unendlich kleines Zeitelement  $dt$  über, und mithin ist die Zunahme der Geschwindigkeit des Punctes, während der Zeit  $dt$ , gleich  $X dt$ . Stellt man sich also die Kraft parallel der Axe der  $x$  vor, und bezeichnet demgemäß (s. §. 60.) die dieser Axe parallele Geschwindigkeit des Punctes mit  $\frac{dx}{dt}$ , so wird die Zunahme dieser Geschwindigkeit in der Zeit  $dt$  durch  $d\left(\frac{dx}{dt}\right)$  ausgedrückt, und mithin erhält man

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right) = X dt.$$

Dieses gilt für die Einheit der Masse. Wirkt aber die Kraft  $X$  auf einen Punct, dessen Masse überhaupt gleich  $m$  ist, so ist  $X dt$  nicht die Zunahme seiner Geschwindigkeit, sondern vielmehr die seines Bewegungsmomentes  $\left(m \frac{dx}{dt}\right)$ ; mithin

$$\text{hat man alsdann: } md\left(\frac{dx}{dt}\right) = X dt, \text{ oder, in so fern man } t$$

als unabhängige Veränderliche betrachtet, und mithin  $d\left(\frac{dx}{dt}\right)$

$$= \frac{d^2 x}{dt^2} \text{ setzt,}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X.$$

Diese Gleichung gilt auch, wenn die nach der Richtung der  $x$  wirkende beschleunigende Kraft nicht unveränderlich ist, wie bisher angenommen worden. Alsdann bedeutet in derselben  $X$  die Geschwindigkeit, welche die Kraft einem Puncte von der Einheit der Masse, wenn sie mit der nämlichen Intensität während der Dauer der Zeiteinheit auf ihn wirkte, am Ende dieser Zeit er-

gehemmt wird, an demselben Orte auf der Erdoberfläche, in gleichen Zeiten um gleiche Höhen fallen; hieraus folgt, daß die Intensität, mit welcher die Schwere auf jeden Körper wirkt, der Masse desselben proportional ist. Ferner zeigt die Beobachtung, daß die Geschwindigkeit bei dem Falle der Zeit, oder, was dasselbe ist, daß die Fallhöhe dem Quadrate der Zeit proportional ist; hieraus folgt, daß die Schwere, in der Nähe der Erdoberfläche, eine gleichförmig beschleunigende Kraft ist. Die Geschwindigkeit, welche sie einem Körper in der Zeiteinheit ertheilt, pflegt man mit  $g$  zu bezeichnen; diese Zahl  $g$  drückt mithin auch die Intensität aus, mit welcher die Schwere auf die Einheit der Masse wirkt, und ist demnach überhaupt das Maas der Intensität der Schwere, für irgend einen Ort an der Erdoberfläche. Auf einen Körper, dessen Masse sich zu der als Einheit angenommenen verhält wie  $m:1$ , wirkt die Schwere mit der Intensität  $mg$ ; dieses Product nennt man das Gewicht des Körpers. Demnach sind, an demselben Orte der Erdoberfläche oder überhaupt für gleiche Werthe von  $g$ , die Gewichte der Körper den Massen derselben proportional; daher sich die Verhältnisse von diesen aus jenen, bei irdischen Körpern, durch Wägung bestimmen lassen.

Um den Werth von  $g$  in Zahlen anzugeben, muß eine bestimmte Zeiteinheit und eine Längeneinheit angenommen werden. Das Zeitmaaß liefert die Natur selbst; denn nach den genauesten Beobachtungen ist die Zeit, in welcher die Himmelskugeln eine scheinbare, oder die Erde eine wirkliche Umdrehung um ihre Achse vollendet, unveränderlich sich gleich; man nennt dieselbe einen Sterntag. Ein Sonnentag dagegen ist die Zeit eines scheinbaren Umlaufes der Sonne um die Erde. Seine Dauer beträgt etwas mehr, als die eines Sterntages, und ist überhaupt im Laufe des Jahres veränderlich; ihr mittlerer Werth heißt ein mittlerer Sonnentag und beträgt 1,0027379 mal so viel als ein Sterntag. Gewöhnlich rechnet man nach mittlen Sonnentagen, deren jeder in 86400 gleiche Theile, Secunden (mittler Zeit) genannt, ge-

theilt wird. Werden nun die Secunde mittler Zeit und der preußische oder rheinländische Fuß als Einheiten angenommen, so beträgt, nach den schärfsten Beobachtungen, der Werth von  $g$  zu Berlin  $31',2649$ . Dieser Werth ändert sich für verschiedene Orte der Erdoberfläche um kleine Größen, nimmt auch von jedem Orte nach der Höhe zu ab; für geringe Höhen ist jedoch die Abnahme, den Beobachtungen sowohl wie theoretischen Gründen zufolge, ganz unmerklich.

67. Bedeuten  $X, Y, Z$  die Componenten einer beschleunigenden Kraft, welche auf einen frei beweglichen Punct von der Masse  $m$  wirkt; so ergeben sich zur Bestimmung seiner Bewegung, nach den in §. 64. entwickelten Grundsätzen, sofort folgende Gleichungen:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z. \quad 1.$$

Die Aufgabe besteht nun, wenn  $X, Y, Z$  als Functionen der Coordinaten und etwa noch der Zeit  $t$  gegeben sind, allemal darin, durch Integration der vorstehenden zu drei endlichen Gleichungen zwischen  $x, y, z, t$  zu gelangen, oder die Coordinaten als Functionen der Zeit zu bestimmen. Die sechs Constanten, welche bei der Integration erhalten werden, lassen sich finden, wenn z. B. die Coordinaten des Punctes und die drei Componenten seiner Geschwindigkeit für einen gegebenen Augenblick bekannt sind.

Als einfaches Beispiel diene hier die Bewegung eines geworfenen Körpers im leeren Raume, bei unveränderlich gedachter Schwere. Es ist klar, daß die Bahn eben sein muß; ihre Ebene sei  $xy$ ; die Aze  $x$  vertical und positiv nach oben; so hat man

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -g, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 0,$$

und durch Integration:  $\frac{dx}{dt} = c - gt, \quad \frac{dy}{dt} = k$ . Es sei  $u$  die Anfangsgeschwindigkeit, für  $t=0$ ,  $i$  ihre Neigung gegen den

Horizont, so wird  $c = u \sin i$ ,  $k = u \cos i$ , und mithin, wenn man weiter integriert,  $x = u \sin i \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$ ,  $y = u \cos i \cdot t$ ; wo für  $t = 0$ ,  $x$  und  $y$  gleich Null angenommen sind. Durch Elimination von  $t$  folgt:

$$2u^2 \cos i^2 \cdot x = u^2 y \sin 2i - g y^2,$$

oder, wenn die zur Geschwindigkeit  $u$  gehörige Fallhöhe gleich  $h$ , und demnach  $u^2 = 2gh$  gesetzt wird:

$$4h \cos i^2 \cdot x = 2hy \sin 2i - y^2$$

oder auch  $(y - h \sin 2i)^2 = 4h \cos i^2 (h \sin i^2 - x)$ .

Diese Gleichung giebt eine Parabel, deren Parameter gleich  $4h \cos i^2$  ist, deren Scheitel die Coordinaten  $x' = h \sin i^2$ ,  $y' = h \sin 2i$ , und unter allen Punkten der Curve die höchste Lage hat.

68. Bezeichnet man die Geschwindigkeit eines Punktes mit  $v$ , so ist, nach §. 60.,  $v = \frac{ds}{dt}$ . Ferner ist  $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \frac{dx}{ds}$ ; eben so  $\frac{dy}{dt} = v \frac{dy}{ds}$ ,  $\frac{dz}{dt} = v \frac{dz}{ds}$ . Durch Differentiation dieser Gleichungen erhält man, wie bisher  $t$  als unabhängige Veränderliche betrachtend,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = v \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{dt} + \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dv}{dt}.$$

$$\text{Nun ist } d\left(\frac{dx}{ds}\right) = \frac{ds d^2 x - dx d^2 s}{ds^2} = \frac{ds d^2 x - dx d^2 s}{ds^3} v dt,$$

weil  $ds = v dt$ ; mithin

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{ds d^2 x - dx d^2 s}{ds^3} \cdot v^2 + \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dv}{dt}.$$

Ähnliche Ausdrücke ergeben sich für  $\frac{d^2 y}{dt^2}$  und  $\frac{d^2 z}{dt^2}$ . Bezeichnet man ferner den Krümmungshalbmesser der Bahn, in dem Orte

des Punctes zur Zeit  $t$ , mit  $\rho$ , und die Coordinaten des Krümmungsmittelpunctes mit  $a, b, c$ , so hat man

$$\frac{dx d^2s - ds d^2x}{ds^3} = \frac{dx ds d^2s - ds^2 d^2x}{ds^4} = \frac{x-a}{\rho^2},$$

und ähnliche Formeln in Bezug auf  $b$  und  $y$ ,  $c$  und  $z$  (diese Formeln sind in §. 44. bewiesen, wo hernach nur noch  $d^2s=0$  gesetzt wurde, was hier nicht geschehen darf); mithin erhält man

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{v^2}{\rho^2}(x-a) + \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{X}{m}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{v^2}{\rho^2}(y-b) + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{Y}{m}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{v^2}{\rho^2}(z-c) + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{Z}{m}.$$

Zur Vereinfachung nehme man den augenblicklichen Ort des Punctes zum Anfange der Coordinaten, die Richtung des Krümmungshalbmessers, nach dem Krümmungsmittelpuncte hin, zur Axe der positiven  $x$ , die der Geschwindigkeit  $v$  zur Axe der positiven  $y$ , so wird in den vorstehenden Formeln  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$ ,  $dx=0$ ,  $dy=ds$ ,  $dz=0$ ,  $b=0$ ,  $c=0$  und  $a=\rho$ , zugleich aber  $\rho$  positiv; mithin erhält man  $Z=0$ , und

$$m \frac{v^2}{\rho} = X, \quad m \frac{dv}{dt} = Y.$$

Hieraus folgt: Die beschleunigende Kraft läßt sich in jedem Augenblicke in zwei Componenten zerlegen, von denen die eine ( $Y$ ) in der Richtung der Tangente, die andere ( $X$ ) in der Richtung des Krümmungshalbmessers der Bahn wirkt. In der That bedarf es keiner weitläufigen Erläuterung, daß die Richtung der beschleunigenden Kraft in jedem Augenblicke in der anschließenden Ebene der Curve liegen muß; dies ist es aber, was der vorhergehende Satz besagt. Die Intensität der erstgenannten Componente ( $Y$ ) ist dem Momente der wirklichen Beschleunigung des Punctes in seiner Bahn (d. i.  $m \frac{dv}{dt}$ ) gleich, und sie ist positiv



oder negativ, je nachdem sie die Geschwindigkeit  $v$ , mit welcher der Punkt in seinem Orte zur Zeit  $t$  anlangt, zu vermehren oder zu vermindern strebt. Die normale Componente  $X$  dagegen ist gleich  $\frac{mv^2}{\rho}$ , und dieser Werth ist, wegen der Wahl der Coordinaten, wesentlich positiv; d. h. diese normale Componente strebt unter allen Umständen den Punkt dem Krümmungsmittelpuncte zu nähern, oder sie hält dem Bestreben des Punctes, sich in der Richtung des Halbmessers von dem Mittelpuncte der Krümmung zu entfernen, Gleichgewicht. Dieses Bestreben heißt die *Schwungkraft*. Um seine Entstehung deutlich einzusehen, darf man nur bedenken, daß das Bewegungsmoment des Punctes am Ende jedes unendlich kleinen Zeittheiles  $dt$  sich zusammensetzt aus dem Bewegungsmomente  $mv$ , welches er am Anfange dieses Zeitelementes besaß, und dem Bewegungsmomente  $Pdt$ , welches ihm durch die beschleunigende Kraft  $P$  ertheilt wird; man kann sich dabei ohne Weiteres die Bewegung während des Zeitelementes als gleichförmig, und die Wirkung der Kraft  $P$  bloß am Ende desselben augenblicklich Statt findend, vorstellen. (Der Fehler ist ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung.) Es sei  $m(v+dv)$  dieses resultirende Bewegungsmoment,  $\epsilon$  der unendlich kleine Winkel, den seine Richtung (d. h. die Richtung der Geschwindigkeit  $v+dv$ ) mit der Richtung des vorigen  $mv$ , und  $\Theta$  der endliche Winkel, den sie mit der Richtung der Kraft  $P$  bildet. Man zerlege die Bewegungsmomente  $mv$  und  $Pdt$  nach der Richtung des resultirenden und nach einer darauf senkrechten; so sind die Componenten  $mv \cos \epsilon$  und  $mv \sin \epsilon$ ,  $P \cos \Theta dt$  und  $P \sin \Theta dt$ ; und mithin ist das resultirende Bewegungsmoment:

$$m(v+dv) = mv \cos \epsilon + P \cos \Theta dt.$$

Nun ist aber  $\epsilon$  unendlich klein und gleich  $\frac{ds}{\rho}$ , wie bekannt; die Differenz  $v - v \cos \epsilon$  ist daher ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung, also hier Null; und mithin ist  $mdv = P \cos \Theta dt$ . Ferner müssen die auf der Richtung des resultirenden Bewegungsmoments

momentes senkrechten Componenten einander Gleichgewicht halten; dieselben sind  $mv \sin \varepsilon$  und  $P \sin \Theta dt$ ; oder, weil

$$\sin \varepsilon = \varepsilon = \frac{ds}{\rho} = \frac{v dt}{\rho}, \text{ so sind sie } \frac{mv^2}{\rho} dt \text{ und } P \sin \Theta dt;$$

beide müssen mithin einander gleich sein, also  $P \sin \Theta = \frac{mv^2}{\rho}$ ;

u. z. b. w. Die Schwungkraft ist demnach nichts Anderes, als die auf der Richtung des resultirenden Bewegungsmomentes senkrechte Componente des unmittelbar vorhergehenden Bewegungsmomentes; sie gilt einer beschleunigenden Kraft gleich, welche den Punct von dem Mittelpuncte der Krümmung seiner Bahn zu entfernen strebt und deren Intensität durch den Quotienten

$$\frac{mv\varepsilon}{dt} = \frac{mv^2}{\rho} \text{ ausgedrückt werden muß.}$$

69. Wenn der Punct auf einer Fläche oder Curve zu bleiben gezwungen ist, so wirkt auf ihn außer der beschleunigenden Kraft noch ein Widerstand  $N$ , dessen Componenten  $N \cos \alpha$ ,  $N \cos \beta$ ,  $N \cos \gamma$  sein mögen; alsdann erhält man

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X + N \cos \alpha, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y + N \cos \beta, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z + N \cos \gamma. \quad 1.$$

Geschieht insbesondere die Bewegung auf einer Curve, deren Gleichungen  $L=0$ ,  $M=0$  seien, so ist  $N$  die Resultante der von beiden Flächen  $L$  und  $M$  dargebotenen Widerstände. Da diese normal sind, so müssen sich ihre Componenten ausdrücken lassen durch  $\lambda \frac{dL}{dx}$ , ...,  $\mu \frac{dM}{dx}$ , ...; und mithin kann man setzen

$$N \cos \alpha = \lambda \frac{dL}{dx} + \mu \frac{dM}{dx}, \text{ u. s. f.; also anstatt 1.}$$

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= X + \lambda \frac{dL}{dx} + \mu \frac{dM}{dx}, & m \frac{d^2 y}{dt^2} &= Y + \lambda \frac{dL}{dy} + \mu \frac{dM}{dy}, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= Z + \lambda \frac{dL}{dz} + \mu \frac{dM}{dz}. \end{aligned} \right\} 2.$$

Diese Gleichungen gelten auch, wenn der Punkt auf einer Fläche bleiben muß; ist  $L=0$  ihre Gleichung, so braucht man nur  $\mu=0$  zu setzen. Für einen ganz freien Punkt wäre noch  $\lambda=0$ . Die Formeln 2. umfassen mithin alle Fälle. Multiplicirt man dieselben der Reihe nach mit  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , und addirt die Producte, so fallen  $\lambda$ ,  $\mu$  heraus und man erhält:

$$m \frac{ds d^2s}{dt^2} = Xdx + Ydy + Zdz. \quad 3.$$

Wird die beschleunigende Kraft  $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$  mit  $P$ , die Geschwindigkeit  $\frac{ds}{dt}$  mit  $v$ , und der Winkel, den die Richtungen  $v$  und  $P$  mit einander bilden, mit  $\Theta$  bezeichnet, so hat man  $X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} = P \cos \Theta$ . (Vgl. S. 188. Man kann auch den Beweis in §. 43. S. 131. hier anwenden, wenn man dort anstatt Fadencurve Bahn liest.) Die Gleichung 3. wird hier nach  $m \frac{dv}{dt} = P \cos \Theta$ , welche schon im vorhergehenden §. für einen freien Punkt gefunden wurde. Sie gilt also auch, wenn der Punkt auf einer Fläche oder Curve geht. Wirken auf denselben keine beschleunigenden Kräfte, so ist  $P=0$ , also  $\frac{dv}{dt}=0$ , mithin die Geschwindigkeit unveränderlich. Der Punkt geht also auf der Fläche oder Curve mit unveränderlicher Geschwindigkeit fort, sobald die beschleunigenden Kräfte zu wirken aufhören. Es versteht sich jedoch von selbst, daß der Werth von  $\Theta$  sich ändern wird, wenn der Punkt in seiner Bahn auf Spitzen stößt; wie denn überhaupt die Gleichung  $m \frac{dv}{dt} = P \cos \Theta$  nur so lange unverändert gilt, als der Contingenzwinkel ( $\epsilon$ ) der Bahn unendlich klein, und mithin  $v = v \cos \epsilon$  ein unendlich kleines zweiter Ordnung ist. (Man sehe den vorigen §., gegen das Ende.) Bewegt sich der Punkt ohne Einwirkung beschleunigender Kräfte auf einer Fläche, so ist seine Bahn der Art, daß ihr

Krümmungshalbmesser in die Normale der Fläche fällt. Denn da die Geschwindigkeit unveränderlich ist, so ist  $ds = c dt$ ,  $c$  eine Constante; folglich wenn  $d^2t = 0$ , auch  $d^2s = 0$ ; und mithin  $\frac{dx}{dt} = \frac{c dx}{ds}$ ,  $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{cd^2x}{ds^2}$ ; u. f. f. Zugleich sind in 2. die Größen  $X, Y, Z, \mu$  Null; mithin, nach 2.,

$$\frac{d^2x}{ds^2} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} \cdot \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{dL}{dx} \cdot \frac{dL}{dy} \cdot \frac{dL}{dz},$$

woraus nach §. 44. das Behauptete folgt, weil  $\frac{dL}{dx} \cdot \frac{dL}{dy} \cdot \frac{dL}{dz} = p:q:-1$ . Uebrigens ist dieser Satz auch ohne alle Rechnung einleuchtend. Denn da die Schwungkraft in der Richtung des Krümmungshalbmessers wirkt, und der normalen Componente der beschleunigenden Kraft Gleichgewicht hält; da ferner die beschleunigende Kraft hier nur in dem Widerstande der Fläche besteht, dessen tangential Componente Null ist; so folgt erstens, daß die Beschleunigung Null, mithin die Geschwindigkeit unveränderlich ist, und zweitens, daß die Schwungkraft dem Widerstande der Fläche entgegen wirken, also der Krümmungshalbmesser der Bahn in die Normale der Fläche fallen muß; w. g. b. w.

70. Da  $\frac{ds d^2s}{dt^2} = v dv$ , so kann man die Gleichung 3. auch so schreiben:

$$\frac{1}{2} md(v^2) = Xdx + Ydy + Zdz \quad 1. a.$$

$$\text{oder auch} \quad \frac{1}{2} md(v^2) = P \cos \Theta ds. \quad 1. b.$$

Das halbe Product aus der Masse eines Punctes in das Quadrat seiner Geschwindigkeit nennt man seine lebendige Kraft. Die Gleichung b. besagt mithin: Die Zunahme an lebendiger Kraft, während des Zeitelementes  $dt$ , ist gleich dem Producte aus der Intensität der beschleunigenden Kraft in die unendlich kleine Verschiebung ihres Angriffspunctes nach der Richtung der

Kraft. Dieses Product ist positiv oder negativ, oder die lebendige Kraft wird durch die beschleunigende vermehrt oder vermindert, je nachdem diese mit der Richtung der Bewegung einen spitzen oder stumpfen Winkel bildet. Man könnte nach §. 61. geneigt sein, dieses Product, noch durch  $dt$  dividirt, als  $P \cos \Theta \cdot \frac{ds}{dt}$ , das virtuelle Moment der Kraft zu nennen; es ist

jedoch zu erwägen, daß  $\frac{ds}{dt}$  hier nicht jede beliebig gedachte (virtuelle), sondern nur die wirkliche Geschwindigkeit ist, und mithin die Benennung virtuelles Moment hier nicht in ihrer gehörigen Bedeutung angewendet werden würde.

Wenn der Ausdruck  $Xdx + Ydy + Zdz$  ein vollständiges Differential ist, oder wenn sich eine solche Function  $\Pi$  von  $x, y, z$  finden läßt, daß

$$d\Pi = Xdx + Ydy + Zdz$$

ist (Beispiele stehen in §. 62. und 63.), so erhält man  $\frac{1}{2}md(v^2) = d\Pi$ , und durch Integration

$$\frac{1}{2}mv^2 = \Pi + \text{Const.}$$

Sind nun  $v_0$  und  $\Pi_0$  die Werthe von  $v$  und  $\Pi$  für einen bestimmten Augenblick der Bewegung, so wird  $\frac{1}{2}mv_0^2 = \Pi_0 + \text{Const.}$ , mithin

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \Pi - \Pi_0. \quad 2.$$

Die Geschwindigkeit  $v$  ist also immer die nämliche, sobald  $\Pi$  den nämlichen Werth hat, ungeachtet dabei die übrigen Umstände der Bewegung noch sehr verschieden sein können. Da  $\Pi$  eine Function der Coordinaten des Punctes zur Zeit  $t$ , und  $\Pi_0$  dieselbe Function seiner Coordinaten zur Zeit  $t_0$  ist, so erhält man, wenn  $\Pi = a$ ,  $\Pi_0 = a_0$  gesetzt wird, wo  $a, a_0$  Constanten sind, zwei Flächen ( $\Pi$  und  $\Pi_0$ ), von deren einer ( $\Pi_0$ ) der Punct zur Zeit  $t_0$  mit der bestimmten Geschwindigkeit  $v_0$  in irgend einer Richtung ausging, um auf der zweiten  $\Pi$  zu irgend einer Zeit  $t$  anzukommen. Diese Bewegung mag nun frei oder auf vorgeschriebene

ier Bahn geschehen; so lehrt die in jedem Falle gültige Gleichung 2., daß der Punct auf der Fläche  $\Pi$  immer mit derselben Geschwindigkeit anlangt. Ist z. B. die beschleunigende Kraft die Schwere, und nimmt man die Aze  $x$  vertical und positiv nach unten; so wird  $X=mg$ ,  $Y=0$ , mithin  $d\Pi=mgdx$ ,  $\Pi=mgx$ , und nach 2.

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}v_0^2 + gx - gx_0. \quad 3.$$

Die Fläche  $\Pi$  und  $\Pi_0$  sind hier horizontale Ebenen, denn ihre Gleichungen sind  $gx=a$ ,  $gx_0=a_0$ . Ein schwerer Körper langt also, von einer horizontalen Ebene nach einer anderen fallend, bei gleicher Anfangsgeschwindigkeit, immer mit der nämlichen Geschwindigkeit in der zweiten Ebene an, welche Bahn er auch inzwischen durchlaufen habe. Oder wird z. B. ein schwerer Körper im leeren Raume schief in die Höhe geworfen, so ist seine Geschwindigkeit in jedem Puncte seiner Bahn derjenigen gleich, welche er, mit der nämlichen Anfangsgeschwindigkeit gerade aufwärts geworfen, in der gleichen Steighöhe besitzen würde. In der That erhält man, nach den hier gegebenen Regeln, für die Geschwindigkeit des geworfenen Körpers aus §. 67. die Gleichung  $\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}u^2 - gx$ , oder weil  $u^2 = 2gh$ ,  $v^2 = 2g(h-x)$ , welcher Ausdruck nur von der Anfangsgeschwindigkeit  $u$  und der Steighöhe  $x$ , nicht aber von der Richtung von  $u$  abhängt, wie erforderlich.

71. Es sei insbesondere die Anfangsgeschwindigkeit eines schweren, frei oder in vorgeschriebener Bahn fallenden Körpers, Null; und der Anfangspunct der Bewegung auch Anfang der Coordinaten; so erhält man aus der Gleichung 3. des vorigen §., da  $v_0=0$ ,  $x_0=0$ , die Gleichung  $v^2=2gx$ , wo  $x$  die Fallhöhe

ist. Aus derselben folgt, weil  $v = \frac{ds}{dt}$ ,  $dt = \frac{ds}{\sqrt{2gx}}$ , und mit-

hin die Fallzeit  $t = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{2gx}} = \int_0^x \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{\sqrt{2gx}}$ . Kennt

man die Curve auf welcher sich der Punct bewegt, so kann, wie

man sieht, die Fallzeit aus diesem Ausdrucke sofort gefunden werden. Man kann auch fragen, auf welcher Curve der Körper fallen muß, um von einem gegebenen Punkte A nach einem anderen tiefer liegenden B in kürzester Zeit zu gelangen. Dies ist eine sehr einfache Aufgabe der Variationsrechnung; denn offenbar muß das Integral  $\int_0^h \frac{ds}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}$ , in welchem h den Höhenunterschied zwischen A und B bezeichnet, ein Minimum sein. Nun ist, wenn man nach y und z variirt, bekanntlich

$$\delta ds = \frac{dy}{ds} \delta dy + \frac{dz}{ds} \delta dz,$$

und mithin, da die Variation des obigen Integrales verschwinden muß,

$$\int_0^h \frac{1}{\sqrt{x}} \left( \frac{dy}{ds} \delta dy + \frac{dz}{ds} \delta dz \right) = 0,$$

daher durch theilweise Integration:

$$\int \left[ d \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{dy}{ds} \right) \delta y + d \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{dz}{ds} \right) \delta z \right] = 0.$$

Ist eine durch die Grenzpunkte gehende Fläche gegeben, auf welcher der Punkt bleiben soll, so hat man  $\delta z = \left( \frac{dz}{dy} \right) \delta y = q \delta y$ , und mithin

$$d \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dy}{ds} \right) + q d \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dz}{ds} \right) = 0$$

als Gleichung der Curve des schnellsten Falles, auf dieser Fläche. Wenn aber keine Fläche gegeben ist, so sind  $\delta y$  und  $\delta z$  unabhängig von einander; mithin sind

$$d \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dy}{ds} \right) = 0, \quad d \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dz}{ds} \right) = 0,$$

oder  $\frac{dy}{ds} = a\sqrt{x}$ ,  $\frac{dz}{ds} = b\sqrt{x}$  die Gleichungen für die Curve: a und b Constanten. Aus ihnen folgt zuerst  $b dy - a dz = 0$ ;

d. h. die Curve liegt in einer verticalen Ebene; was von selbst einleuchtet. Diese Ebene sei die der  $x$  und  $y$ , so ist  $dz=0$ ,

$b=0$ ; schreibt man noch  $\frac{1}{\sqrt{a}}$  anstatt  $a$ , so kommt  $\sqrt{a} \cdot dy = \sqrt{x} \cdot ds$ ; mithin  $a dy^2 = x(dx^2 + dy^2)$  und

$$(a-x)dy^2 = x dx^2, (a-x)ds^2 = a dx^2.$$

Man setze  $\frac{dx}{ds} = \cos \varphi$ , so kommt  $a-x = a \cos^2 \varphi$ ,

$x = a \sin^2 \varphi$ ; folglich  $dx = 2a \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$ , und

$$dy = \sqrt{\frac{x}{a-x}} \cdot dx = 2a \sin \varphi^2 d\varphi = a(1 - \cos 2\varphi) d\varphi;$$

daher durch Integration, da für den Anfangspunct A die Werthe von  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$  alle Null sind:  $y = a(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi)$ . Man erhält daher, noch  $\frac{1}{2}\psi$  anstatt  $\varphi$  schreibend:

$$x = \frac{1}{2}a(1 - \cos \psi), y = \frac{1}{2}a(\psi - \sin \psi)$$

welche Gleichungen, wie man sieht, eine Cycloide geben, deren erzeugender Kreis den Durchmesser  $a$  hat. Zur Bestimmung desselben seien  $x=h$ ,  $y=k$  die Coordinaten von B, und  $\psi'$  der entsprechende Werth von  $\psi$ , so ist

$$h = \frac{1}{2}a(1 - \cos \psi'), k = \frac{1}{2}a(\psi' - \sin \psi').$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die Unbekannten  $a$  und  $\psi'$  bestimmen. Für den Anfangspunct A ist  $x=0$ , mithin auch

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{a-x}} = 0; \text{ d. h. die Anfangsrichtung der Bewegung}$$

vertical nach unten, wie übrigens auch die gefundenen Gleichungen der Bahn lehren. Man denke sich in Fig. 15. AE horizontal, und die Cycloide AGE vertical nach unten gefehrt, so gelangt ein fallender Körper von A nach C am schnellsten auf dem Bogen AC, und eben so auch von E nach C am schnellsten auf dem Bogen EGC. Es kann sich also ereignen, daß der Körper, um am schnellsten nach dem gegebenen Puncte zu gelangen, erst unter diesen herabsinken und nachher wieder steigen



muß. Liegen beide Endpunkte in einer Horizontalen, so bleibt das gefundene Resultat ebenfalls richtig; der Körper muß, um durch die Schwere am schnellsten von A nach E zu gelangen, die ganze Cycloide AGE durchlaufen; seine Geschwindigkeit ist alsdann, bei der Ankunft in E, Null.

Da  $\sqrt{x} = \sqrt{a} \cdot \sin \frac{1}{2} \psi$ ,  $ds = a \sin \frac{1}{2} \psi \cdot d\psi$ , so ist die Fallzeit überhaupt

$$t = \int_0^{\psi'} \frac{ds}{\sqrt{2gx}} = \sqrt{\frac{a}{2g}} \int_0^{\psi'} d\psi = \psi' \sqrt{\frac{a}{2g}};$$

also z. B. die Dauer des Falles durch die ganze Cycloide AGE gleich  $2\pi \sqrt{\frac{a}{2g}}$ . (In Fig. 15. ist  $GD = a$ ).

Der Fall auf einer vertical oder auch schief liegenden Cycloide, deren Scheitel G zugleich der am tiefsten liegende Punkt ist, hat noch eine andere bemerkenswerthe Eigenschaft, nämlich die, daß ein ohne Anfangsgeschwindigkeit in irgend einem Punkte derselben entlassener Körper immer gleiche Zeiten braucht, um in Scheitel anzukommen. Nimmt man in Fig. 15. die durch C gehende Horizontale KC zur Axe der y, KG zur Axe der x, und setzt  $KG = h$ , Bogen  $CG = \sigma$ , so ist die Dauer des Falles von

C nach G, wenn die Cycloide vertical steht  $\int_0^h \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{\sqrt{2gx}}$ .

Nun ist  $\sigma^2 = 4ah$ , und allgemein, wenn s einen beliebigen zwischen C anfangenden und zwischen C und G endigenden Bogen bedeutet,  $(\sigma - s)^2 = 4a(h - x)$ , nach einer schon mehrfach erwähnten Eigenschaft der Cycloide; folglich  $(\sigma - s) \frac{ds}{dx} = 2a$ , und

$$t = \int_0^h \frac{2a}{\sigma - s} \cdot \frac{dx}{\sqrt{2gx}} = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^h \frac{dx}{\sqrt{hx - x^2}}.$$

Man findet aber

$$\int \frac{dx}{\sqrt{hx - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}h^2 - (x - \frac{1}{2}h)^2}} = \arcsin \left( \frac{x - \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} \right) + \text{Const.}$$

folglich  $\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{hx-x^2}} = \pi$ ; mithin  $t = \pi \sqrt{\frac{a}{2g}}$ ; also  $t$

unabhängig von  $h$ , w. z. b. w. Ist die Ebene der Cycloide nicht vertical, sondern unter dem Winkel  $i$  gegen die Verticale geneigt, so braucht man nur statt  $g$  die dieser Ebene parallele Componente von  $g$ , nämlich  $g \cos i$  zu setzen.

72. Es sei ein Punct auf einer Kugel beweglich, deren Gleichung  $L = x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ; so erhält man aus 2. in §. 69.,  $\mu = 0$  setzend:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X + 2\lambda x, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y + 2\lambda y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z + 2\lambda z.$$

Ist die beschleunigende Kraft die Schwere, so heißt der Punct ein mathematisches Pendel. Um die Bewegung desselben zu untersuchen, nehme man die Axe  $x$  vertical und positiv nach unten; so wird  $X = mg$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = 0$ . Schreibt man  $\lambda$  anstatt  $2\lambda$ , so kommt:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g + \lambda x, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \lambda y, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = \lambda z. \quad 1.$$

Diese Gleichungen der Reihe nach mit  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  multiplicirt, geben nach Addition der Producte und Integration (vgl. §. 70.)

$$\frac{1}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} v_0^2 + g(x - x_0). \quad 2.$$

Multiplicirt man die zweite der Gleichungen 1. mit  $z$ , die dritte mit  $y$ , und subtrahirt, so kommt:

$$\frac{z d^2 y - y d^2 z}{dt^2} = 0. \quad 3.$$

Nun ist aber  $z d^2 y - y d^2 z = d(z dy - y dz)$ ; daher kann man die Gleichung 3. sofort einmal integriren; man erhält

$$z dy - y dz = c dt, \quad 4.$$

wo  $c$  eine Constante. Diese Gleichung lehrt folgende Eigenschaft der Bewegung des Punctes kennen: Seine Projection auf die

durch den Mittelpunkt der Kugel gehende Horizontal-Ebene ( $r$  bewegt sich so, daß der von dem Mittelpunkte nach ihr gezogene Leitstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Der die Fläche zwischen zwei Leitstrahlen ist  $\frac{1}{2} \int (z dy - y dz)$  (§. 103. I.). Man setze nun:  $x = r \cos \psi$ ,  $y = r \sin \psi \cos \varphi$ ,  $z = r \sin \psi \sin \varphi$ , so findet sich leicht, durch Entwicklung der Differentiale  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (wie in §. 108., S. 211. I., wobei aber  $r$  constant bleibt)

$$ds^2 = r^2(d\psi^2 + \sin^2 \psi d\varphi^2), \quad z dy - y dz = r^2 \sin \psi^2 d\varphi.$$

Setzt man noch  $x_0 = r \cos \alpha$ , so geben die Gleichungen 2. u. 4.

$$\left. \begin{aligned} r^2(d\psi^2 + \sin^2 \psi d\varphi^2) &= (v_0^2 + 2gr(\cos \psi - \cos \alpha))dt^2 \\ r^2 \sin^2 \psi d\varphi &= c dt \end{aligned} \right\} 5.$$

durch deren Integration  $\psi$  und  $\varphi$  als Functionen von  $t$  zu bestimmen sind. Hier mag es genügen, nur den Fall sehr kleiner Schwingungen zu betrachten. Ist nämlich die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  Null oder sehr klein, und zugleich die anfängliche Ablenkung ( $\alpha$ ) des Pendels von der Verticalen sehr klein, so läßt die erste der Gleichungen 5., daß  $\cos \psi$  beständig sehr nahe = 1 sein, und mithin  $\psi$  während der ganzen Dauer der Bewegung sehr nahe Null bleiben muß; der Punct muß also kleine Schwingungen um die Verticale machen. Seine Geschwindigkeit ist über-

haupt in jedem Augenblicke gleich  $r \sqrt{\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \sin^2 \psi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}$ ;

$r \sin \psi \frac{d\varphi}{dt}$  ist ihre horizontale,  $r \frac{d\psi}{dt}$  die auf jener senkrechte

Componente. Würde die letztere nie Null, so müßte das Pendel beständig steigen oder beständig fallen; da dieses offenbar nicht sein kann, so muß es Zeiten geben, für welche  $\frac{d\psi}{dt} = 0$ .

Einen solchen Augenblick nehme man als Anfang, für ihn sei  $t=0$  und noch  $\frac{d\varphi}{dt} = s$ , so ergibt sich aus 5., da zugleich  $\psi = \alpha$ ,

$$r^2 s^2 \sin^2 \alpha = v_0^2 \quad \text{und} \quad sr^2 \sin \alpha = c, \quad 6.$$

oder weil  $\alpha$  sehr klein ist,  $\pm v_0 = r\alpha$ ,  $c = er^2\alpha^2$ . Da auch  $\psi$  beständig sehr klein ist, so erhält man, mit Vernachlässigung der vierten und höheren Potenzen von  $\alpha$  und  $\psi$ ,  $\cos\psi - \cos\alpha = \frac{1}{2}(\alpha^2 - \psi^2)$ ,  $\sin\psi = \psi$ ; und mithin aus 5.

$$\left. \begin{aligned} r(d\psi^2 + \psi^2 d\varphi^2) &= (re^2\alpha^2 + g(\alpha^2 - \psi^2))dt^2 \\ \psi^2 d\varphi &= s\alpha^2 dt \end{aligned} \right\} 7.$$

Man betrachte zuerst den Fall, in welchem  $s=0$ , also die horizontale Anfangsgeschwindigkeit Null ist. Alsdann ist  $d\varphi=0$ , oder  $\varphi$  constant; die Bewegung erfolgt ganz in einer Ebene.

Setzt man  $n = \sqrt{\frac{g}{r}}$ , so giebt die erste der Gleichungen 7.

$$d\psi^2 = n^2(\alpha^2 - \psi^2)dt^2,$$

folglich  $ndt = \pm \frac{d\psi}{\sqrt{\alpha^2 - \psi^2}}$ , und durch Integration:

$$nt + \text{Const.} = \mp \arccos \frac{\psi}{\alpha}.$$

Nimmt man auf beiden Seiten

Seiten den Cosinus, so fällt das Doppelzeichen weg; man findet

$$\cos(nt + C) = \frac{\psi}{\alpha};$$

oder weil für  $\psi = \alpha$ ,  $t = 0$  wird,

$$\cos C = 1, \text{ und mithin}$$

$$\psi = \alpha \cos nt.$$

Der Werth von  $\psi$  geht also beständig zwischen  $\alpha$  und  $-\alpha$  hin und her; die Dauer einer vollen Periode (Doppelschwingung) findet man, wenn man  $nt = 2\pi$  setzt, denn alsdann wird  $\psi$  zum zweiten Male gleich  $\alpha$ , wie für  $t = 0$  zum ersten Male; diese

$$\text{Dauer ist mithin gleich } \frac{2\pi}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Ist  $s$  nicht Null, so erhält man ein conisches Pendel. Durch Elimination von  $d\varphi$  ergiebt sich aus 7., wenn wieder  $g = n^2 r$  ist:

$$\psi^2 d\psi^2 = (\alpha^2 - \psi^2)(n^2 \psi^2 - e^2 \alpha^2) dt^2$$

oder, wenn noch  $e^2 \alpha^2 = n^2 r^2$  gesetzt wird:

$$\psi^2 d\psi^2 = (\alpha^2 - \psi^2)(\psi^2 - \gamma^2)n^2 dt^2;$$

mithin 
$$n dt = \frac{\pm \psi d\psi}{\sqrt{(\alpha^2 - \psi^2)(\psi^2 - \gamma^2)}}.$$

Der Werth von  $\psi^2$  geht mithin zwischen den Grenzen  $\alpha^2$  u.  $\gamma^2$  beständig hin und her. Für  $t=0$  wird  $\psi=\alpha$ , nach der Voraussetzung; man kann aber den Anfang der Zeit wählen, daß der Punkt für  $t=0$  zu fallen beginne, d. h. man kann, ohne der Allgemeinheit zu schaden, annehmen, daß  $\alpha^2$  größer sei als  $\gamma^2$ , wenn nicht beide einander gleich sind. Für gerade dieser besondere Fall statt, so müßte  $\psi^2$  fortwährend gleich  $\alpha^2$  sein; alsdann wäre, nach 7., auch  $\frac{d\varphi}{dt}$  constant; der Punkt würde also mit gleichförmiger Geschwindigkeit einen horizontalen Kreis beschreiben.

Im Allgemeinen läßt obige Gleichung sich auch schreiben wie folgt:

$$n dt = \frac{\pm 2\psi d\psi}{\sqrt{(\alpha^2 - \gamma^2)^2 - (2\psi^2 - \alpha^2 - \gamma^2)^2}}$$

und giebt mithin durch Integration:

$$2nt + \text{Const.} = \pm \arccos \left( \frac{2\psi^2 - \alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2 - \gamma^2} \right)$$

oder, wenn man auf beiden Seiten den Cosinus nimmt, wobei das doppelte Zeichen wegfällt:

$$(\alpha^2 - \gamma^2) \cos(2nt + C) = 2\psi^2 - \alpha^2 - \gamma^2.$$

Für  $t=0$  wird  $\psi=\alpha$ , folglich  $\cos C=1$ , und mithin ist

$$2\psi^2 = \alpha^2 + \gamma^2 + (\alpha^2 - \gamma^2) \cos(2nt). \quad 8.$$

Zur Bestimmung von  $d\varphi$  hat man noch  $\psi^2 d\varphi = \varepsilon \alpha^2 dt$ ; folglich

$$d\varphi = \frac{2\varepsilon \alpha^2 dt}{\alpha^2 + \gamma^2 + (\alpha^2 - \gamma^2) \cos 2nt}. \quad 9.$$

Man setze  $\alpha^2 + \gamma^2 = a(\alpha^2 - \gamma^2)$ , so wird  $\sqrt{a^2 - 1} = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha^2 - \gamma^2}$  und

$$d\varphi = \frac{2\epsilon\alpha^2 dt}{(\alpha^2 - \gamma^2)(a + \cos 2nt)} = \sqrt{a^2 - 1} \cdot \frac{\cancel{a} n dt}{a + \cos(2nt)},$$

weil  $\frac{\epsilon\alpha}{\gamma} = n$  (die Werthe von  $\epsilon, \alpha, \gamma, n$  sind sämmtlich als positiv zu betrachten). Hieraus erhält man durch Integration, wenn in §. 27. S. 72. das dortige  $2\varphi = \pi - 2nt$  gesetzt wird:

$$\text{Const.} - 2\varphi = \text{arc sin } \frac{1 + a \cos 2nt}{a + \cos 2nt},$$

oder auf beiden Seiten den Sinus nehmend:

$$\sin(C - 2\varphi) = \frac{1 + a \cos 2nt}{a + \cos 2nt}.$$

Nimmt man an, daß für  $t = 0, \varphi = 0$  ist, so wird  $\sin C = 1$ ; mithin

$$\cos 2\varphi = \frac{1 + a \cos 2nt}{a + \cos 2nt}, \quad \text{oder} \quad \frac{1 - \cos 2\varphi}{1 + \cos 2\varphi} = \frac{a - 1}{a + 1} \cdot \frac{1 - \cos 2nt}{1 + \cos 2nt},$$

oder endlich, weil  $\frac{a - 1}{a + 1} = \frac{\gamma^2}{\alpha^2}$ , nach Ausziehung der Wurzel:

$$\alpha \operatorname{tg} \varphi = \gamma \operatorname{tg} nt. \quad 10.$$

Hier ist das positive Wurzelzeichen gewählt, weil, indem  $t$  von 0 an wächst, zufolge 9. auch  $\varphi$  von 0 an stetig wachsen muß. Man hat, nach 8.

$$\begin{aligned} \psi^2 &= \frac{1}{2}(\alpha^2 + \gamma^2 + (\alpha^2 - \gamma^2)\cos 2nt) \\ &= \alpha^2(\cos nt)^2 + \gamma^2(\sin nt)^2; \end{aligned}$$

hieraus ergibt sich, zufolge 10.

$$\psi^2 \cos \varphi^2 = \alpha^2 (\cos nt)^2, \quad \psi^2 \sin \varphi^2 = \gamma^2 (\sin nt)^2.$$

Es ist aber  $y = r \sin \psi \cos \varphi, z = r \sin \psi \sin \varphi$ ; folglich, mit Vernachlässigung der vierten und höheren Potenzen von  $\psi$ ,  $y^2 = r^2 \psi^2 \cos \varphi^2, z^2 = r^2 \psi^2 \sin \varphi^2$ , und mithin

$$y^2 = \alpha^2 (\cos nt)^2, \quad z^2 = \gamma^2 (\sin nt)^2;$$

folglich  $\frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ ; d. h. die Projection der Bahn des Punctes auf die horizontale Ebene  $yz$  ist eine Ellipse. Die Zeit

eines Umschwunges um die Verticale findet man, wenn  $\varphi = 2\pi$  setzt; alsdann wird nach 10.  $nt = 2\pi$  (für  $\varphi = \pi$  wurde vorher  $nt = \pi$ ); diese Zeit ist mithin gleich  $2\pi$ .

### Ueber die Bewegung mehrerer Punkte, unter gegenseitigen Anziehungen.

73. Man denke sich zunächst zwei freie Punkte, zwischen denen eine gegenseitige Anziehung (oder auch Abstoßung) existirt, die irgend eine Function der Entfernung sei. Es ist die Intensität derselben, für die Entfernung  $\varrho$ ;  $m$  und  $m'$  Massen der Punkte,  $x, y, z$  und  $x', y', z'$  ihre Coordinaten Bezug auf drei unbewegliche rechtwinkliche Axen; so sind die Componenten der auf  $m$  wirkenden Anziehung von  $m'$  
$$X = \pm R \frac{(x' - x)}{\varrho}, Y = \pm R \frac{(y' - y)}{\varrho}, Z = \pm R \frac{(z' - z)}{\varrho},$$
 die doppelten Zeichen noch unbestimmt bleiben können, (nur  $m'$  entweder alle oberen zugleich, oder alle unteren zugleich gelten; die Componenten der auf  $m'$  wirkenden Anziehung sind  $-X, -Y, -Z$ ). Man erhält demnach zur Bestimmung der Bewegung der Punkte, deren jeder eine beliebige Anfangsgeschwindigkeit erhalten zu haben vorausgesetzt wird:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= X, m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y, m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z, \\ m' \frac{d^2 x'}{dt^2} &= -X, m' \frac{d^2 y'}{dt^2} = -Y, m' \frac{d^2 z'}{dt^2} = -Z. \end{aligned} \right\} 1.$$

Addirt man die unter einander stehenden Gleichungen, so folgt  $m \frac{d^2 x}{dt^2} + m' \frac{d^2 x'}{dt^2} = 0$ , also durch Integration  $m \frac{dx}{dt} + m' \frac{dx'}{dt} = \alpha$  u. s. f.; es gelten also folgende Gleichungen:

$$m \frac{dx}{dt} + m' \frac{dx'}{dt} = \alpha, m \frac{dy}{dt} + m' \frac{dy'}{dt} = \beta, m \frac{dz}{dt} + m' \frac{dz'}{dt} = \gamma, \quad 2$$

in welchen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  Constanten sind. Diese Gleichungen lehren, daß die Summen der Bewegungsmomente der Punkte, nach jeder der drei Aen, unveränderlich sind, oder mit anderen Worten: Denkt man sich die den Bewegungsmomenten der Punkte gleichgeltenden Kräfte an einem gemeinsamen Angriffspunkte O in ihren Richtungen angebracht, und in eine Resultante, vereinigt, welche man das resultirende Bewegungsmoment nennen kann; so ist dieses, während der ganzen Dauer der Bewegung, nach Richtung und Größe, unveränderlich. Dieser wichtige Satz läßt sich auch leicht ohne Hülfe der Rechnung beweisen. Denn es sei R das resultirende Bewegungsmoment in irgend einem Augenblicke; so kommt in dem folgenden Augenblicke die Wirkung der Anziehung zwischen m und m' hinzu, und um die Aenderung von R zu finden, muß man die den Punkten durch sie ertheilten Bewegungsmomente (oder, was einerlei ist, die ihnen gleichgeltenden Kräfte) in ihren Richtungen an demselben Punkte O anbringen, wo sie aber, weil einander gleich und entgegengerichtet, einander aufheben. Within bleibt R während der ganzen Dauer der Bewegung unveränderlich; w. z. b. w.

Diese höchst einfachen Betrachtungen gestatten noch weitere Ausdehnung. Bringt man nämlich an dem Punkte O jedes der Bewegungsmomente von m und m' nicht allein in seiner Richtung, sondern auch in entgegengesetzter an; so erhält man, mit Hinzunahme der wirklichen Bewegungsmomente von m und m', außer der Resultante R an O noch zwei Paare von Bewegungsmomenten, welche sich sofort in ein einziges zusammensetzen lassen. Denn der Umstand, daß die Punkte m, m', O nicht fest, und überhaupt gar nicht mit einander verbunden sind, hindert nicht, aus den an ihnen vorhandenen Kräften solche Combinationen zu bilden, wie Mittelfraft und zusammengesetztes Paar sind; aus demselben folgt nur, daß diese Combinationen in dem gegenwärtigen Falle nicht für die Kräfte selbst gesetzt werden, oder ihnen nicht gleichgelten können, wie bei festverbundenen Punkten der Fall sein würde. Dieses wird aber auch nicht behauptet. Denkt



man sich nun in irgend einem Augenblicke der Bewegung zusammengesetzte Paar der Bewegungsmomente in Bezug den beliebig gewählten Punct  $O$  gebildet, so ist erstens klar, dasselbe unveränderlich bleiben würde, wenn keine gegenseitige Anziehung weiter Statt fände, und mithin die Puncte  $m$  und  $m'$  von nun an gleichförmig in gerader Linie fortgingen. Das Moment einer Kraft in Bezug auf einen Punct ( $O$ ) ändert sich nicht, wenn der Angriffspunct der Kraft in der Richtung derselben beliebig verlegt wird. Im nächsten Augenblicke wenn nun die Bewegungsmomente der Puncte durch die Anziehung zwischen ihnen geändert; da diese aber einander gleich und gegengerichtet sind, so bilden sie zusammen ein Paar, dessen Resultant Null ist, und durch dessen Hinzutreten mithin das zusammengesetzte Paar der Bewegungsmomente nicht geändert werden kann.

Man sieht sogleich, daß vorstehende Schlüsse nicht ausschließlich für zwei, sondern überhaupt für beliebig viele Kräfte gelten, und nichts weiter voraussetzen, als daß die auf sie wirkenden beschleunigenden Kräfte in jedem Augenblicke einander zu zweien gleich und entgegengerichtet sind (oder sich in je zwei solche zerlegen lassen). Unter dieser Voraussetzung bleiben für beliebig viele Puncte das resultirende Bewegungsmoment und das resultirende Paar der Bewegungsmomente, in Bezug auf einen beliebig gewählten Punct  $O$ , während der ganzen Dauer der Bewegung gleich und unveränderlich.

Nachdem der Punct  $O$  für irgend einen Augenblick der Bewegung beliebig im Raume gewählt ist, kann man entweder jedem folgenden Augenblicke wieder denselben Punct wählen, oder auch jeden anderen  $O'$ , der von  $O$  aus in der Richtung des resultirenden Bewegungsmomentes ( $R$ ) liegt, um nämlich nach Ebene und Größe, dasselbe zusammengesetzte Paar der Bewegungsmomente (es heiße  $Q$ ) zu erhalten. Wird nämlich überhaupt statt  $O$  ein anderer Punct  $O'$  gewählt, so ändert sich das Paar  $Q$  nur dadurch, daß zu ihm ein neues hinzutritt,

ches entsteht, indem man die Kraft  $R$  in ihrer Richtung und in entgegengesetzter an  $O'$  anbringt, wodurch die einzelne Kraft  $R$  an  $O'$  und das Paar  $(R, -R)$  an dem Arme  $OO'$  erhalten wird. Dieses Paar, mit dem Paare  $Q$  zusammengesetzt, giebt das dem Punkte  $O'$  entsprechende zusammengesetzte Paar der Bewegungsmomente  $Q'$ . Wenn nun der Punkt  $O'$  von  $O$  aus in der Richtung von  $R$  liegt, so ist das Paar  $(R, -R)$  offenbar Null, also das Paar  $Q'$  einerlei mit  $Q$ ; w. z. b. w.

74. Diese Sätze lassen sich noch auf eine andere Art ausdrücken, welche die in ihnen enthaltenen Eigenschaften der Bewegung sehr anschaulich macht. Setzt man nämlich  $mx + m'x' = (m + m')u$ ,  $my + m'y' = (m + m')v$ ,  $mz + m'z' = (m + m')w$ , so erhält man aus den Gleichungen 2. des vorigen §. sofort:

$$(m + m') \frac{du}{dt} = \alpha, \quad (m + m') \frac{dv}{dt} = \beta, \quad (m + m') \frac{dw}{dt} = \gamma.$$

Der Punkt, dessen Coordinaten  $u, v, w$  durch die vorhergehenden Gleichungen bestimmt sind, wird zuweilen der Mittelpunkt der Massen  $m$  und  $m'$  genannt; da er aber, wenn man sich an  $m$  und  $m'$  parallele und diesen Massen proportionale Kräfte in gleichem Sinne angebracht vorstellt, oder wenn man sich die Massen als schwer denkt, ihr Schwerpunkt sein würde, so nennt man ihn gewöhnlich den Schwerpunkt der Massen. Doch muß man bemerken, daß von parallelen Kräften und insbesondere von Schwere hier gar nicht die Rede ist. Nach den vorstehenden Formeln sind die Geschwindigkeiten dieses Schwerpunktes nach den Ägen unveränderlich; derselbe ist also entweder beständig in Ruhe (wenn  $\alpha, \beta, \gamma$  Null sind), oder er bewegt sich gleichförmig und geradlinig fort; unter allen Umständen aber ist seine Lage in jedem Augenblicke gänzlich unabhängig von den gegenseitigen Anziehungen zwischen  $m$  und  $m'$ .

Aus den Gleichungen 1. des vorigen §. erhält man ferner:

$$\frac{m(x d^2y - y d^2x)}{dt^2} = Yx - Xy, \quad \frac{m'(x' d^2y' - y' d^2x')}{dt^2} = -(Yx' - Xy');$$

folglich durch Addition auf der rechten Seite:

$$Y(x-x')-X(y-y')=\pm\frac{R}{\rho}((y'-y)(x-x')-(x'-x)(y-y'))=0$$

mithin auch

$$\frac{m(xd^2y-yd^2x)+m'(x'd^2y'-y'd^2x')}{dt^2}=0.$$

Diese Gleichung läßt sich einmal sofort integrieren; man erhält (vgl. §. 72, 3.)

$$\frac{m(xdy-ydx)+m'(x'dy'-y'dx')}{dt}=k.$$

Auf dieselbe Weise ergeben sich die beiden ähnlichen:

$$\frac{m(zdx-xdz)+m'(z'dx'-x'dz')}{dt}=k'$$

$$\frac{m(ydz-zdy)+m'(y'dz'-z'dy')}{dt}=k''.$$

3.

Die Glieder auf der linken Seite drücken die Componenten des zusammengesetzten Paares  $Q$ , in Bezug auf den Anfang der Coordinaten, aus, wie man augenblicklich sieht, wenn man bemerkt,

daß hier  $m\frac{dx}{dt}$ ,  $m\frac{dy}{dt}$ ,  $m\frac{dz}{dt}$  die Componenten der an den

Puncte  $(x, y, z)$  vorhandenen Kraft sind, welche mithin in den Ausdrücken für  $N, M, L$  (§. 16.) anstatt  $P \cos \alpha, P \cos \beta,$

$P \cos \gamma$  gesetzt werden müssen; so wie ebenfalls  $m'\frac{dx'}{dt}$  für

$P' \cos \alpha'$ , u. s. f. Die vorstehenden Gleichungen enthalten mithin

den Satz von der Unveränderlichkeit des zusammengesetzten Paares der Bewegungsmomente, für zwei Puncte. Denkt man sich immer

aus dem Anfange der Coordinaten ( $O$ ) Leitstrahlen  $Om$

$Om'$  nach  $m$  und  $m'$  gezogen, so stellen die Zähler auf der linken

Seite die doppelten Summen der unendlich kleinen Glücke dar,

welche die Projectionen von  $Om$  und  $Om'$  auf die Ebenen

$xy, zx, yz$  in der Zeit  $dt$  überstreichen; die Gleichungen 3. lauten

mithin, daß jede dieser Summen dem Differentiale der Zeit

proportional ist, woraus, da die Coordinaten-Ebenen ganz beliebig sind, folgender Satz hervorgeht:

Die Summen der Flächenträume, welche die Projectionen der von einem unveränderlichen nach den beweglichen Punkten gehenden Leitstrahlen, auf eine unveränderliche Ebene, in gleichen Zeiten überstreichen, sind einander gleich.

Die bisherigen Sätze lassen sich auch ausdehnen auf die relativen Bewegungen der Punkte in Bezug auf irgend einen Punkt  $O'$ , der in gerader Linie gleichförmig fortgeht. Denn es sei  $a$  die Geschwindigkeit von  $O'$  und man denke sich an dem Punkte  $m$  das Bewegungsmoment  $ma$  in der Richtung der Bewegung von  $O'$  und in der entgegengesetzten (also  $ma$  und  $-ma$ ) angebracht; eben so  $m'a$  und  $-m'a$  an  $m'$ , u. s. f. an allen Punkten, so viele deren sein mögen; wodurch nichts geändert wird. Setzt man nun  $-ma$  mit dem wirklichen Bewegungsmomente von  $m$  in eine Resultante  $mv$  zusammen, so hat nunmehr  $m$  eine der von  $O'$  gleiche und parallele Geschwindigkeit  $a$ , und eine relative Geschwindigkeit  $v$  gegen  $O'$ ; von den übrigen Punkten gilt dasselbe. Es ist nun klar, daß man sich die allen Punkten mit  $O'$  gemeinsame Geschwindigkeit  $a$  ganz hinweg denken, also  $O'$  als ruhend, und an den Punkten  $m, m', \dots$  nur noch die Geschwindigkeiten  $v, v', \dots$  als vorhanden annehmen kann, wodurch dieser Fall ganz auf den bisher betrachteten zurückgeführt wird. Demnach bleibt die Resultante  $R'$  der relativen Bewegungsmomente  $mv, m'v, \dots$ , und eben so ihr zusammengesetztes Paar, gebildet in Bezug auf  $O'$ , (es heiße  $Q'$ ) fortwährend unveränderlich.

Um dieses auch noch durch Rechnung zu zeigen, seien  $\xi, \eta, \zeta$  die Coordinaten von  $O'$  in Bezug auf den unbeweglichen Anfang  $O$  der  $x, y, z$ ; die Axe der  $x$  falle in die Richtung der Bewegung von  $O'$ , so wird  $\frac{d\xi}{dt} = a, \frac{d\eta}{dt} = 0, \frac{d\zeta}{dt} = 0$ ; und  $\xi = at + a', \eta = 0, \zeta = 0$ .

Nun sind  $\frac{dx}{dt} - \frac{d\xi}{dt}$ , u. s. f. die Componenten der relativen Geschwindigkeit von  $m$  gegen  $O'$ ; und da nach 2. im vorigen §.

$m \frac{dx}{dt} + m' \frac{dx'}{dt} = \alpha$ , oder überhaupt  $\sum m \frac{dx}{dt} = \alpha$  ist, so kommt

$$\sum m \left( \frac{dx - d\xi}{dt} \right) = \alpha - a \sum m, \quad \sum m \left( \frac{dy - d\eta}{dt} \right) = \beta, \quad \sum m \left( \frac{dz - d\zeta}{dt} \right) = \gamma.$$

Ferner ist  $\sum m \left( \frac{xdy - ydx}{dt} \right) = k$  (nach 3.),  $\sum m \frac{dy}{dt} = \beta$ ,  $\sum my = \beta t + \beta'$ ; folglich

$$\begin{aligned} \sum m \left( \frac{(x-\xi)dy - y(dx-d\xi)}{dt} \right) &= \sum m \left( \frac{xdy - ydx}{dt} \right) - \xi \sum m \frac{dy}{dt} + \frac{d\xi}{dt} \sum m' \\ &= k - (at + a')\beta + (\beta t + \beta')a = k - a'\beta + \beta'a = k_1. \end{aligned}$$

d. h. die der Ebene  $xy$  parallele Componente ( $k_1$ ) von  $Q$  ist constant; und eben so sind es die übrigen. Ist insbesondere  $O$  der Schwerpunkt, so wird, weil die von ihm durchlaufene Gerade hier als Axe der  $x$  zu nehmen ist,  $\sum my = 0$ , also  $\beta = 0$ ,  $\beta' = 0$ , und mithin  $k_1 = k$ ; überhaupt ist alsdann das Paar  $Q$  einkelt mit  $Q$ .

75. Um die Bewegung der beiden Punkte  $m$  und  $m'$  näher zu bestimmen, nehme man von jetzt an ihren Schwerpunkt zum Anfange der Coordinaten, so wird  $mx + m'x' = 0$ ,  $my + m'y' = 0$ ,  $mz + m'z' = 0$ ; folglich auch

$$m dx + m' dx' = 0, \quad m dy + m' dy' = 0, \quad m dz + m' dz' = 0.$$

Es sei noch die Ebene  $xy$  parallel der von  $Q$ ; so wird in 3.  $k' = 0$ ,  $k'' = 0$ , und  $k$  gleich dem Momente von  $Q$ . Ferner erhält man aus den vorstehenden Gleichungen  $m'm'(x'dy' - y'dx) = mm(xdy - ydx)$ , u. s. f.; schafft man mit Hülfe dieser Ausdrücke die Coordinaten von  $m'$  aus den Gleichungen 3. weg, so kommt:

$$xdy - ydx = hdt, \quad zdx - xdz = 0, \quad ydz - zdy = 0, \quad \text{wo } h = \frac{km'}{m + m'}.$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit  $z, y, x$ , so kommt auf der linken Seite Null, mithin ist  $hz = 0$ , oder  $z = 0$ , und folglich auch  $z' = 0$ . Zur Bestimmung von  $x, y$ , hat man demnach bis jetzt eine Gleichung, nämlich:  $xdy - ydx = hdt$ . Um eine zweite zu erhalten, nehme man die Grundgleichungen (1., §. 73.):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \pm \frac{R(x-x')}{\rho}, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = \pm \frac{R(y-y')}{\rho}.$$

Man hat  $m'(x-x') = (m+m')x$ ,  $m'(y-y') = (m+m')y$ ,  
folglich auch

$$m'^2 \rho^2 = m'^2 ((x-x')^2 + (y-y')^2) = (m+m')^2 (x^2 + y^2).$$

Nach Wegschaffung von  $x'$  und  $y'$  ergibt sich daher aus den  
vorigen:

$$mm' \frac{d^2 x}{dt^2} = \pm (m+m') \frac{Rx}{\rho}, \quad mm' \frac{d^2 y}{dt^2} = \pm (m+m') \frac{Ry}{\rho}.$$

Hier muß aber, wenn  $m$  und  $m'$  einander anziehen, von den  
beiden Vorzeichen das untere genommen werden; denn da der  
Schwerpunkt sich beständig zwischen  $m$  und  $m'$  befindet, so wird  
jeder Punkt nach ihm, d. i. nach dem Anfange der Coordinaten  
hingezogen, mithin ist z. B. die Zunahme seiner Geschwindig-  
keit nach  $x$ , und also auch seine Beschleunigung  $\frac{d^2 x}{dt^2}$  negativ,  
wenn  $x$  positiv, und positiv, wenn  $x$  negativ ist. Multiplicirt  
man nun die erste obiger Gleichungen mit  $dx$ , die zweite mit  
 $dy$ , addirt die Producte, und schreibt  $dsd^2s$  anstatt  $dx d^2x + dy d^2y$ ,  
so erhält man, zugleich das untere Zeichen nehmend:

$$mm' \frac{ds d^2 s}{dt^2} = - (m+m') \frac{R(x dx + y dy)}{\rho},$$

oder weil  $m'^2 \rho d\rho = (m+m')^2 (x dx + y dy)$  ist:

$$m \frac{ds d^2 s}{dt^2} = - \frac{m'}{m+m'} \cdot R d\rho.$$

76. Nach dem von Newton entdeckten und durch alle  
späteren Untersuchungen immer mehr bestätigten Gesetze der all-  
gemeinen Gravitation ziehen je zwei materielle Punkte im Raume  
einander mit einer Kraft an, welche ihren Massen direct, und  
dem Quadrate ihrer Entfernung umgekehrt proportional ist.  
Es würde hier zu weitläufig sein, anzugeben, auf welche Weise  
dieses Gesetz aus Keplers später zu erwähnenden Entdeckungen

über die Bewegungen der Himmelskörper hat können hergeleitet werden; die nachstehenden Betrachtungen beschränken sich auf darauf, einige der einfachsten Folgerungen aus ihm zu entwickeln. Es sei  $c$  die Intensität der Anziehung zwischen je der Einheit gleichen Massen in der Einheit der Entfernung,  $R = \frac{cm}{\rho^2}$  ist, unter der Voraussetzung des angegebenen Gesetzes, mithin verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in:

$$\frac{ds^2}{dt^2} = -\frac{cm'm'}{m+m'} \cdot \frac{d\rho}{\rho^2},$$

oder durch Integration in

$$\frac{1}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{cm'm'}{m+m'} \left( \frac{1}{\rho} + \text{Const.} \right)$$

Außer dieser Gleichung hat man noch  $x dy - y dx = h dt$ . Man setze  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , so wird  $x^2 + y^2 = r^2$ , mithin  $m' \rho = (m + m') r$ , and zugleich

$$x dy - y dx = r^2 d\varphi, \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Setzt man diese Werthe in die vorstehenden Gleichungen ein, so kommt

$$dr^2 + r^2 d\varphi^2 = \frac{2cm'^2}{(m+m')^2} \left( \frac{1}{r} + f \right) dt^2 \quad \text{und} \quad r^2 d\varphi = h dt$$

wo  $f$  eine Constante ist. Es sei ferner zur Abkürzung  $\frac{m' \sqrt{2cm'}}{m+m'} = q$ ,  $qt = \Theta$ ,  $h = q\gamma$ , so kommt:

$$dr^2 + r^2 d\varphi^2 = \left( f + \frac{1}{r} \right) d\Theta^2, \quad r^2 d\varphi = \gamma d\Theta. \quad 1.$$

Um diese Gleichungen weiter zu integrieren, setze man  $r = \frac{1}{z}$ ; alsdann kommt:

$$dz^2 + z^2 d\varphi^2 = (f + z) z^4 d\Theta^2, \quad d\varphi = \gamma z^3 d\Theta,$$

und mithin, nach Wegschaffung von  $d\Theta$ ,

$$\gamma^2 (dz^2 + z^2 d\varphi^2) = (f + z) d\varphi^2.$$

Wird hieraus der Werth von  $d\varphi$  entwickelt, so ergibt sich

$$d\varphi = \frac{\pm \gamma^2 dz}{\sqrt{\frac{1}{4} + \gamma^2 f - (\gamma^2 z - \frac{1}{2})^2}}.$$

Die Größe  $\frac{1}{4} + \gamma^2 f$  muß demnach positiv sein; man setze also

$$\frac{1}{4} + \gamma^2 f = \frac{1}{4} e^2,$$

so kommt 
$$d\varphi = \frac{\pm 2\gamma^2 dz}{\sqrt{e^2 - (2\gamma^2 z - 1)^2}},$$

und durch Integration  $\varphi + \text{Const} = \mp \arccos \frac{2\gamma^2 z - 1}{e}$ , wo

man sich  $e$  positiv denken kann. Nimmt man auf beiden Seiten den Cosinus, und schreibt noch  $\varphi$  anstatt  $\varphi + \text{Const}$ ,  $\frac{1}{r}$  anstatt  $z$ , setzt auch  $2\gamma^2 = p$ , so ergibt sich  $\cos \varphi = \frac{p - r}{er}$ ,

oder 
$$r(1 + e \cos \varphi) = p. \quad 2.$$

In dieser Gleichung sind  $e$  und  $p$  positive, übrigens aber noch unbestimmte Constanten, weil sie von den vorigen Constanten  $f$  und  $\gamma$  (oder  $h$ ) abhängen. Eine dritte Constante in derselben ist dadurch beseitigt, daß  $\varphi$  anstatt  $\varphi + \text{Const}$  geschrieben worden. Nimmt man sofort den Fall aus, in welchem  $p = 0$ , (in diesem Falle wäre auch  $\gamma = 0$ , und mithin schon nach 1.  $d\varphi = 0$ ; die Punkte würden sich dann in einer geraden Linie bewegen); so giebt die Gleichung 2. eine Curve zweiten Grades. Dieselbe ist ein Kreis für  $e = 0$ , eine Ellipse, wenn  $e < 1$ , eine Parabel, wenn  $e = 1$ , und eine Hyperbel, wenn  $e > 1$ . Der Schwerpunkt ist in jedem Falle zugleich ein Brennpunct derselben. Verlangt man die Gleichung in rechtwinklichen Coordinaten, so ist zuerst  $r^2 = (p - er \cos \varphi)^2$  und  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ; mithin  $x^2 + y^2 = (p - ex)^2$ , woraus folgt:

$$[(1 - e^2)x + ep]^2 + (1 - e^2)y^2 = p^2.$$

Es werde nunmehr angenommen, daß  $e < 1$ , also die Bahn elliptisch sei. Bezeichnet man ihre halbe große Axe mit  $a$ , die halbe kleine mit  $b$ , so giebt die vorstehende Gleichung:



$$a = \frac{P}{1-e^2}, \quad b = \frac{P}{\sqrt{1-e^2}}, \quad \text{mithin} \quad ap = b^2.$$

(p ist der halbe Parameter.)

Zur Bestimmung von  $\Theta$  hat man noch:

$$yz^2 d\Theta = \frac{\pm 2y^2 dz}{\sqrt{e^2 - (2yz^2 - 1)^2}},$$

weil beide Ausdrücke gleich  $d\varphi$  sind; setzt man wieder  $\frac{1}{r}$  für  $z$ , und  $2y^2 = p$ , mithin  $2y = \sqrt{2p}$ , so kommt

$$d\Theta = \frac{\mp \sqrt{2p} \cdot r dr}{\sqrt{e^2 r^2 - (p - r)^2}} = \frac{\mp \sqrt{2p} \cdot r dr}{\sqrt{2pr - p^2 - (1 - e^2)r^2}},$$

$$\text{oder, weil } p = a(1 - e^2), \quad d\Theta = \frac{\mp \sqrt{2a} \cdot r dr}{\sqrt{2ar - a^2(1 - e^2) - r^2}},$$

$$\text{mithin} \quad d\Theta = \frac{\mp \sqrt{2a} \cdot r dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (a - r)^2}}.$$

Um diese Formel leicht zu integrieren, setze man  $a - r = a \cos v$ , so erhält man sofort:

$$d\Theta = \pm a \sqrt{2a} (1 - e \cos v) dv.$$

Da die Zeit beständig wachsend, oder  $dt$  und mithin auch  $d\theta$  immer positiv gedacht wird, so muß in dieser Formel das positive Zeichen für ein zunehmendes, das negative für ein abnehmendes  $v$  gelten. Aus der zweiten der Gleichungen 1. geht aber, da man je denfalls  $y$  als positiv ansehen kann, hervor, daß  $\varphi$  mit der Zeit beständig wächst; demnach folgt aus 2., daß  $r$  zwischen den Grenzen

$\frac{P}{1+e}$  und  $\frac{P}{1-e}$  beständig hin und hergeht; und da diese

Grenzen einerlei sind mit  $a(1-e)$  und  $a(1+e)$ , so folgt, daß auch  $\cos v$  alle Werthe zwischen  $-1$  und  $+1$ , in immer wiederkehrender stetiger Folge, erhält. Man könnte sich demnach  $v$  zuerst von  $0$  bis  $\pi$  wachsend, denn wieder von  $\pi$  bis

0 abnehmend vorstellen; man kann sich aber auch  $v$  von 0 bis  $2\pi$ , und wenn man will noch weiter, beständig wachsend denken. Demnach gilt, unter der zulässigen Voraussetzung eines mit der Zeit beständig wachsenden  $v$ , in obiger Gleichung das positive Zeichen, und man erhält durch Integration:

$$\Theta = a\sqrt{2a}(v - e \sin v),$$

wo keine Constante hinzugefügt zu werden braucht, wenn man für  $v=0$ ,  $\Theta=0$ , mithin  $t=0$  annimmt. Man hat demnach die Gleichungen:

$$r = a(1 - e \cos v), \quad q t = a\sqrt{2a}(v - e \sin v), \quad 3.$$

welche, mit Hülfe von 2., die Bewegung von  $m$ , und folglich auch die von  $m'$ , bestimmen. Beide Punkte beschreiben um ihren Schwerpunkt  $O$  ähnliche Ellipsen, welche einen Brennpunct in  $O$  haben, und deren große Axen den Massen umgekehrt proportional sind. Die gerade Linie  $mOm'$  überstreicht bei der Bewegung in gleichen Zeiten gleiche Flächen, was auch von jedem ihrer Theile  $Om$  und  $Om'$ , einzeln genommen, gilt, da diese immer einander proportionirt sind. Die Zeit eines Umlaufes ( $T$ )

ergiebt sich aus 3. für  $v=2\pi$ ; man findet  $T = \frac{2\pi a\sqrt{2a}}{q}$ ,

oder weil  $q = \frac{m'\sqrt{2cm'}}{m+m'}$  ist,  $T = \frac{2\pi(m+m')a}{m'} \sqrt{\frac{a}{cm'}}.$

Verlangt man die relative Bahn von  $m$  in Bezug auf  $m'$ , so sind die relativen Coordinaten von  $m$ , nämlich  $x-x'$  und  $y-y'$  als Functionen der Zeit auszudrücken. Man hat aber  $m'(x-x') = (m+m')x$ , und  $x = r \cos \varphi$ , also  $m'(x-x') = (m+m')r \cos \varphi$ , und eben so  $m'(y-y') = (m+m')r \sin \varphi$ . Um die Gleichung der relativen Bahn anzugeben, setze man  $\rho^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2$ , wie oben, alsdann ist  $m'\rho = (m+m')r$ ; eliminirt man nun  $r$  aus 2. und 3., so kommt

$$\rho(1+e \cos \varphi) = \frac{(m+m')p}{m'}, \quad \rho = \frac{a(m+m')}{m'}(1-e \cos v),$$

$$t = \frac{(m+m')a}{m'} \sqrt{\frac{a}{cm'}} (\nu - e \sin \nu).$$

Die halbe große Ase  $a'$  der elliptischen relativen Bahn von  $m$  gegen  $m'$  ist mithin  $a' = \frac{a(m+m')}{m'}$ ; führt man diese in vorstehende Gleichung ein, so kommt, weil  $p = a(1-e^2)$ ,

$$p(1+e \cos \varphi) = a'(1-e^2), \quad p = a'(1-e \cos \nu),$$

$$t = a' \sqrt{\frac{a'}{c(m+m')}} (\nu - e \sin \nu).$$

Die Umlaufszeit ist  $T$ , wie vorhin; sie kann auch ausgedrückt

$$\text{werden durch } T = 2\pi a' \sqrt{\frac{a'}{c(m+m')}}.$$

77. Nimmt man an, daß zu  $m$  und  $m'$  noch ein dritter Punkt  $\mu$  hinzukommt, welcher wieder die beiden vorigen nach dem nämlichen Gesetze anzieht und von ihnen angezogen wird, so erhält man die berühmte Aufgabe der drei Körper, deren vollständige Lösung bisher der Integralrechnung nicht gelungen ist. Sind die Massen von  $m$  und  $\mu$  gegen  $m'$  sehr klein, und vernachlässigt man, bei einer ersten Annäherung wenigstens, die Brüche  $\frac{m}{m'}$ ,  $\frac{\mu}{m'}$ ; so kann man auch  $m'$  als im Schwerpunkte selbst ruhend betrachten, und die gegenseitige Anziehung zwischen  $m$  und  $\mu$  unberücksichtigt lassen, weil dieselbe in jedem Augenblicke gegen die Anziehungen von  $m'$  auf  $m$  und  $\mu$  sehr klein ist (so lange nämlich zwischen den Entfernungen der drei Punkte  $m'$ ,  $m$ ,  $\mu$  nur endliche Verhältnisse vorausgesetzt werden). Alsdann beschreibt erstens jeder der Punkte  $m$  und  $\mu$  um  $m'$  eine Ellipse, die einen Brennpunct in  $m'$  hat, und bewegt sich zweitens in derselben so, daß der von  $m'$  nach ihm gerichtete Radiusstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Die Umlaufszeit von  $m$  ist nach dem vorigen §., wenn man die Masse von  $m'$  als Einheit nimmt, und den nach der Voraussetzung sehr

kleinen Bruch  $m$  auch hier wegläßt, weil er schon vorher überall vernachlässigt ist,  $T = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{c}}$ ; und eben so ist die Umlaufzeit von  $\mu$ ,  $T' = 2\pi a' \sqrt{\frac{a'}{c}}$ , wo  $a$  und  $a'$  die halben großen Axen der Bahnen von  $m$  und  $\mu$  sind; folglich ist  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{c} = \frac{T'^2}{a'^3}$ ; d. h. drittens, die Quadrate der Umlaufzeiten beider Punkte verhalten sich, wie die Cuben der großen Axen ihrer Bahnen.

Diese drei Gesetze hat zuerst Kepler in den Bewegungen der Planeten um die Sonne erkannt; daher sie seinen Namen führen. Wie sich dieselben aus dem Gravitationsgesetze herleiten lassen, ist so eben gezeigt worden; es geht zugleich hervor, daß sie Annäherungen sind, die bei dem Planetensysteme, mehrerer günstiger Umstände wegen, schon sehr genau zutreffen.

Daß man die Körper des Sonnensystemes, bei der Bestimmung ihrer gegenseitigen Anziehungen nach dem Gravitationsgesetze, als bloße Punkte betrachten kann, folgt, wie man leicht einsieht, zuerst aus ihren großen Entfernungen von einander, läßt sich aber auch noch unabhängig von diesem Umstande auf andere Weise darthun. Man kann nämlich beweisen, daß eine Kugel, die entweder überhaupt gleichartig ist, d. h. deren Theile, bei gleichem Volumen immer gleiche Massen haben, oder die aus gleichartigen Schichten zwischen concentrischen Kugelflächen besteht, einen außer ihr befindlichen Punkt, auf den sie nach dem Gravitationsgesetze anziehend wirkt, eben so anzieht, als ob ihre Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre. Da nun die Sonne und die Planeten beinahe die Gestalt von Kugeln haben, so zieht jeder dieser Körper, wenn er auch in seinem Innern nicht gleichartig, sondern nur aus gleichartigen Schichten zusammengesetzt ist, einen außer ihm befindlichen Punkt nahe eben so an, als ob seine gesammte Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre.

Um den angegebenen Satz zu beweisen, denke man sich eine

gleichartige Kugelschale, von überall gleicher und unendlich kleiner Dicke  $s$ ; der Halbmesser ihrer Oberfläche (ob der äußeren oder inneren, ist einerlei), sei  $r$ ; der Abstand des angezogenen Punktes  $m$  vom Mittelpunkte  $C$  sei  $a$ . Man nehme  $C$  zum Anfange der Coordinaten, die Gerade  $a$  zur Axe der  $x$ , und setze  $x=r \cos \psi$ ,  $y=r \sin \psi \cos \varphi$ ,  $z=r \sin \psi \sin \varphi$ ; also  $x^2+y^2+z^2=r^2$ . Hiernach ist ein unendlich kleines Element der Kugeloberfläche  $\omega=r^2 \sin \psi d\varphi d\psi$ , das Volumen eines Elementes der Kugelschale  $s\omega$ , die Masse dieses Elementes, wegen der Gleichartigkeit der Schale diesem Volumen proportional, gleich  $\mu s\omega$ , und seine Anziehung auf die Masse  $m$  gleich  $\frac{cm\mu s \cdot \omega}{\varrho^2} = \frac{k\omega}{\varrho^2}$ , wo  $k$  eine Constante und  $\varrho = \sqrt{a^2+r^2-2ar \cos \psi}$  den Abstand zwischen  $\omega$  und  $m$  bedeutet. Die Richtung der Anziehung bildet mit den Axen  $x, y, z$  Winkel, deren Cosinus  $\frac{a-x}{\varrho}$ ,  $\frac{y}{\varrho}$ ,  $\frac{z}{\varrho}$  sind; ihre Componenten sind mithin  $\frac{k(a-x)\omega}{\varrho^3}$ ,  $\frac{ky\omega}{\varrho^3}$ ,  $\frac{kz\omega}{\varrho^3}$ . Man sieht jedoch, daß die Resultante aller Anziehungen in die Richtung der Axe  $x$  fallen muß; also müssen die mit  $y$  und  $z$  parallelen Componenten einander aufheben, was auch die Rechnung leicht ergiebt; die gesammte Anziehung ist demnach parallel mit  $x$  und ihre Intensität (sie heiße  $X$ ) ist, weil  $\omega=r^2 \sin \psi d\varphi d\psi$ ,

$$X=kr^2 \iint \frac{a-x}{\varrho^3} \sin \psi d\varphi d\psi,$$

das Integral zwischen den Grenzen  $\varphi=0$  und  $\varphi=2\pi$ ,  $\psi=0$  und  $\psi=\pi$  genommen. Die Integration nach  $\varphi$  kann sofort vollzogen werden; man erhält

$$X=2\pi kr^2 Q,$$

wo das Integral  $\int_0^\pi \frac{a-x}{\varrho^3} \sin \psi d\psi$  vorläufig mit  $Q$  bezeichnet ist. Um dieses leicht zu erhalten, bemerke man, daß  $\varrho^2=(a-x)^2+y^2+z^2$ , mithin, wenn man die Ableitung nach

nimmt,  $\frac{d\rho}{da} = \frac{a-x}{\rho}$  ist. Ferner ist  $\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{da} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{da} =$

$-\frac{a}{\rho^3}$ ; setzt man also das Integral  $\int_0^\pi \frac{\sin \psi d\psi}{\rho} = R$ , so ist

$Q = -\frac{dR}{da}$ . Nun findet man aber sogleich, mit Rücksicht auf

den Werth von  $\rho$ , nämlich  $\rho = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \psi}$ ,

$$\int \frac{\sin \psi d\psi}{\rho} = -\int \frac{d \cos \psi}{\rho} = \frac{\rho}{ar} + \text{Const.},$$

folglich wenn man die Werthe von  $\rho$  für  $\psi=0$  und  $\psi=\pi$

mit  $\rho_0$  und  $\rho_1$  bezeichnet,  $R = \frac{\rho_1 - \rho_0}{ar}$ . Man bemerke, daß

$\rho_1$  und  $\rho_0$  wesentlich positiv sind; und daß zugleich  $\rho_0^2 = (a-r)^2$

und  $\rho_1^2 = (a+r)^2$  ist. Liegt nun der angezogene Punkt in-

nerhalb der Kugelschaale, so ist  $r > a$  positiv, mithin  $\rho_0 = r-a$ ,

und zugleich  $\rho_1 = r+a$ ; also  $\rho_1 - \rho_0 = 2a$ . Hieraus folgt

$R = \frac{2}{r}$ , und  $Q = -\frac{dR}{da} = 0$ ; also  $X = 0$ , d. h. die Resultante

aller Anziehungen der Kugelschaale auf einen innerhalb derselben

liegenden Punkt ist Null. Liegt aber der Punkt außerhalb

der Kugelschaale, so ist  $a > r$ , und  $\rho_0 = a-r$ ,  $\rho_1 = a+r$ ,

mithin  $\rho_1 - \rho_0 = 2r$ , und  $R = \frac{2}{a}$ , folglich  $Q = -\frac{dR}{da} =$

$\frac{2}{a^2}$ , und die Anziehung

$$X = \frac{4\pi k r^2}{a^2}$$

genau so groß, als wenn die Masse der Kugelschaale im Mittelpunkte

vereinigt wäre. Man sieht aber, daß der Satz von einer

vollen, aus gleichartigen Schichten bestehenden Kugel gelten muß,

wenn er von jeder einzelnen Schicht gilt. Eine solche Kugel

zieht demnach einen außer ihr liegenden Punkt so an, als ob ihre

Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre; w. z. b. w.

Ist  $M$  die Masse der Kugel,  $m$  die des angezogenen Punktes in dem Abstände  $a$  vom Mittelpunkte, der aber nicht kleiner sein muß als der Halbmesser der Kugel, so ist demnach die Anziehung gleich  $\frac{cmM}{a^2}$ , wenn sie für die Einheiten der Entfernung und der Massen gleich  $c$  gesetzt wird, wie früher. Die Anziehung der Kugel auf einen an ihrer Oberfläche befindlichen Punkt von der Einheit der Masse ist mithin gleich  $\frac{cM}{r^2}$ , wenn  $r$  der Halbmesser der Kugel ist.

78. Wäre die Erde genau eine aus gleichartigen concentrischen Schichten bestehende Kugel, und hätte sie keine Umdrehung, so würde die Schwere lediglich aus ihrer Anziehung entstehen, und mithin an allen Orten der Oberfläche gleich und nach dem Mittelpunkte gerichtet sein. Aus der Drehung der Erde um ihre Ase entspringt aber noch eine Schwungkraft, die an verschiedenen Orten der Oberfläche verschieden ist. Es ist, unter Voraussetzung der Kugelgestalt der Erde,  $r$  ihr Halbmesser,  $\psi$  die geographische Breite eines Punktes der Oberfläche,  $\rho$  der Halbmesser des durch ihn gehenden Parallels,  $v$  die Geschwindigkeit des Punktes vermöge der Drehung der Erde,  $T$  die Dauer einer Umdrehung, so ist  $v = \frac{2\pi\rho}{T}$ ,  $\rho = r \cos \psi$ ;

und die Intensität der Schwungkraft, auf die Einheit der Masse zurückgeführt, ist  $\frac{v^2}{\rho} = \frac{4\pi^2\rho}{T^2} = \frac{4\pi^2r \cos \psi}{T^2}$ . Da diese den

Punkt in der Richtung des Halbmessers  $\rho$  von dem Mittelpunkte seines Parallels zu entfernen strebt, so bildet sie mit der nach dem Mittelpunkte gerichteten Anziehung (deren Intensität  $G$  sei) den stumpfen Winkel  $\pi - \psi$ . Bezeichnet man die Resultante beider Kräfte mit  $g$ , den Winkel, den sie mit der Richtung von  $G$  bildet, mit  $\lambda$ , und zerlegt die Kräfte nach der Richtung von  $G$  und nach einer darauf senkrechten, so kommt:

$$g \cos \lambda = G - \frac{4\pi^2 r \cos \psi^2}{T^2}, \quad g \sin \lambda = \frac{4\pi^2 r \cos \psi \sin \psi}{T^2}.$$

Diese Resultante  $g$  würde, unter der Voraussetzung der Kugelform, die Schwere an der Erdoberfläche sein. Setzt man  $\frac{4\pi^2 r}{T^2} = \mu G$ , so kommt:

$$g \cos \lambda = G(1 - \mu \cos \psi^2), \quad g \sin \lambda = \frac{1}{2} \mu G \sin 2\psi.$$

Um den Werth von  $\mu$  zu finden, kann man, da es sich hier nur um eine ungefähre Bestimmung handelt, in der Gleichung  $\mu = \frac{4\pi^2 r}{T^2 \cdot G}$  von der Veränderlichkeit der Schwere absehen, und ohne Weiteres für  $G$  den in §. 66. angegebenen Werth von  $g$  setzen, der von dem hier erforderlichen nur wenig abweichen kann; nimmt man noch den Umfang eines größten Kreises der Erdkugel  $2\pi r = 127,9$  Millionen pr. Fuß, und  $T = 86164''$  (Dauer eines Sterntages), so findet man

$$\mu = \frac{2\pi \cdot 127,9 \cdot 10^6}{31,265 \cdot (86164)^2}$$

und hieraus  $\mu = \frac{1}{289}$  beinahe. Da auch  $\lambda$ , in Theilen des Halbmessers ausgedrückt, nur ein sehr kleiner Bruch sein kann, so ergibt sich, mit Vernachlässigung der zweiten und höheren Potenzen von  $\lambda$ ,

$$g = G(1 - \mu \cos \psi^2), \quad g \lambda = \frac{1}{2} \mu G \sin 2\psi,$$

oder  $\lambda = \frac{\frac{1}{2} \mu \sin 2\psi}{1 - \mu \cos \psi^2}$ , also, mit Vernachlässigung von  $\mu^2$ ,

$$g = G(1 - \mu \cos \psi^2), \quad \lambda = \frac{1}{2} \mu \sin 2\psi.$$

Auf der Oberfläche der als Kugel gedachten Erde würde also die Schwere vom Pole nach dem Aequator hin um eine dem Quadrate des Cosinus der Breite proportionale Größe abnehmen; zugleich aber auch an allen Orten, mit Ausnahme der Pole und des Aequators, um einen kleinen Winkel  $\lambda$  von der Richtung nach dem Mittelpunkte abweichen, und zwar auf der nörd-



lichen Halbfugel nach Süden, auf der südlichen nach Norden. Der größte Werth dieser Ablenkung findet unter der Breite  $\approx 45^\circ$  statt, wo  $\lambda = \frac{1}{2}\mu = \frac{1}{578} = 0,0017$  ist, was einem Reibkoeffizienten von 6 Minuten gleichgilt.

Hieraus geht schon hervor, daß wenn die Erde einmal eine genaue Kugel von flüssiger Masse war, ihre Gestalt durch die Schwerkraft verändert werden mußte, von der sie bekanntlich auch in der That abweicht, indem sie sich mehr der eines elliptischen Sphäroids nähert. Bei dieser Gestalt ist die Intensität der Anziehung (G) an verschiedenen Punkten ungleich, und zur Bestimmung ihrer Richtung eine genauere Untersuchung nöthig, von der hier nicht gehandelt werden kann. Unter den Umständen aber ist die Schwere an jedem Orte der Erdoberfläche, nach Richtung und Größe, die Resultante der dort stattfindenden Anziehung des Erdkörpers und der Schwerkraft.

### Allgemeine Gleichungen für die Bewegung eines Systems von Punkten.

79. Bewegt sich ein System von Punkten unter beliebigen beschleunigenden Kräften, so wird die Geschwindigkeit jedes Punktes theils durch die auf ihn wirkende Kraft, theils durch die von seiner Verbindung mit den übrigen herrührenden Widerstände stetig geändert. Es sei  $m$  die Masse,  $v$  die Geschwindigkeit mithin  $mv$  das Bewegungsmoment eines Punktes zur Zeit  $t$ , so geht dieses, in dem folgenden unendlich kleinen Zeittheile  $dt$ , in ein anderes von dem vorigen nach Größe und Richtung unendlich wenig verschiedenes über; dasselbe sei, am Ende des Zeittheils  $dt$ ,  $m(v+dv)$ . Zerlegt man ferner das Bewegungsmoment  $m(v+dv)$  in eines, welches nach Richtung und Größe gleich  $mv$  ist, und in ein zweites  $mw$  (welches gegen  $mv$  unendlich klein sein wird), so muß  $mw$  die Resultante der beschleunigenden

genden Kraft und der Widerstände sein, welche in der Zeit  $dt$  auf  $m$  wirkten, und ohne die das Bewegungsmoment  $mv$  unverändert geblieben wäre. Wenn man daher die beschleunigende Kraft in zwei Componenten zerlegt, von denen die eine dem Bewegungsmomente  $mw$  nach Richtung und Größe gleichgilt, so muß die andere mit den Widerständen an  $m$  im Gleichgewichte sein. Die wirkliche Bewegung des Punctes erfolgt mithin gerade so, als ob derselbe frei wäre, und nur die erste, dem Bewegungsmomente  $mw$  gleichgeltende Componente der beschleunigenden Kraft auf ihn wirkte; die andere Componente aber wird durch die Widerstände aufgehoben, und heißt daher die verlorene Componente der beschleunigenden Kraft, oder schlechthin die verlorene Kraft.

Es seien  $X, Y, Z$  die Componenten der beschleunigenden Kraft, nach den Axen  $x, y, z$ , und  $U, V, W$  die der verlorenen Kraft, nach denselben Axen, so sind  $(X-U)dt, (Y-V)dt, (Z-W)dt$  die unendlich kleinen Zunahmen, welche das Bewegungsmoment des Punctes in der Zeit  $dt$  nach den Axen wirklich erhält, (also die Componenten von  $mw$ ), und da diese Zunahmen sich auch durch  $m \frac{d^2x}{dt^2}, \dots$  ausdrücken lassen, so erhält man  $m \frac{d^2x}{dt^2} = (X-U)dt$ , oder

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X - U, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y - V, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = Z - W.$$

Ferner aber besteht zwischen der verlorenen Kraft und den Widerständen an jedem Puncte Gleichgewicht, oder es besteht überhaupt zwischen allen verlorenen Kräften an dem Systeme Gleichgewicht, und folglich müssen diese Kräfte, wenn  $L=0, M=0, \dots$  die zwischen den Coordinaten der Puncte obwaltenden Gleichungen sind, sich, nach §. 58., ausdrücken lassen durch

$$U = \lambda \frac{dL}{dx} + \mu \frac{dM}{dx} + \dots$$

$$V = \lambda \frac{dL}{dy} + \mu \frac{dM}{dy} + \dots$$

$$W = \lambda \frac{dL}{dz} + \mu \frac{dM}{dz} + \dots$$

Setzt man diese Werthe von  $U, V, W$  in die vorhergehenden Gleichungen, und schreibt noch  $-\lambda, -\mu, \dots$  anstatt  $\lambda, \mu, \dots$ ; so erhält man für den Punkt  $(x, y, z)$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X + \lambda \frac{dL}{dx} + \mu \frac{dM}{dx} + \dots$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y + \lambda \frac{dL}{dy} + \mu \frac{dM}{dy} + \dots \quad A.$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z + \lambda \frac{dL}{dz} + \mu \frac{dM}{dz} + \dots$$

und ähnliche Gleichungen für alle übrigen Punkte des Systems; wodurch ausgedrückt wird, daß das Beschleunigungsmoment eines Punktes  $m$ , nach jeder Axe, gleich ist der Summe der Exponenten der beschleunigenden Kraft und der Widerstände, an dieser Axe. Ist  $n$  die Anzahl der Punkte,  $i$  die der Bedingungsgleichungen des Systemes, oder die der Coefficienten  $\lambda, \mu, \dots$ , so ergeben sich aus den vorstehenden, nach Elimination von  $\lambda, \mu, \dots$ , überhaupt  $3n - i$  Differentialgleichungen, welche in Verbindung mit den  $i$  Bedingungen  $L=0, M=0, \dots$  gerade erforderlich und hinreichend sind, um durch Integration die 3 Coordinaten der Punkte als Functionen von  $t$  zu bestimmen. Diese Integration führt  $6n - 2i$  Constanten herbei; so viele voneinander unabhängige Coordinaten und Componenten von Geschwindigkeiten müssen also noch für irgend einen Augenblick gegeben sein, wenn alle Constanten bestimmt werden sollen. Ist die Anzahl aller Coordinaten und Componenten der Geschwindigkeiten, nach den Axen, überhaupt  $6n$  ist, und zwischen ihnen  $2i$  Bedingungen  $L=0, M=0, \dots \frac{dL}{dt}=0, \frac{dM}{dt}=0, \dots$  zu walten, so können in der That gerade  $6n - 2i$  Coordinaten und Geschwindigkeiten beliebig gegeben sein.

80. Ist das System ganz frei, so sind die Widerstände an allen Punkten desselben einander zu zweien gleich und entgegengerichtet; ihre Mittelfraft und ihr zusammengesetztes Paar sind daher Null, und haben folglich keinen Einfluß auf das resultirende Bewegungsmoment der Punkte und das zusammengesetzte Paar der Bewegungsmomente, deren Aenderungen vielmehr nur noch durch die Mittelfraft und das zusammengesetzte Paar der beschleunigenden Kräfte bedingt sein können. Sind also z. B. auch die beschleunigenden Kräfte entweder Null oder in jedem Augenblick einander zu zweien gleich und entgegengerichtet, so bleibt das resultirende Bewegungsmoment und das zusammengesetzte Paar der Bewegungsmomente fortwährend unveränderlich wie in §. 73.

Um dieses auch aus den allgemeinen Gleichungen des vorigen §. herzuleiten, bemerke man, daß bei einem freien Systeme nur Gleichungen zwischen den gegenseitigen Entfernungen der Punkte Statt finden können. Werden diese, wie in §. 55., mit  $l, m, n, p, q, \dots$  bezeichnet, so ist  $L = f(l, m, n, p, q, \dots) = 0$  eine solche Gleichung. Nun sei  $l^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$ , so ist  $\frac{dl}{dx} + \frac{dl}{dx'} = 0$ , eben so sei  $m^2 = (x - x'')^2 + \dots$ , und mithin  $\frac{dm}{dx} + \frac{dm}{dx''} = 0$ ,  $n^2 = (x' - x'')^2 + \dots$ ,  $\frac{dn}{dx'} + \frac{dn}{dx''} = 0$ , u. f. f.; ferner hat man

$$\frac{dL}{dx} = \frac{df}{dl} \cdot \frac{dl}{dx} + \frac{df}{dm} \cdot \frac{dm}{dx} + \frac{df}{dn} \cdot \frac{dn}{dx} + \dots$$

$$\frac{dL}{dx'} = \frac{df}{dl} \cdot \frac{dl}{dx'} + \frac{df}{dm} \cdot \frac{dm}{dx'} + \frac{df}{dn} \cdot \frac{dn}{dx'} + \dots \quad a.$$

$$\frac{dL}{dx''} = \frac{df}{dl} \cdot \frac{dl}{dx''} + \frac{df}{dm} \cdot \frac{dm}{dx''} + \frac{df}{dn} \cdot \frac{dn}{dx''} + \dots$$

. . . .

Da nun  $\frac{dl}{dx} + \frac{dl}{dx'} = 0$ ; ferner  $\frac{dl}{dx''} = 0$ ,  $\frac{dl}{dx'''} = 0$ , u. f. f.;

eben so  $\frac{dm}{dx} + \frac{dm}{dx''} = 0$ ,  $\frac{dm}{dx'} = 0$ ,  $\frac{dm}{dx'''} = 0$ , u. f. f.; so kann durch Addition vorstehender Gleichungen

$$\frac{dL}{dx} + \frac{dL}{dx'} + \frac{dL}{dx''} + \dots = \Sigma \frac{dL}{dx} = 0.$$

Auf gleiche Weise ergeben sich  $\Sigma \frac{dL}{dy} = 0$ ,  $\Sigma \frac{dL}{dz} = 0$ ; folglich erhält man aus den Gleichungen A des vorhergehenden §., und den ähnlichen für die übrigen Punkte des Systemes:

$$\Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = \Sigma X, \quad \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} = \Sigma Y, \quad \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} = \Sigma Z.$$

Setzt man nun  $\Sigma mx = u \Sigma m$ ,  $\Sigma my = v \Sigma m$ ,  $\Sigma mz = w \Sigma m$ , so sind  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , die Coordinaten des Schwerpunktes des Systemes (§. 73.), und man hat  $\Sigma m d^2 x = d^2 u \Sigma m$ , u. f. w. folglich

$$\frac{d^2 u}{dt^2} \Sigma m = \Sigma X, \quad \frac{d^2 v}{dt^2} \Sigma m = \Sigma Y, \quad \frac{d^2 w}{dt^2} \Sigma m = \Sigma Z,$$

d. h. der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob alle Massen in ihm vereinigt und alle beschleunigenden Kräfte an ihm angewandt wären. Ferner hat man

$$\frac{dL}{dy} = \frac{df}{dl} \cdot \frac{dl}{dy} + \frac{df}{dm} \cdot \frac{dm}{dy} + \dots$$

$$\frac{dL}{dy'} = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dl}{dy'} + \frac{df}{dm} \cdot \frac{dm}{dy'} + \dots$$

b.

u. f. w.

folglich aus a. und b.

$$y \frac{dL}{dx} - x \frac{dL}{dy} = \frac{df}{dl} \left( y \frac{dl}{dx} - x \frac{dl}{dy} \right) + \frac{df}{dm} \left( y \frac{dm}{dx} - x \frac{dm}{dy} \right) + \dots$$

$$y' \frac{dL}{dx'} - x' \frac{dL}{dy'} = \frac{df}{dl} \left( y' \frac{dl}{dx'} - x' \frac{dl}{dy'} \right) + \frac{df}{dm} \left( y' \frac{dm}{dx'} - x' \frac{dm}{dy'} \right) + \dots$$

$$y'' \frac{dL}{dx''} - x'' \frac{dL}{dy''} = \frac{df}{dl} \left( y'' \frac{dl}{dx''} - x'' \frac{dl}{dy''} \right) + \frac{df}{dm} \left( y'' \frac{dm}{dx''} - x'' \frac{dm}{dy''} \right) + \dots$$

u. f. w.

Nun ist aber

$$y \frac{dl}{dx} - x \frac{dl}{dy} + y' \frac{dl}{dx'} - x' \frac{dl}{dy'} = (y - y') \frac{dl}{dx} - (x - x') \frac{dl}{dy} \\ = \frac{(y - y')(x - x') - (x - x')(y - y')}{1} = 0;$$

ferner  $y'' \frac{dl}{dx''} - x'' \frac{dl}{dy''} = 0$ , weil  $\frac{dl}{dx''} = 0$ ,  $\frac{dl}{dy''} = 0$ , u. f. f.;

eben so  $y' \frac{dm}{dx'} - x' \frac{dm}{dy'} = 0$ , und  $y \frac{dm}{dx} - x \frac{dm}{dy} + y'' \frac{dm}{dx''} - x'' \frac{dm}{dy''} = 0$ , u. f. f.; also erhält man überhaupt durch Addition der vorhergehenden Gleichungen:

$$\Sigma \left( y \frac{dL}{dx} - x \frac{dL}{dy} \right) = 0,$$

und eben so

$$\Sigma \left( z \frac{dL}{dy} - y \frac{dL}{dz} \right) = 0, \quad \Sigma \left( x \frac{dL}{dz} - z \frac{dL}{dx} \right) = 0.$$

Diese Gleichungen besagen nichts weiter, als daß das Paar, welches die von der Gleichung  $L=0$  herrührenden Widerstände bilden, beständig Null ist, wie oben schon bemerkt wurde. Demnach ergibt sich aus den Gleichungen A. des vorigen §., und den Ähnlichen für die übrigen Punkte des Systemes:

$$\Sigma_m \left( \frac{y d^2 x - x d^2 y}{dt^2} \right) = \Sigma (Xy - Yx)$$

$$\Sigma_m \left( \frac{z d^2 y - y d^2 z}{dt^2} \right) = \Sigma (Yz - Zy)$$

$$\Sigma_m \left( \frac{x d^2 z - z d^2 x}{dt^2} \right) = \Sigma (Zx - Xz).$$

Da  $\Sigma_m \left( \frac{y d^2 x - x d^2 y}{dt^2} \right) = \frac{d \left( \Sigma_m \frac{y dx - x dy}{dt} \right)}{dt}$  ist, so kann man die erste der obigen Gleichungen auch so schreiben:

$$d \left( \Sigma_m \frac{y dx - x dy}{dt} \right) = \Sigma (Xy - Yx) \cdot dt,$$

u. f. f. (s. §. 70.) gesetzt werden:

$$\sum m v dv = \sum P \cos \Theta ds, \text{ oder } \frac{1}{2} \sum m d(v^2) = \sum P \cos \Theta ds.$$

Der Ausdruck  $\frac{1}{2} \sum m v^2$  ist die Summe der lebendigen Kräfte (s. §. 70.) aller Punkte, oder die lebendige Kraft des Systemes. Die vorstehende Gleichung lehrt demnach, daß die Zunahme der lebendigen Kraft des Systemes in jedem Zeitelement  $dt$  gleich ist der Summe der Producte aus der Intensität jeder Kraft in die Fortrückung ihres Angriffspunctes nach der Richtung der Kraft, während der Zeit  $dt$ . Von den Zeichen dieser Producte gilt die in §. 70. aufgestellte Regel.

Wirken demnach auf das System keine beschleunigenden Kräfte, so ist  $\sum P \cos \Theta ds = 0$ , und mithin  $\frac{1}{2} \sum m v^2 = \text{Const.}$ , oder die lebendige Kraft des Systemes ist während der ganzen Dauer der Bewegung unveränderlich.

Ist der Ausdruck  $\sum P \cos \Theta ds = \sum (X dx + Y dy + Z dz)$  ein genaues Differential, oder giebt es eine Function  $\Pi$  der Coordinaten  $x, y, z, x', y', z', x'', \dots$ , so beschaffen, daß  $d\Pi = \sum (X dx + Y dy + Z dz)$ ; so erhält man

$$\frac{1}{2} \sum m d(v^2) = d\Pi,$$

mithin durch Integration  $\frac{1}{2} \sum m v^2 = \frac{1}{2} \sum m v_0^2 + \Pi - \Pi_0$ ; die lebendige Kraft wird dann immer wieder die nämliche, wenn der nämliche Werth von  $\Pi$  wiederkehrt. Man vergleiche hier §. 70. und 71., wo derselbe Satz in Bezug auf einen einzelnen Punkt entwickelt ist. Beispiele von Fällen, in welchen der Ausdruck  $\sum (X dx + \dots)$  ein vollständiges Differential ist, und Bemerkungen über die geometrische Bedeutung seines Integrales ( $\Pi$ ) findet man in §. 62. und 63. Um hier nur ein sehr einfaches Beispiel genauer anzuführen, seien die beschleunigenden Kräfte an den Punkten alle constant und parallel der Axe  $x$ , zugleich den Massen der Punkte proportional, so kann man setzen:  $X = gm, Y = 0, Z = 0, X' = gm', Y' = 0, Z' = 0$ , u. f. f.; folglich  $d\Pi = g(mx + m'dx' + \dots)$  und  $\Pi = g(mx + m'x' + \dots)$ . Es ist

man demnach  $u \Sigma m = \Sigma m x$ , so ist  $u$  die Abscisse des Schwerpunktes der parallelen Kräfte oder des Systemes (beide sind hier einerlei, weil die beschleunigenden parallelen Kräfte zugleich den Massen proportional angenommen sind); demnach ist

$$\frac{1}{2} \Sigma m v^2 - \frac{1}{2} \Sigma m v_0^2 = g(u - u_0) \Sigma m;$$

d. h. die Zunahme der lebendigen Kraft des Systemes, in der Zeit von  $t_0$  bis  $t$ , dividirt durch die (unveränderliche) Intensität der Resultante der beschleunigenden Kräfte, also der Quotient  $\frac{\Sigma m v^2 - \Sigma m v_0^2}{2g \Sigma m}$ , ist gleich der inzwischen erfolgten Verrückung

des Schwerpunktes nach der (gleichfalls unveränderlichen) Richtung jener Resultante. Dieses läßt sich z. B. auf ein System von schweren Punkten anwenden, in so fern die Schwere als unveränderlich betrachtet wird. Die Zunahme an lebendiger Kraft bei einem solchen, während einer gewissen Zeit, hängt allemal bloß von der verticalen Tiefe ab, um welche der Schwerpunkt in dieser Zeit gefallen ist; sie wird Abnahme, wenn der Schwerpunkt steigt. Dabei ist es ganz einerlei, wie die Punkte mit einander verbunden sind, und ob sie sich frei oder auf vorgeschriebenen Bahnen bewegen. (Es versteht sich von selbst, daß hier die Einwirkung anderer Kräfte, wie Reibung, Widerstand der Luft, u. dgl., welche sich in der Natur nie ganz beseitigen läßt, nicht in Betracht kommt.)

82. Es giebt Fälle, in welchen der im vorigen §. entwickelte Satz der lebendigen Kräfte allein schon zur Bestimmung der Bewegung des Systemes hinreicht; nämlich wenn bei einem Systeme von  $n$  Punkten zwischen den  $3n$  Coordinaten  $3n-1$  Bedingungen gegeben sind oder überhaupt sich annehmen lassen. Ist z. B. ein festes System von  $n$  Punkten gegeben, so finden zwischen den Coordinaten derselben  $3n-6$  Bedingungen Statt, welche die Unveränderlichkeit der gegenseitigen Entfernungen ausdrücken. Sind nun noch zwei der  $n$  Punkte unbeweglich, so sind ihre sechs Coordinaten unveränderlich; da aber die Entfer-



Es sei, für  $t=0$ ,  $\frac{d\varphi}{dt}=v_0$ ,  $\varphi=\alpha$ , so erhält man

$$k^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = k^2 v_0^2 + 2ag(\cos \varphi - \cos \alpha).$$

Für einen schweren Punkt, der sich in einem verticalen Kreis vom Halbmesser  $r$  bewegt, d. h. für das in einer Ebene schwingende mathematische oder einfache Pendel hat man nach §. 72 B., wenn das dortige  $c$  und mit ihm  $d\varphi$  gleich Null gesetzt,  $\varphi$  für das dortige  $\psi$ , so wie  $rv_0$  für  $v_0$  geschrieben wird, und hier  $v_0$  die anfängliche Winkelgeschwindigkeit, mithin  $rv_0$  die Anfangsgeschwindigkeit ist:

$$r^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = r^2 v_0^2 + 2gr(\cos \varphi - \cos \alpha).$$

Diese Gleichung wird mit der vorigen einerlei, wenn  $ar=k^2$ . Der Körper (das physische Pendel) schwingt also um seine bewegliche Axe gleichzeitig mit einem einfachen Pendel von der Länge  $r=\frac{k^2}{a}$ . Legt man durch die Axe  $x$  und den Schwerpunkt eine Ebene, und zieht in ihr eine der  $x$  parallele Gerade in dem Abstände  $r=\frac{k^2}{a}$  von  $x$ , auf der Seite des Schwerpunktes, so schwingen die Punkte dieser Geraden eben so als ob die übrige Masse des Körpers nicht vorhanden wäre. Diese wird Schwingungsaxe genannt.

Die Dauer einer sehr kleinen Schwingung beträgt, nach §. 72., bei dem einfachen Pendel von der Länge  $r$ ,  $t=\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$ , mithin bei dem physischen, welches mit dem einfachen von der Länge  $\frac{k^2}{a}$  gleichzeitig schwingt,  $t=\pi\sqrt{\frac{k^2}{ag}}$ . Zählt man die Anzahl ( $n$ ) der Schwingungen, welche dieses Pendel während einer bekannten und hinreichend langen Zeit  $T$  macht, so erhält man mit großer Genauigkeit die Dauer einer Schwingung gleich

man demnach  $u \Sigma m = \Sigma mx$ , so ist  $u$  die Abscisse des Schwerpunktes der parallelen Kräfte oder des Systemes (beide sind hier einerlei, weil die beschleunigenden parallelen Kräfte zugleich den Massen proportional angenommen sind); demnach ist

$$\frac{1}{2} \Sigma mv^2 - \frac{1}{2} \Sigma mv_0^2 = g(u - u_0) \Sigma m;$$

d. h. die Zunahme der lebendigen Kraft des Systemes, in der Zeit von  $t_0$  bis  $t$ , dividirt durch die (unveränderliche) Intensität der Resultante der beschleunigenden Kräfte, also der Quotient  $\frac{\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2}{2g \Sigma m}$ , ist gleich der inzwischen erfolgten Verrückung

des Schwerpunktes nach der (gleichfalls unveränderlichen) Richtung jener Resultante. Dieses läßt sich z. B. auf ein System von schweren Punkten anwenden, in so fern die Schwere als unveränderlich betrachtet wird. Die Zunahme an lebendiger Kraft bei einem solchen, während einer gewissen Zeit, hängt allemal bloß von der verticalen Tiefe ab, um welche der Schwerpunkt in dieser Zeit gefallen ist; sie wird Abnahme, wenn der Schwerpunkt steigt. Dabei ist es ganz einerlei, wie die Punkte mit einander verbunden sind, und ob sie sich frei oder auf vorgeschriebenen Bahnen bewegen. (Es versteht sich von selbst, daß hier die Einwirkung anderer Kräfte, wie Reibung, Widerstand der Luft, u. dgl., welche sich in der Natur nie ganz beseitigen läßt, nicht in Betracht kommt.)

82. Es giebt Fälle, in welchen der im vorigen §. entwickelte Satz der lebendigen Kräfte allein schon zur Bestimmung der Bewegung des Systemes hinreicht; nämlich wenn bei einem Systeme von  $n$  Punkten zwischen den  $3n$  Coordinaten  $3n-1$  Bedingungen gegeben sind oder überhaupt sich annehmen lassen. Ist z. B. ein festes System von  $n$  Punkten gegeben, so finden zwischen den Coordinaten derselben  $3n-6$  Bedingungen Statt, welche die Unveränderlichkeit der gegenseitigen Entfernungen ausdrücken. Sind nun noch zwei der  $n$  Punkte unbeweglich, so sind ihre sechs Coordinaten unveränderlich; da aber die Entfer-

Die lebendige Kraft eines Systemes läßt sich immer in zwei Theile zerlegen, deren Summe sie gleich ist. Der eine Theil ist die lebendige Kraft, welche der Bewegung des Schwerpunktes entspricht, d. h. er ist gleich dem halben Producte aus der Summe aller Massen des Systemes, multiplicirt in das Quadrat der Geschwindigkeit des Schwerpunktes; der andere Theil entspricht den relativen Bewegungen der Punkte gegen den Schwerpunkt, d. h. er ist gleich der halben Summe der Producte aus der Masse jedes Punktes in das Quadrat seiner relativen Geschwindigkeit, in Beziehung auf den Schwerpunkt.

Denn es seien  $\xi, \eta, \zeta$  die Coordinaten des Schwerpunktes S;  $x, y, z$  die eines Punktes  $m$  des Systemes, also  $u = x - \xi, v = y - \eta, w = z - \zeta$  die relativen Coordinaten von  $m$  gegen S; so ist  $\xi \Sigma m = \Sigma m x$ , oder  $\Sigma m u = 0$ , und eben so  $\Sigma m v = \Sigma m w = 0$ . Die lebendige Kraft des Systemes sei  $U$ ; man

$$U = \frac{1}{2} \Sigma m \left( \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \right). \quad \text{Setzt man } dx = d\xi + du,$$

$$dy = d\eta + dv, \quad dz = d\zeta + dw, \quad \text{so kommt}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{dt^2} \Sigma m + \frac{d\xi}{dt} \Sigma m \frac{du}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \Sigma m \frac{dv}{dt} + \frac{d\zeta}{dt} \Sigma m \frac{dw}{dt} + \frac{1}{2} \Sigma m \left( \frac{du^2 + dv^2 + dw^2}{dt^2} \right)$$

$$\text{oder, weil } \Sigma m \frac{du}{dt} = 0, \quad \Sigma m \frac{dv}{dt} = 0, \quad \Sigma m \frac{dw}{dt} = 0,$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{dt^2} \Sigma m + \frac{1}{2} \Sigma m \left( \frac{du^2 + dv^2 + dw^2}{dt^2} \right),$$

w. z. b. w. Wendet man diesen Satz auf einen festen Körper an, der sich um eine unbewegliche Axe (sie sei die der  $x$ ) dreht, so bleiben bei der Drehung  $x$  und  $\xi$ , also  $u$ , constant. Ferner sei, für den Schwerpunkt  $\eta = a \sin \varphi, \zeta = a \cos \varphi$ , für einen andern Punkt  $m$  sei  $y = r \sin(\varphi + \varepsilon), z = r \cos(\varphi + \varepsilon)$ ;  $\varepsilon$  ist die Neigung von  $r$  gegen  $a$ , welche eben so wie die Abstände  $r$  und  $a$  während der Bewegung unveränderlich bleibt. Man

hält

$$d\eta^2 + d\zeta^2 = a^2 d\varphi^2,$$

$$dv = dy - d\eta = (r \cos(\varphi + \varepsilon) - a \cos \varphi) d\varphi,$$

$$dw = dz - d\zeta = -(r \sin(\varphi + \varepsilon) - a \sin \varphi) d\varphi;$$

hieraus folgt  $dv^2 + dw^2 = (r^2 + a^2 - 2ar \cos \varepsilon) d\varphi^2$ . Bezeichnet man mit  $\varrho$  den senkrechten Abstand des Punctes  $m$  von der durch den Schwerpunct gehenden, mit  $x$  parallelen Geraden (sie heiße  $q$ ), so ist  $\varrho^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \varepsilon$ , und wird noch die Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$  eingeführt, so hat man  $\frac{d\eta^2 + d\zeta^2}{dt^2}$

$$= a^2 \omega^2, \quad \frac{dv^2 + dw^2}{dt^2} = \varrho^2 \omega^2; \quad \text{folglich nach a. die lebendige}$$

Kraft des Körpers:

$$U = \frac{1}{2} a^2 \omega^2 \Sigma m + \frac{1}{2} \omega^2 \Sigma \varrho^2 m,$$

wobei zu bemerken, daß  $\Sigma \varrho^2 m$  das Trägheitsmoment des Körpers für die Axe  $q$  ist.

Von der anderen Seite aber ist die lebendige Kraft des Körpers  $U = \frac{1}{2} \omega^2 \Sigma r^2 m$ , mithin, nach Aufhebung des gemeinsamen Factors  $\frac{1}{2} \omega^2$ :

$$\Sigma r^2 m = \Sigma \varrho^2 m + a^2 \Sigma m, \quad \text{b.}$$

d. h. das Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine beliebige Axe ist gleich demjenigen in Bezug auf die mit jener parallel durch den Schwerpunct gelegte Axe, vermehrt um das Product aus der Masse des Körpers in das Quadrat des Abstandes ( $a$ ) beider Axen von einander.

Man setze  $\Sigma r^2 m = k^2 \Sigma m$ ,  $\Sigma \varrho^2 m = \lambda^2 \Sigma m$ , so kommt  $k^2 = a^2 + \lambda^2$ . Diese Gleichung lehrt, daß der Schwerpunct immer zwischen der Drehungsaxe ( $x$ ) und der Schwingungsaxe ( $x'$ ) liegt. Denn sein Abstand von  $x$  ist  $a$ , dagegen ist  $\frac{k^2}{a}$  nach

dem vorigen §. der Abstand zwischen  $x$  und  $x'$ , und nach vorstehender Gleichung  $\frac{k^2}{a} > a$ . Nimmt man  $x'$  zur Drehungsaxe, und bezeichnet ihren Abstand vom Schwerpuncte mit  $a'$ , so ist

$a' = \frac{k^2}{a} - a$ . Bezeichnet man ferner mit  $mk'^2$  das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Axe  $x'$ , so wird man, indem man in der Formel  $k^2 = \lambda^2 + a^2$  die Buchstaben  $k$  und beziehungsweise mit  $k'$  und  $a'$  vertauscht, und  $\lambda$ , wie ertheilt, ungeändert läßt,  $k'^2 = \lambda^2 + a'^2$ . Nun ist  $\frac{k^2}{a} = \frac{\lambda^2}{a} + a$ , und  $\frac{k'^2}{a'} = \frac{\lambda^2}{a'} + a'$ , zugleich  $a' = \frac{k^2}{a} - a$ , folglich  $\frac{k'^2}{a'} = a + \frac{\lambda^2}{a}$ , also  $\frac{k'^2}{a'} = \frac{k^2}{a}$ , d. h. die neue Drehungsaxe fällt in die vorige Drehungsaxe, w. z. b. w.

84. Zu genauerem Verständniß der Aufgabe des §. 82 gehört, daß auch der Druck bestimmt werde, den die Drehungsaxe in jedem Augenblicke erleidet. In der Natur wird auf jeden Punct derselben ein bestimmter Druck ausgeübt werden: man kann aber, so lange die Axe als unbedingt unbiegsam betrachtet wird, wie hier geschehen soll, nicht die Intensität des Druckes auf jeden Punct, sondern nur die Resultante und das zugehörige Paar aus allen diesen Kräften bestimmen. Zu dem Ende nehme man in der Axe  $x$  einen beliebigen Punct  $O$  zum Anfang der Coordinaten, und denke sich an demselben den in jedem Puncte der Axe Statt findenden Druck in seiner Richtung  $z$  in entgegengesetzter angebracht; so erhält man durch Zusammensetzung einen resultirenden Druck  $R$  in  $O$ , und ein gewisses zugehöriges Paar  $Q$ , dessen Ebene offenbar durch die Axe  $x$  geht. mithin stellen  $R$  und  $Q$ , in gerade umgekehrtem Sinne nicht gedacht, den Widerstand der unbeweglichen Axe dar. Da in jedem Augenblicke der Bewegung zwischen den verlorenen Kräften Gleichgewicht besteht (§. 79.); so muß dieser Widerstand mit den Kräften Gleichgewicht halten. Die verlorenen Kräfte sind, nach den Axen  $x, y, z$  zerlegt, allgemein  $U = X - m \frac{d^2 x}{dt^2}$

$V = Y - m \frac{d^2 y}{dt^2}$ ,  $W = Z - m \frac{d^2 z}{dt^2}$  (§. 79.); zerlegt man nach

$\frac{T}{n}$ , und mithin  $\frac{T}{n} = \pi \sqrt{\frac{k^2}{ag}}$ ; folglich  $g = \frac{k^2 \pi^2 n^2}{T^2 a}$ . Es läßt sich aber, wenn die Masse in dem Pendel gleichmäßig oder überhaupt nach einem bekannten Gesetze vertheilt ist, aus der Gestalt desselben der Quotient  $\frac{k^2}{a}$  berechnen. Denn es sei  $dm$  die Masse,  $dV = dx dy dz$  das Volumen eines Elementes, so ist unter Annahme gleichmäßiger Vertheilung, jene diesem proportional, also  $dm = \mu dV$ , wo  $\mu$  ein constanter Coefficient, und mithin ist das Trägheitsmoment  $\int r^2 dm = k^2 m = \mu \int (y^2 + z^2) dV$ . (Das Zeichen  $\int$  bedeutet hier eine dreifache Integration.) Ferner hat man zur Bestimmung von  $a$ ,  $my' = \int y dm = \mu \int y dV$ ,  $mz' = \int z dm = \mu \int z dV$ , und  $a = \sqrt{y'^2 + z'^2}$ ; und da sich die dreifachen Integrale  $\int y dV$ ,  $\int z dV$ ,  $\int (y^2 + z^2) dV$  sämmtlich finden lassen, so folgt, wenn man ihre Werthe der Reihe nach mit  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  bezeichnet,  $\frac{k^2}{a} = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ . Demnach kommen

in obigem Werthe von  $g$  nur bekannte Zahlen vor, aus denen sich ein bestimmter Zahlenwerth für  $g$ , d. i. für die Intensität der Schwere an dem Orte der Beobachtung, ergibt.

Die Pendelschwingungen liefern daher ein Mittel zur Bestimmung dieser Intensität, welches sehr großer Genauigkeit fähig ist; es versteht sich jedoch von selbst, daß solche nur durch weitere Correctionen und überhaupt durch Berücksichtigung vieler Umstände erreicht wird, von denen hier nicht die Rede sein kann.

83. Denkt man sich die bisherige Drehungsaxe ( $x$ ) wieder beweglich, dagegen die Schwingungsaxe ( $x'$ ) unbeweglich, so fällt die neue Schwingungsaxe in jene Drehungsaxe, oder mit andern Worten: Drehungs- und Schwingungs-Axe lassen sich mit einander vertauschen.

Diese Eigenschaft folgt aus einem allgemeinen Satze über die lebendige Kraft eines Systemes, der hier zugleich seine Stelle findet; nämlich:

gesetzt wird:

$$k^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + ag \sin \varphi = 0.$$

Multipliziert man diese Gleichung auf beiden Seiten mit  $dt^2$  und integriert, so kommt

$$\frac{1}{2} k^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - ag \cos \varphi = \text{Const.},$$

welche Gleichung mit der in §. 82. aus dem Satze der lebenden Kräfte entwickelten, wie gehörig übereinstimmt. Die wiederholte Herleitung kann jedoch zur Uebersicht der verschiedenen Methoden nützlich sein.

Um zur Bestimmung der Widerstände zurückzukehren, setze man in den Gleichungen a.:  $X=0$ ,  $Y=0$ ,  $Z=gdm$ ,  $dx=0$ ,  $dy=r \cos \varphi d\varphi$ ,  $dz=-r \sin \varphi d\varphi$ , mithin  $d^2y=-y d\varphi^2 + z d^2\varphi$ ,  $d^2z=-z d\varphi^2 - y d^2\varphi$ ; und schreibe  $\int$  statt  $\Sigma$ , so kommt:

$$\left. \begin{aligned} \pi &= 0, & \rho &= \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \int z dm - \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \int y dm, \\ \sigma &= -g \int dm - \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \int y dm - \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \int z dm, \\ M &= -g \int x dm - \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \int xy dm - \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \int xz dm, \\ N &= -\frac{d^2 \varphi}{dt^2} \int xz dm + \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \int xy dm. \end{aligned} \right\} c.$$

Diese Ausdrücke lassen sich noch etwas vereinfachen, wenn man zum Anfange der Coordinaten denjenigen Punkt (er heiße 0) wählt, in welchem das vom Schwerpunkte auf die Drehungsaxe gefällte Loth (a) diese Axe trifft; denn alsdann ist die Abscisse des Schwerpunktes Null, mithin  $\int x dm = 0$ . Ferner ist  $\int y dm = am \sin \varphi$ ,  $\int z dm = am \cos \varphi$ ; es bleiben also nur noch die Integrale  $\int xy dm$  und  $\int xz dm$  als Functionen von  $\varphi$  zu bestimmen. Zu dem Ende denke man sich drei in dem Körper sich

hält 
$$d\eta^2 + d\zeta^2 = a^2 d\varphi^2,$$

$$dv = dy - d\eta = (r \cos(\varphi + \varepsilon) - a \cos \varphi) d\varphi,$$

$$dw = dz - d\zeta = -(r \sin(\varphi + \varepsilon) - a \sin \varphi) d\varphi;$$

hieraus folgt  $dv^2 + dw^2 = (r^2 + a^2 - 2ar \cos \varepsilon) d\varphi^2$ . Bezeich-

net man mit  $\rho$  den senkrechten Abstand des Punctes  $m$  von der durch den Schwerpunkt gehenden, mit  $x$  parallelen Geraden (sie heiße  $q$ ), so ist  $\rho^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \varepsilon$ , und wird noch die

Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$  eingeführt, so hat man  $\frac{d\eta^2 + d\zeta^2}{dt^2}$

$$= a^2 \omega^2, \quad \frac{dv^2 + dw^2}{dt^2} = \rho^2 \omega^2; \quad \text{folglich nach a. die lebendige}$$

Kraft des Körpers:

$$U = \frac{1}{2} a^2 \omega^2 \Sigma m + \frac{1}{2} \omega^2 \Sigma \rho^2 m,$$

wobei zu bemerken, daß  $\Sigma \rho^2 m$  das Trägheitsmoment des Körpers für die Axe  $q$  ist.

Von der anderen Seite aber ist die lebendige Kraft des Körpers  $U = \frac{1}{2} \omega^2 \Sigma r^2 m$ , mithin, nach Aufhebung des gemeinsamen Factors  $\frac{1}{2} \omega^2$ :

$$\Sigma r^2 m = \Sigma \rho^2 m + a^2 \Sigma m, \quad \text{b.}$$

d. h. das Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine beliebige Axe ist gleich demjenigen in Bezug auf die mit jener parallel durch den Schwerpunkt gelegte Axe, vermehrt um das Product aus der Masse des Körpers in das Quadrat des Abstandes ( $a$ ) beider Axen von einander.

Man setze  $\Sigma r^2 m = k^2 \Sigma m$ ,  $\Sigma \rho^2 m = \lambda^2 \Sigma m$ , so kommt  $k^2 = a^2 + \lambda^2$ . Diese Gleichung lehrt, daß der Schwerpunkt immer zwischen der Drehungsaxe ( $x$ ) und der Schwingungsaxe ( $x'$ ) liegt. Denn sein Abstand von  $x$  ist  $a$ , dagegen ist  $\frac{k^2}{a}$  nach

dem vorigen §. der Abstand zwischen  $x$  und  $x'$ , und nach vorstehender

Gleichung  $\frac{k^2}{a} > a$ . Nimmt man  $x'$  zur Drehungsaxe,

und bezeichnet ihren Abstand vom Schwerpunkte mit  $a'$ , so ist



sehr kleine Schwingungen sind  $\alpha$  und  $\varphi$  sehr klein; alsdann giebt sich der verticale Druck ( $-\sigma$ ) bis auf die zweiten Potenzen von  $\alpha$  und  $\varphi$  gleich dem Gewichte  $p$  des Körpers; der horizontale Druck ( $-\rho$ ) und die Momente der Paare  $M$  und  $N$  aber sind beständig sehr klein.

85. Es sei ein Rad an der Welle vorgelegt;  $CA=r$  der Halbmesser der Welle,  $CB=R$  der des Rades (Fig. 41.); an denselben wirken die Gewichte  $P$  und  $Q$ , an umgeschlagenen Enden hängend, einander in Hinsicht auf Drehung entgegen. Ist das Moment von  $P$  in Bezug auf  $C$  größer als das von  $Q$ , d. h.  $PR > QR$ , so muß, abgesehen von Reibung, eine Drehung eintreten, durch welche  $P$  sinkt und  $Q$  steigt. Um diese Bewegung aus dem Satze der lebendigen Kräfte herzuleiten, sei  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit,  $M$  die Masse,  $Mk^2$  das Trägheitsmoment des Rades und der Welle in Bezug auf die Drehungsaxe, so ist  $\frac{1}{2}Mk^2\omega^2$  ihre lebendige Kraft. Die Geschwindigkeit, mit welcher alle Punkte von  $P$  sinken, ist offenbar  $R\omega$ , und die, mit welcher die von  $Q$  steigen, ist  $r\omega$ , folglich ist, wenn man die Massen von  $P$  und  $Q$  mit  $m$  und  $m'$  bezeichnet,  $\frac{1}{2}mR^2\omega^2$  die lebendige Kraft von  $P$  und  $\frac{1}{2}m'r^2\omega^2$  die von  $Q$ ; demnach beträgt die gesamte lebendige Kraft (wenn der Einfachheit wegen von der Masse der Seile abgesehen wird)  $\frac{1}{2}\mu\omega^2$ , wo zur Abkürzung  $\mu = Mk^2 + mR^2 + m'r^2$  gesetzt ist, und ihre Zunahme in jedem Augenblicke  $\mu\omega d\omega$ .

Ferner wird der Ausdruck  $\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$ , wenn man die Axen  $x$  und  $y$  horizontal,  $z$  vertical und positiv nach unten nimmt, hier gleich  $g\Sigma mdz$ , weil  $X=0$ ,  $Y=0$ ,  $Z=g$ . Nennt man  $\zeta$ ,  $\zeta'$ ,  $\zeta''$  die verticalen Ordinaten der Schwerpunkte der Gewichte  $P$ ,  $Q$ , und der Welle mit dem Rade, so ist  $\Sigma mdz$  die Summe der Glieder  $m d\zeta$  und  $m' d\zeta'$ ; das dritte Glied  $M d\zeta''$ , welches von der Wirkung der Schwere auf die Welle und das Rad herrührt, ist Null, wenn der Schwerpunkt genau in die Drehungsaxe fällt, indem alsdann  $\zeta''$  constan-

R nach  $x, y, z$  in die Componenten  $\pi, \varrho, \sigma$  und das Paar Q nach den Ebenen  $xy$  und  $xz$  in die Componenten N und M, so erhält man, da zwischen allen diesen Kräften an dem festen Körper, der nunmehr als gänzlich frei zu betrachten ist, Gleichgewicht besteht, denn in §. 17. oder auch 59. angegebenen Bedingungen zufolge:

$$\Sigma U + \pi = 0, \quad \Sigma V + \varrho = 0, \quad \Sigma W + \sigma = 0.$$

$$\Sigma(Vz - Wy) = 0, \quad \Sigma(Wx - Uz) + M = 0,$$

$$\Sigma(Uy - Vx) + N = 0,$$

oder, wenn man für U, V, W ihre Werthe einsetzt:

$$\pi + \Sigma X - \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad \varrho + \Sigma Y - \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0,$$

$$\sigma + \Sigma Z - \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} = 0.$$

$$M + \Sigma(Zx - Xz) - \Sigma m \frac{(x d^2 z - z d^2 x)}{dt^2} = 0$$

$$N + \Sigma(Xy - Yx) - \Sigma m \frac{(y d^2 x - x d^2 y)}{dt^2} = 0$$

$$\Sigma(Yz - Zy) - \Sigma m \frac{(z d^2 y - y d^2 z)}{dt^2} = 0. \quad \text{b.}$$

Von diesen Gleichungen dienet die letzte zur Bestimmung der Bewegung; denn wird in derselben  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \varphi$  gesetzt, so geht sie in eine Differentialgleichung zwischen  $\varphi$  und  $t$  über, durch deren Integration  $\varphi$  als Function von  $t$  sich ergibt.

In dem gegenwärtigen Falle ist (§. 82.),  $X = 0$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = gm$ , und zugleich  $z dy - y dz = r^2 d\varphi$ , folglich giebt die Gleichung b.

$$\Sigma m r^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \Sigma g m y = 0,$$

oder, wenn für den Schwerpunkt  $y = y' = a \sin \varphi$ , mithin  $\Sigma m y = a \sin \varphi \cdot \Sigma m$ , und das Trägheitsmoment  $\Sigma m r^2 = k^2 \Sigma m$

$$\text{d. i.} \quad \Pi = W + P + Q - \frac{(PR - Qr)^2}{Wk^2 + PR^2 + Qr^2};$$

also ist der Druck  $\Pi$  während der Bewegung unveränderlich und kleiner als während der Ruhe, wo er gleich  $W + P + Q$  wäre.

Anmerkung. Soll bei dieser Aufgabe noch die Reibung der Axe der Welle gegen die Zapfenlager in Rechnung gebracht werden, so sei  $\rho$  der Halbmesser dieser Axe, mithin  $\rho\omega$  die Geschwindigkeit, mit welcher jeder Berührungspunct der Axe an dem Lager gleitet. Ferner sei  $\pi$  der unendlich kleine Druck an einem dieser Berührungspuncte; die daselbst Statt findende Reibung werde ihm proportional, und gleich  $f\pi$  gesetzt ( $f$  ist ein von der Beschaffenheit der Berührungsflächen abhängiger Coefficient); durch sie wird, weil die Reibung in der Richtung der Bewegung des Berührungspunctes und dieser gerade entgegen wirkt, und weil die augenblickliche Fortgleitung dieses Punctes der Axe durch  $\rho\omega$  ausgedrückt werden muß, die Zunahme der lebendigen Kraft um ein Glied gleich  $-f\pi\rho\omega$  vermindert und die Summe aller ähnlichen Glieder für sämtliche Berührungspuncte beträgt, wenn  $\Sigma\pi = \Pi$  der gesammte Druck ist, indem der Werth von  $f\rho\omega$  für alle diese Puncte der nämliche bleibt:  $-f\Pi\rho\omega$ . Folglich giebt die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$\mu\omega d\omega = g(Rm - rm')\omega dt - f\Pi\rho\omega, \quad 1.$$

wo  $\mu = Mk^2 + mR^2 + m'r'^2$ , wie oben, und zugleich hat man zur Bestimmung von  $\Pi$ , wie vorhin:  $\Pi = W + T + T'$  oder

$$\Pi = g(M + m + m') - (Rm - rm')\frac{d\omega}{dt}. \quad 2.$$

Zur Abkürzung setze man  $Rm - rm' = k$ ,  $M + m + m' = q$ , und schreibe  $f$  statt  $f\rho$ , so werden vorstehende Gleichungen:

$$\mu\omega d\omega = gk\omega dt - f\Pi d\omega, \quad \Pi = gq - k\frac{d\omega}{dt}.$$

Die Elimination von  $\Pi$  giebt:

$$\left(\mu \frac{d\omega}{dt} - gk\right)\omega + f\left(gq - k \frac{d\omega}{dt}\right)\frac{d\omega}{dt} = 0,$$

oder

$$fk \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 - (\mu\omega + fgq)\frac{d\omega}{dt} + gk\omega = 0,$$

$$\left[fk \cdot \frac{d\omega}{dt} - \frac{1}{2}(\mu\omega + fgq)\right]^2 = \frac{1}{4}(\mu\omega + fgq)^2 - fgk^2\omega;$$

und endlich

$$fk \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}(\mu\omega + fgq) - \sqrt{\frac{1}{4}(\mu\omega + fgq)^2 - fgk^2\omega}.$$

Hier muß das negative Zeichen gewählt werden, welches für  $f=0$ , zunächst  $\frac{d\omega}{dt} = \frac{0}{0}$  und nachher  $\frac{d\omega}{dt} = \frac{gk}{\mu}$  giebt, wie gehörig. Wählte man dagegen das positive Zeichen, so würde für ein sehr kleines  $f$ ,  $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\mu\omega}{fk}$  werden, also entweder  $\omega=0$  oder  $\frac{d\omega}{dt}$  unendlich groß; von welchen Fällen bei gegenwärtiger Anwendung keiner Statt finden kann. Die Integration der vorstehenden Gleichung hat keine Schwierigkeit; daher kann sie hier übergangen werden.

86. Die in §. 82. und 85. gegebenen Beispiele reichen schon hin, um im Allgemeinen die Anwendung des Satzes der lebendigen Kräfte zu zeigen, welcher jederzeit, wie auch das vorgelegte System beschaffen sei, eine der zur Lösung der Aufgabe nöthigen Gleichungen, ohne weitläufige statische Betrachtungen, liefert, und mithin namentlich in solchen Fällen, wo überhaupt nur eine Gleichung erfordert wird, mit Vortheil angewendet werden kann.

Man kann sich ferner des Satzes der lebendigen Kräfte in vielen Fällen zur Unterscheidung des sicheren und unsicheren Gleichgewichtes bedienen. Besteht zwischen mehreren Kräften, die man sich als Functionen der Coordinaten ihrer Angriffspunkte gegeben denke, an einem Systeme Gleichgewicht, und

stellt man sich zugleich das System als ruhend vor; so ist das Gleichgewicht sicher oder unsicher, je nachdem die Punkte, wenn ihnen irgend eine kleine Bewegung ertheilt wird, durch fortdauernde Wirkung der Kräfte wieder in die anfängliche Lage zurückgeführt oder von denselben weiter entfernt werden. Es sieht schon aus dieser Erklärung, daß das Gleichgewicht bei denselben Systeme in Hinsicht auf einige Verrückungen sicher, andere aber unsicher sein kann. Auch kann dasselbe nach einer Verrückung noch fortbestehen; alsdann ist es weder sicher noch unsicher, und mag hier ein stehendes genannt werden. Ein solches findet z. B. bei einem schweren Körper Statt, der frei um seinen unbeweglichen Schwerpunkt drehen kann; das Gleichgewicht dauert während dieser Drehung beständig fort. Ist aber ein schwerer Körper nicht im Schwerpunkte, sondern in einem anderen Punkte befestigt, um welchen er sich ohne Hinderniß drehen kann, und befindet sich der Schwerpunkt unter dem Befestigungspunkte, so ist das Gleichgewicht in Hinsicht auf die Verrückung des Schwerpunktes sicher; in Hinsicht auf Drehung des Körpers um die durch den Schwerpunkt gehende Verticale findet aber nur ein stehendes Gleichgewicht Statt.

Die Anwendung des Satzes der lebendigen Kräfte auf gegenwärtige Aufgabe beruht auf folgenden Gründen: Nach demselben ist überhaupt  $\sum m v dv = \sum (X dx + Y dy + Z dz)$ , und insbesondere, wenn der Ausdruck rechts ein genaues Differential ( $d\Pi$ ) ist,  $\frac{1}{2} \sum m v^2 = \Pi + \text{Const.}$ , wo  $\Pi$  eine Function der Coordinaten anzeigt. Durch Integration erhält man, wenn  $v_0, v_0', \dots$  die Anfangsgeschwindigkeiten der Punkte sind, und  $\Pi_0$  den anfänglichen Werth von  $\Pi$  bezeichnet:

$$\frac{1}{2} \sum m v^2 = \frac{1}{2} \sum m v_0^2 + \Pi - \Pi_0. \quad a.$$

Man denke sich die Anfangsgeschwindigkeiten  $v_0, v_0', \dots$  sämmtlich sehr klein. Da das System sich anfänglich in der Stellung des Gleichgewichtes befand, so hat man für den ersten Augenblick der Bewegung,  $\Pi = \Pi_0$ , und zugleich  $d\Pi = 0$ ; mithin kann

bleibt; also ergibt sich, nach dem Satze der lebendigen Kräfte:

$$\mu \omega d\omega = g(m d\zeta + m' d\zeta').$$

Nun sind aber die Geschwindigkeiten von P und Q  $\frac{d\zeta}{dt} = R\omega$ ,

und  $\frac{d\zeta'}{dt} = -r\omega$ ; folglich erhält man durch Einsetzung dieser

Werthe, den gemeinsamen Factor  $\omega$  weglassend:  $\mu d\omega = g(Rm - rm')dt$ ; demnach ist die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  gleichförmig beschleunigt. Verlangt man noch die Spannungen der Seile BP, AQ, in jedem Augenblicke der Bewegung, so sind diese die verlorenen Beschleunigungsmomente der Massen  $m$  und  $m'$ . Wäre die Masse  $m$  frei, so würde die Schwere ihr die Beschleunigung  $g$  ertheilen; die Beschleunigung ist aber  $R \frac{d\omega}{dt}$ ,

weil  $R\omega$  die Geschwindigkeit von  $m$ ; also ist  $m\left(g - R \frac{d\omega}{dt}\right)$

das verlorene Beschleunigungsmoment der fallenden Masse  $m$ ,

und die Spannung  $T$  in BP mithin:  $T = m\left(g - R \frac{d\omega}{dt}\right)$ .

Eben so findet sich das verlorene Beschleunigungsmoment der steigenden Masse  $m'$ , oder die Spannung  $T'$  in AQ:

$T' = m'\left(g + r \frac{d\omega}{dt}\right)$ . Setzt man für  $\frac{d\omega}{dt}$  seinen obigen Werth,

so kommt:

$$T = mg\left(1 - \frac{R(Rm - rm')}{\mu}\right), \quad T' = m'g\left(1 + \frac{r(Rm - rm')}{\mu}\right).$$

Der gesammte Druck auf die Aze ist offenbar die Resultante des Gewichtes ( $Mg$ ) von Welle und Rad, und der Spannungen  $T, T'$ ; seine Intensität  $\Pi$  ist also der Summe  $Mg + T + T'$  gleich; oder die Gewichte  $Mg = W, mg = P, m'g = Q$  einführend, erhält man:

$$\Pi = W + P\left(1 - \frac{R(PR - Qr)}{Wk^2 + PR^2 + Qr^2}\right) + Q\left(1 + \frac{r(PR - Qr)}{Wk^2 + PR^2 + Qr^2}\right),$$

Puncten bestehen, so finden bei der Bewegung desselben folgende Gesetze Statt, die hier aus dem Vorgehenden zusammengefaßt werden:

1. Das resultirende Bewegungsmoment aller Massen eines Systemes bleibt während der ganzen Dauer der Bewegung unveränderlich; oder der Schwerpunkt bewegt sich gleichförmig in gerader Linie mit einer Geschwindigkeit, die gleich ist dem resultirenden Bewegungsmomente, dividirt durch die Summe der Massen.

2. Das zusammengesetzte Paar der Bewegungsmomente, gebildet in Bezug auf einen, entweder unbeweglichen oder in der Richtung des resultirenden Bewegungsmomentes fortwährenden Punct, z. B. den Schwerpunkt, bleibt während der ganzen Dauer der Bewegung, nach Ebene und Größe, unveränderlich.

3. Sind die Intensitäten der gegenseitigen Anziehungen (Abstoßungen) zugleich Functionen der Entfernungen, so ist, nach §. 62., der Ausdruck  $\int (Xdx + Ydy + Zdz)$  ein genaues Differential ( $=dII$ ), und folglich erhält die lebendige Kraft des Systemes immer denselben Werth, so oft derselbe Werth von  $\int$  wiederkehrt (man sehe §. 81.); insbesondere also wird auch die lebendige Kraft wieder die nämliche, wenn der Fall eintritt, daß alle Puncte des Systemes wieder in die nämlichen Orte gelangen, welche sie schon einmal einnahmen. Dieser Satz gilt auch, wenn das System nicht frei ist.

Die Erfahrung lehrt, daß wenn zwei Körper im Raume einander mit gewissen Geschwindigkeiten begegnen, bei dem Zusammentreffen sofort sehr große Aenderungen in ihren Bewegungen eintreten. Es müssen also sehr große beschleunigende Kräfte da sein, welche in sehr kurzer Zeit die beträchtlichen Wirkungen hervorbringen, die man bei dem Stöße beobachtet. Diese Kräfte lassen sich als Anziehungen und Abstoßungen zwischen den Puncten der Körper denken, die sich nur auf sehr kleine Entfernungen erstrecken. Geht man von dieser Voraussetzung aus, und denkt

$$\left(\mu \frac{d\omega}{dt} - gk\right)\omega + f\left(gq - k \frac{d\omega}{dt}\right)\frac{d\omega}{dt} = 0,$$

oder 
$$fk \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 - (\mu\omega + fgq)\frac{d\omega}{dt} + gk\omega = 0,$$

$$\left[fk \cdot \frac{d\omega}{dt} - \frac{1}{2}(\mu\omega + fgq)\right]^2 = \frac{1}{4}(\mu\omega + fgq)^2 - fgk^2\omega;$$

und endlich

$$fk \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}(\mu\omega + fgq) - \sqrt{\frac{1}{4}(\mu\omega + fgq)^2 - fgk^2\omega}.$$

Hier muß das negative Zeichen gewählt werden, welches für  $f=0$ , zunächst  $\frac{d\omega}{dt} = \frac{0}{0}$  und nachher  $\frac{d\omega}{dt} = \frac{gk}{\mu}$  giebt, wie gehörig. Wählte man dagegen das positive Zeichen, so würde für ein sehr kleines  $f$ ,  $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\mu\omega}{fk}$  werden, also entweder  $\omega=0$  oder  $\frac{d\omega}{dt}$  unendlich groß; von welchen Fällen bei gegenwärtiger Anwendung keiner Statt finden kann. Die Integration der vorstehenden Gleichung hat keine Schwierigkeit; daher kann sie hier übergangen werden.

86. Die in §. 82. und 85. gegebenen Beispiele reichen schon hin, um im Allgemeinen die Anwendung des Satzes der lebendigen Kräfte zu zeigen, welcher jederzeit, wie auch das vorgelegte System beschaffen sei, eine der zur Lösung der Aufgabe nöthigen Gleichungen, ohne weitläufige statische Betrachtungen, liefert, und mithin namentlich in solchen Fällen, wo überhaupt nur eine Gleichung erfordert wird, mit Vortheil angewendet werden kann.

Man kann sich ferner des Satzes der lebendigen Kräfte in vielen Fällen zur Unterscheidung des sicheren und unsicheren Gleichgewichtes bedienen. Besteht zwischen mehreren Kräften, die man sich als Functionen der Coordinaten ihrer Angriffspunkte gegeben denke, an einem Systeme Gleichgewicht, und



Abstoßung vorausgesetzt wird, die Verrückung  $\delta r$  in die Geraden  $r$  oder in deren Verlängerung fällt; eben so verhält es sich zu dem anderen Gliede  $\delta_1 r$ . Denkt man sich  $fr$  immer positiv und hiernach  $\delta r$ ,  $\delta_1 r$  mit ihren gehörigen Zeichen genommen, stellt in jedem Falle die Summe  $\delta r + \delta_1 r$  die gesammte Änderung von  $r$ , in der Zeit  $dt$ , dar; diese mit  $dr$  bezeichnend, erhält man:  $m v dv + m' v' dv' = fr \cdot dr$ . Es sei, in einem gegebenen Augenblicke,  $r = r_0$ ,  $v = v_0$ ,  $v' = v'_0$ , so ergiebt sich durch Integration der vorstehenden folgende Gleichung der lebendigen Kräfte:

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m' v'^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} m' v_0'^2 + \int_{r_0}^r fr \, dr.$$

Nimmt man an, daß die abstoßende Kraft sich nur auf eine bestimmte Weite erstreckt, so ist  $fr = 0$ , so lange  $r$  größer ist, als eine gewisse Grenze  $r_0$ . Sobald aber  $r < r_0$ , denke man sich, daß eine mit abnehmendem  $r$  über alle Grenzen hinaus wachsende Abstoßung Statt finde; also daß die Function  $fr$ , schon für  $r < r_0$ , mit abnehmendem  $r$  wachse, für  $r = 0$  aber unendlich groß werde. Auch das Integral  $\int_0^{r_0} fr \, dr$  werde als unendlich groß angenommen. Die obige Gleichung läßt sich auch schreiben:  $\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m' v'^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} m' v_0'^2 - \int_r^{r_0} fr \cdot dr$ .

Das Integral  $\int_r^{r_0} fr \, dr$  ist wesentlich positiv, so lange  $r < r_0$ , es wird Null, wenn  $r = r_0$ . Denn unter der Voraussetzung  $r > r_0$  ist  $fr = 0$ , und mithin auch  $\int_{r_0}^r fr \, dr = 0$ . Aus obiger Gleichung folgt, daß der Abstand  $r$  nicht über eine gewisse Grenze hinaus abnehmen kann; denn für ein sehr kleines  $r$  würde der Werth der lebendigen Kraft negativ werden, was nicht angeht. Auch ist aus der Natur der Sache klar, daß  $r$  nach der Abnahme wieder bis zu dem Werthe  $r_0$  zunehmen muß, da die Punkte einander beständig abstoßen; der Leser wird alle den strengen Beweis dieser Behauptung, der sich durch Rech-

der Werth von  $\Pi$ , welcher der Stellung des Gleichgewichtes entspricht, ein Maximum oder Minimum sein. Ist  $\Pi_0$  ein Maximum von  $\Pi$ , und ist die dem Systeme ertheilte Bewegung von der Art, daß durch sie überhaupt der Werth von  $\Pi$  geändert wird, so wird die Differenz  $\Pi - \Pi_0$  bei fortgehender Bewegung zunächst negativ; da aber  $\frac{1}{2}\Sigma m v_0^2$  nach der Voraussetzung sehr klein ist, und die Summe aller Glieder auf der rechten Seite der Gleichung a. unter allen Umständen positiv bleiben muß, so läßt sich schließen, daß diejenigen Aenderungen der Coordinaten, mit denen zugleich  $\Pi$  sich ändert, beständig sehr klein bleiben müssen. Denn beträchtliche Aenderungen derselben können nicht erfolgen, ohne daß die Differenz  $\Pi - \Pi_0$  negative Werthe erhielte, die nicht mehr sehr klein wären; solche Werthe aber können nicht Statt finden. Folglich ist das Gleichgewicht in Hinsicht auf diejenigen Veränderungen, bei welchen der Werth von  $\Pi$  sich ändert, sicher.

Wenn aber gewisse Coordinaten in  $\Pi$  gar nicht vorkommen, so sind, ungeachtet  $\Pi$  immer ein Maximum bleibt, noch Bewegungen möglich, durch welche der Werth dieser Function gar nicht geändert wird. Indem für solche  $\Pi - \Pi_0$  beständig Null ist, wird die lebendige Kraft  $\frac{1}{2}\Sigma m v^2 = \frac{1}{2}\Sigma m v_0^2$ , bleibt also unveränderlich dieselbe. In Betreff der genannten Bewegungen ist das Gleichgewicht ein stehendes.

Dies ist, was sich hier im Allgemeinen über die Anwendung des Satzes der lebendigen Kräfte auf die Frage nach der Sicherheit des Gleichgewichtes sagen läßt. Es bleibt unentbehrlich, die besonderen Bedingungen jeder Aufgabe näher zu untersuchen, um zu entscheiden, ob nach einer kleinen Erschütterung das System um die Stellung des Gleichgewichtes nur Schwingungen machen, oder wie überhaupt seine Bewegung beschaffen sein wird.

87. Wenn die beschleunigenden Kräfte an einem freien Systeme in gegenseitigen Anziehungen oder Abstoßungen zwischen den

senkrechten Axen wähle man wieder diejenige der  $y$  so, daß zugehöriges Trägheitsmoment nicht kleiner sei, als das für die andere auf  $x$  senkrechte Axe. Zu der dritten auf  $x$  und  $y$  senkrechten Axe  $z$  gehört das Trägheitsmoment  $C$ ; und man hat nachdem die Axen  $x, y, z$  auf die angegebene Art gewählt ist  $A > B > C$ , wo das Zeichen  $>$  die Gleichheit nicht ausschließt wie auch im folgenden Theile dieses §.

Für irgend eine vierte Axe  $H$ , die mit den vorigen  $x, y, z$  die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  bildet, sei  $D$  das Trägheitsmoment, so nach dem Vorigen  $A > D$ . Nennt man  $r$  den kürzesten Abstand eines Elementes  $dm$  des Körpers von  $H$ , so ist  $D = \int r^2 dm$  und zugleich (vergl. §. 103.)

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2$$

$$\text{oder } r^2 = (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (z^2 + x^2) \cos^2 \beta + (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2zx \cos \gamma \cos \alpha - 2xy \cos \alpha \cos \beta$$

Multipliziert man mit  $dm$ , und integrirt in Bezug auf die Masse des Körpers, setzt auch zur Abkürzung  $\int yz dm = h$ ,  $\int zx dm = h'$ ,  $\int xy dm = h''$ , so kommt das Trägheitsmoment:

$$D = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma - 2h \cos \beta \cos \gamma - 2h' \cos \gamma \cos \alpha - 2h'' \cos \alpha \cos \beta$$

Man nehme zuerst die Axe  $H$  in der Ebene  $xy$ , so ist  $\cos \gamma = 1$  und  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$ . Daher kann  $\cos \alpha = \cos \varphi$ ,  $\cos \beta = \sin \varphi$  gesetzt werden, woraus sich ergibt:

$$D = A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi - 2h'' \sin \varphi \cos \varphi < A,$$

folglich auch  $A \sin^2 \varphi > B \sin^2 \varphi - 2h'' \sin \varphi \cos \varphi$ , oder  $A > B - 2h'' \cotg \varphi$ . Diese Ungleichheit (welche Gleichheit nicht ausschließt) kann für jeden beliebigen Werth von  $\varphi$  existiren nur dann bestehen, wenn  $h'' = 0$  ist; und da sie bestehen muß  $h'' = \int xy dm = 0$  sein. Nimmt man ferner die Axe  $H$  in der Ebene  $xz$  an, so ist  $\cos \beta = 0$ , und wird noch  $\cos \alpha = \cos \varphi$ ,  $\cos \gamma = \sin \varphi$  gesetzt, so kommt  $D = A \cos^2 \varphi + C \sin^2 \varphi - 2h' \sin \varphi \cos \varphi < A$ , oder  $A > C - 2h' \cotg \varphi$ ; was nicht

sich beide Körper ganz frei beweglich, auch keinen anderweitigen beschleunigenden Kräften unterworfen, so lassen sich unmittelbar die beiden ersten der so eben aufgestellten Bewegungsgesetze anwenden. Dessen zufolge geht der Schwerpunkt beider Körper während des Stoßes und nach ihm gleichförmig in gerader Linie ungestört fort, wie vorher; und das zusammengesetzte Paar der Bewegungsmomente, in Bezug auf ihn gebildet, bleibt ebenfalls, nach Ebene und Größe, gänzlich ungedändert. Diese Gesetze gelten, die Körper mögen bei dem Stoße unverfehrt bleiben oder zerbrechen; auch sind sie unabhängig von der Reibung, welche bei dem Stoße an den Oberflächen der Körper eintritt. Denn obgleich die Kenntniß der physischen Ursachen der Reibung noch nicht sehr vorgerückt ist, so muß man sich doch dieselbe als Folge gewisser Anziehungen oder Abstößungen denken, welche sich nur auf sehr geringe Weiten erstrecken, und bei denen die Gleichheit zwischen Wirkung und Gegenwirkung, wie überall, Statt findet. Indem die Reibung das Gleiten des einen Körpers an dem anderen, während der sehr kurzen Dauer des Stoßes, erschwert oder verhindert, kann sie die Vertheilung der Bewegung zwischen beiden beträchtlich ändern, aber bei freien Körpern weder auf die Bewegung ihres gemeinsamen Schwerpunktes noch auf das zusammengesetzte Paar der Bewegungsmomente Einfluß haben:

Die Anwendung des Satzes der lebendigen Kräfte auf den Stoß der Körper gestattet nur einen sehr bedingten Schluß, weil die Wirkungen ihrer Theile auf einander uns nicht näher bekannt sind.

Um von dem einfachsten Falle auszugehen, denke man sich zwei freie Punkte  $m$  und  $m'$ , die einander, in der Entfernung  $r$ , mit der Kraft  $fr$  abstößen. Es seien  $\delta r$ ,  $\delta_1 r$  die Verrückungen von  $m$  und  $m'$ , in dem Zeitelemente  $dt$ , nach der Richtung ihres Abstandes  $r$ ,  $v$  und  $v'$  ihre Geschwindigkeiten, so hat man, nach dem Satze der lebendigen Kräfte, folgende Gleichung:

$$mvdv + m'v'dv' = fr(\delta r + \delta_1 r).$$

Der Ausdruck  $fr \cdot \delta r$  ist negativ oder positiv, je nachdem, da hier

mente der Reihe nach mit  $A, B, C$ , wobei immer  $A > B > C$  vorausgesetzt wird, ohne die Gleichheit auszuschließen.

Man lege ferner durch  $O$  noch drei andere rechtwinklige Axen  $u, v, w$ , und bezeichne die Cosinus ihrer Neigungen mit  $a, b, c$  gegen  $x, y, z$  wie in §. 33. Sind nun  $x, y, z$  und  $u, v, w$  Coordinaten desselben Punktes in beiden Systemen, so erhält sich, indem man  $x, y, z$  zuerst auf die Abscisse  $u$ , dann auf  $v$  und dann auf  $w$  senkrecht projiziert, folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} u &= a x + b y + c z \\ v &= a' x + b' y + c' z \\ w &= a'' x + b'' y + c'' z \end{aligned} \right\} 1.$$

wobei zwischen  $a, b, \dots c''$  die Gleichungen 1. a und 1. b: §. 33. gelten. Diese Formeln für die Verwandlung eines rechtwinkligen Coordinatensystemes in ein anderes sind auch schon §. 22. enthalten, wenn man die dortigen schiefen Axen  $x_1, y_1, z_1$  rechtwinklig annimmt. Aus denselben folgt weiter

$$uv = (ax + by + cz)(a'x + b'y + c'z)$$

oder wenn man mit  $dm$  multiplicirt, und in Bezug auf die gesamte Masse des Körpers integrirt, zugleich bemerkend, dass  $\int xy dm = 0, \int zx dm = 0, \int yz dm = 0$ , weil  $x, y, z$  Hauptachsen sind:

$$\int uv dm = aa' \int x^2 dm + bb' \int y^2 dm + cc' \int z^2 dm.$$

Es ist aber  $\int (y^2 + z^2) dm = A$ , u. s. w. (§. 88.); also  $2 \int x^2 dm = B + C - A$ ,  $2 \int y^2 dm = C + A - B$ ,  $2 \int z^2 dm = A + B - C$ . In Abkürzung sei noch  $B + C - A = 2A'$ ,  $C + A - B = 2B'$ ,  $A + B - C = 2C'$  ( $A', B', C'$  sind wesentlich positiv); es nach folgt:

$$\left. \begin{aligned} \int uv dm &= a a' A' + b b' B' + c c' C' \\ \int wu dm &= a'' a A' + b'' b B' + c'' c C' \\ \int vw dm &= a' a'' A' + b' b'' B' + c' c'' C' \end{aligned} \right\} 2.$$

Die beiden letzten dieser Formeln ergeben sich auf gleiche Weise

nung leicht führen läßt, nicht vermiffen. Denkt man sich demnach  $r$  von  $r_0$  an anfänglich bis zu einem gewissen Werthe abnehmend, nachher aber wieder bis  $r_0$  wachsend, so vermindert sich anfänglich der Werth der lebendigen Kraft, und nimmt dann mit wachsendem  $r$  wieder zu, bis für  $r=r_0$  das Integral  $\int_r^{r_0} fr dr$  verschwindet. Alsdann erhält, indem die Abstoßung aufhört, die gesammte lebendige Kraft der Punkte wieder den nämlichen Werth, den sie anfänglich besaß.

Dies ist der einfachste, dem Stoße elastischer Körper analoge Fall, den die Theorie annehmen kann. Ähnliche Betrachtungen lassen sich auch auf den Stoß zwischen Körpern von beliebiger Größe anwenden. Man betrachte nur zwei Körper A und B; es sei  $u$  die Geschwindigkeit des Schwerpunktes von A,  $v$  die relative Geschwindigkeit eines Elementes  $m$  dieses Körpers, gegen jenen Schwerpunkt; so ist  $\frac{1}{2}u^2 \sum m + \frac{1}{2} \sum mv^2$  die lebendige Kraft von A (§. 83.). Eben so sei  $\frac{1}{2}u'^2 \sum m + \frac{1}{2} \sum mv'^2$  die lebendige Kraft von B. Die Summe von beiden werden zur Abkürzung mit  $U$  bezeichnet; ihr Werth in dem ersten Augenblicke des Stoßes, in welchem die gegenseitigen Wirkungen zwischen den Punkten der Körper beginnen, sei  $U_0$ . Diese Wirkungen bestehen theils aus denen, welche von einigen Punkten des einen Körpers auf einige des anderen ausgeübt und von diesen wiederum zurückgegeben werden; theils, indem dadurch einige Theile in jedem Körper aus ihrer Lage gebracht und so die Gestalten der Körper geändert werden, aus denen, welche sofort zwischen den Punkten desselben Körpers eintreten. Anderweitige Wirkungen sind nicht vorhanden, wenn die Körper ganz frei sind, wie hier angenommen ist. Es sei  $r$  der Abstand zwischen zwei auf einander wirkenden Punkten,  $fr$  die Intensität der Anziehung oder Abstoßung zwischen ihnen, beide mögen übrigens demselben Körper angehören oder nicht; so entsteht von dieser Wirkung in dem Ausdrucke des Differentiales der lebendigen Kraft während des Stoßes ( $U$ ) ein Glied gleich  $fr \cdot dr$ , und die Gleichung

so folgt, daß entweder  $b''$  und  $c$  oder  $b$  und  $c''$  zugleich Null sein müssen. Setzt man  $b''=0$ ,  $c=0$ , so giebt die Gleichung 3., weil  $aa'+bb'=0$ ,  $aa'(A'-B')=0$ , mithin  $aa'=0$ , auch  $bb'=0$ . Hieraus folgt, da weder  $a$  noch  $b$  Null sein kann, indem sonst, wegen  $c=0$ ,  $u$  in  $y$  oder in  $x$  fallen müßte,  $a'=0$ ,  $b'=0$ , mithin  $c'=\pm 1$ . Diese Werthe in die ersten Gleichungen 1. b., §. 33., gesetzt, geben  $\pm c''=0$ , was nicht möglich ist; denn da  $a''=0$ ,  $b''=0$  sind, so folgt  $c''=\pm 1$ . Um zu beweisen, daß eben so wenig  $b$  und  $c''$  zugleich Null sein können, braucht man im Vorstehenden nur die Buchstaben  $b$  und  $c$  mit einander zu vertauschen; dadurch wird der Fall auch auf diesen Fall anwendbar. Folglich ist keine Hauptaxe vorhanden; w. z. b. w.

90. Hier muß einer wichtigen Eigenschaft der Hauptaxen erwähnt werden, die sich aus §. 84. ergibt. Wenn sich nämlich ein Körper ohne Einwirkung beschleunigender Kräfte um eine unbewegliche Axe  $x$  dreht, so folgt aus dem genannten Satze oder auch aus dem Satze der lebendigen Kräfte, daß seine Winkelgeschwindigkeit ( $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ ) unveränderlich ist. Nimmt man die Drehungsaxe, wie in §. 84., zu derjenigen der  $x$ , so ist in jedem Punct des Körpers  $\frac{dx}{dt}=0$ ,  $\frac{d^2x}{dt^2}=0$ ; zugleich sind die Kräfte  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  alle Null, und man erhält für den Widerstand der Axe folgende Ausdrücke:

$$\pi=0, \quad \rho=-\omega^2 \int y \, dm, \quad \sigma=-\omega^2 \int z \, dm, \quad M=-\omega^2 \int xz \, dm, \\ N=\omega^2 \int xy \, dm.$$

Diese Ausdrücke ergeben sich aus §. 84. am einfachsten, wenn man in den Gleichungen c., welche den Widerstand bei Umdrehung eines schweren Körpers ausdrücken,  $g=0$ ,  $\frac{d\varphi}{dt}=\omega$ ,  $\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{d\omega}{dt}=0$  setzt. Nun lege man durch den Anfang 0 die

bestehen kann, wenn nicht  $h' = 0$ , also  $\int zx \, dm = 0$  ist. Nimmt man endlich die Axe  $H$  in der Ebene  $yz$  an, so ist  $\cos \alpha = 0$ , und wird  $\cos \beta = \cos \varphi$ ,  $\cos \gamma = \sin \varphi$  gesetzt, so kommt  $D = B \cos^2 \varphi + C \sin^2 \varphi - 2h \sin \varphi \cos \varphi < B$ , oder  $B > C - 2h \cotg \varphi$ , was nicht sein kann, wenn nicht  $h = 0$  oder  $\int yz \, dm = 0$  ist. Hiernach wird das Trägheitsmoment für die Axe  $H$ :

$$D = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma,$$

wo  $A > B > C$ . Auch folgt, daß  $D > C \cos^2 \alpha + C \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma$ , also  $D > C$  ist, d. h. das Trägheitsmoment für die Axe  $z$  ist nicht größer als das für irgend eine andere Axe  $H$ .

Sind insbesondere die Trägheitsmomente für die drei Axen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  einander gleich, also  $A = B = C$ , so wird auch  $D = A$ , also alle Trägheitsmomente einander gleich. Sind zwei derselben einander gleich, z. B.  $A = B$ , so wird  $D = A \sin^2 \gamma + C \cos^2 \gamma$ ; mithin für  $\cos \gamma = 0$ ,  $D = A$ , d. h. die Trägheitsmomente für alle in der Ebene  $xy$  befindlichen Axen sind einander gleich.

89. Eine durch den Punct  $O$  gehende Axe  $x$  heißt Hauptaxe, wenn, indem  $O$  wie bisher Anfang der Coordinaten bleibt, die Integrale  $\int xy \, dm$  und  $\int xz \, dm$  beide zugleich Null sind. Legt man durch die Hauptaxe  $x$  eine beliebige Ebene, deren Neigung gegen die Ebene  $xy$  gleich  $\alpha$  sei, und zieht in derselben aus  $O$  die Gerade  $v$  senkrecht auf  $x$ , so ist, für die senkrechte Projection eines Elementes  $dm$  des Körpers auf die Ebene  $xv$ ,  $v = y \cos \alpha + z \sin \alpha$ , mithin  $\int xv \, dm = \cos \alpha \int xy \, dm + \sin \alpha \int xz \, dm = 0$ ; es kommt also auf die Wahl der Ebenen  $xy$ ,  $xz$  nichts an. Aus dem vorigen §. folgt, daß jedem Puncte  $O$  des Körpers wenigstens drei Hauptaxen zukommen, die sich durch denselben legen lassen, und gegen einander senkrecht sind. Eine derselben ist im Allgemeinen die Axe des größten, eine andere die des kleinsten Trägheitsmomentes. Diese drei Hauptaxen bezeichne man, wie oben, mit  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und die zugehörigen Trägheitsmo-



die Geschwindigkeit von  $dm$  ist) oder  $r\omega^2 dm$ . Sie wirkt in Richtung des Abstandes  $r$ , diesen zu vergrößern strebend. Legt man sie nach den im Raume unbeweglichen Axen  $x, y, z$  sind ihre Componenten  $X=0, Y=\omega^2 y dm, Z=\omega^2 z dm$ ,  $\frac{y}{r}, \frac{z}{r}$  die Cosinus der Winkel sind, welche ihre Richtung mit  $y$  und  $z$  bildet, wobei  $r$  positiv,  $y$  und  $z$  aber mit ihren Vorzeichen zu nehmen sind. Man setze alle Schwingungskräfte in eine einzelne Kraft an  $O$ , und ein Paar zusammen; bezeichne die Componenten von jener mit  $\pi', \rho', \sigma'$ , die von diesem mit  $L', M', N'$ ; so kommt:

$$\pi' = \sum X = 0, \rho' = \sum Y = \omega^2 \int y' dm, \sigma' = \sum Z = \omega^2 \int z' dm,$$

$$L' = \sum (Yz - Zy) = 0, M' = \sum (Zx - Xz) = \omega^2 \int xz dm,$$

$$N' = \sum (Xy - Yx) = -\omega^2 \int xy dm,$$

folglich ist  $\rho + \rho' = 0, \sigma + \sigma' = 0, M + M' = 0, N + N' = 0$  d. h. der Widerstand der Axe hat, wenn keine beschleunigende Kräfte vorhanden sind, nur den Schwingungskräften Gleichgewicht zu halten.

Daß die Ebene des zusammengesetzten Paares der Schwingungskräfte durch die Drehungsaxe gehen, also die auf dieser senkrechte Componente  $L'$  Null sein muß, versteht sich von selbst, weil alle Schwingungskräfte nach der Axe gerichtet sind. Man bemerke auch, daß die Mittelfraft aus allen Schwingungskräften nach Richtung und Größe die nämliche ist, als ob die ganze Masse des Körpers im Schwerpunkte vereinigt sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die Axe  $x$  drehte. Denn nennt man  $y', z'$  die Coordinaten des Schwerpunktes, so sind  $my'\omega^2$  und  $mz'\omega^2$  die Componenten der in angegebener Voraussetzung Statt findenden Schwingkraft, und da  $my' = \int y dm, mz' = \int z dm$ , so sind sie den vorigen  $\rho'$  und  $\sigma'$  gleich, w. g. b. w.

Hieraus ergibt sich noch Folgendes: Eine durch den Körper gelegte Gerade ist nur dann in Bezug auf einen ihrer Punkte Hauptaxe, wenn bei der Drehung um sie die Ebene des zusam-

wie die erste, oder unmittelbar aus dieser durch angemessene Ver-  
wechslung der Buchstaben.

Soll nun  $u$  eine vierte, mit keiner der drei vorigen zusam-  
menfallende Hauptaxe sein, so müssen die Integrale  $\int u v \, dm$ ,  
 $\int u w \, dm$  verschwinden, und mithin folgende Gleichungen gelten:

$$a a' A' + b b' B' + c c' C' = 0 \quad 3.$$

$$a'' a A' + b'' b B' + c'' c C' = 0. \quad 4.$$

Sind erstens die drei Trägheitsmomente  $A, B, C$  einander  
gleich, so ist auch  $A' = B' = C'$ , und die Bedingungen 3. 4,  
werden, nach §. 33., 1. b., von selbst erfüllt; d. h. alle Axen  
sind Hauptaxen. (Es ist immer nur von den durch  $O$  gelegten  
Axen die Rede, so lange diese Bedingung nicht ausdrücklich auf-  
gehoben wird.) Sind ferner zwei der Trägheitsmomente  $A, B,$   
 $C$  einander gleich, und von dem dritten verschieden, z. B.  $A = B$ ,  
so ist auch  $A' = B'$ , und die vorstehenden Gleichungen geben, mit  
Rücksicht auf 1. b. in §. 33.,  $cc'(C' - A') = 0$ ,  $cc''(C' - A') = 0$ .  
Es ist aber  $C' - A' = A - C$ , also nicht Null; mithin  $cc' = 0$ ,  
 $cc'' = 0$ . Beide Bedingungen werden befriedigt, wenn  $c = 0$ ,  
d. h. jede Axe in der Ebene  $xy$  ist Hauptaxe, außer diesen aber  
und der auf ihnen senkrechten  $z$  keine andere. Denn setzt man  
 $c' = 0$ ,  $c'' = 0$ , wodurch obigen Bedingungen ebenfalls genügt  
wird, so ergibt sich nur die Axe  $z$ .

Sind endlich  $A, B, C$  alle von einander verschieden, so  
gibt es keine vierte Hauptaxe. Denn es sei, wenn es angeht,  
 $u$  eine solche, die mit keiner der vorigen zusammenfällt. Da  $v$   
und  $w$  sich beliebig; wenn nur senkrecht gegen  $u$  und gegen ein-  
ander, wählen lassen; so nehme man  $v$  in der Ebene  $xu$ , mithin  
 $w$  senkrecht auf  $x$ , und setze demnach in der Gleichung 4.  $a'' = 0$ .  
Diese Gleichung giebt, weil noch  $b''b + c''c = 0$ ,  $b''b(B' - C') = 0$ ,  
und weil  $B' - C' = C - B$ , also nicht Null ist, so giebt sie  
 $bb'' = 0$ ; daher auch  $c''c = 0$  sein muß. Da  $b$  und  $c$  nicht zu-  
gleich Null sein können, indem sonst  $u$  in  $x$  fielen, da ferner auch  
 $b''$  und  $c''$  nicht zugleich Null sein können, weil  $b''^2 + c''^2 = 1$ ;

w schon die gesuchten Hauptachsen; dieser Fall kann also ausgeschlossen werden.

Ferner gelten zwischen den Coordinaten  $u, v, w$  und  $x, y, z$  desselben Punktes die Gleichungen 1. in §. 89., nämlich  $u = ax + by + cz$ ,  $v = a'x + b'y + c'z$ ,  $w = a''x + b''y + c''z$ , und zwischen  $a, b \dots c''$  wieder die Gleichungen 1. a und 1. in §. 33. Ferner folgt aus den Werthen von  $A, A', A'', B, B', B'', C, C', C''$  (Seite 91. unten)

$$Aa + A'a' + A''a'' = Bb + B'b' + B''b'' = Cc + C'c' + C''c'',$$

oder weil  $A = a, A' = a' \dots$  (§. 92. Formel 4.),

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = b^2 + b'^2 + b''^2 = c^2 + c'^2 + c''^2.$$

Nach 1. a. §. 33. ist aber die Summe dieser drei gleichen Ausdrücke gleich 3; folglich muß jeder von ihnen der Einheit gleich sein. Dies versteht sich auch von selbst, weil z. B.  $a, a', a''$  die Cosinus der Winkel sind, welche  $x$  mit den rechtwinkligen Achsen  $u, v, w$  bildet; es kam hier nur darauf an, zu zeigen, wie auch diese Relation in den Formeln des §. 33. enthalten ist. Also hat man noch:

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, c^2 + c'^2 + c''^2 = 1.$$

und auch

$$bc + b'c' + b''c'' = 0, ca + c'a' + c''a'' = 0, ab + a'b' + a''b'' = 0.$$

Die letzte dieser Gleichungen 4. folgt, indem man die Gleichungen 1. von  $A, A', A''$  (§. 91.) beziehungsweise mit  $b, b', b''$  multiplicirt und die Producte addirt; auf ähnliche Weise die übrigen. Multiplicirt man die Gleichungen 1. der Reihe nach mit  $a, a', a''$ , und addirt die Producte, und eben so nachher mit  $b, b', b''$  wieder addirend, u. s. f., so kommt:

$$x = au + a'v + a''w, y = bu + b'v + b''w, z = cu + c'v + c''w,$$

welche Gleichungen man, wie Jeder sieht, auch auf geometrischem Wege durch Projection leicht erhält. Nun sei für die gesuchten Hauptachsen  $x, y, z$ :

$x, y, z$ , welcher ein beliebiger Punkt der Drehungsaxe  $x$  ist, drei neue Axen  $u, v, w$ , die in dem Körper fest seien, während die vorigen  $x, y, z$  im Raume fest sind. Da jedoch  $x$  auch im Körper fest ist, so falle  $u$  in  $x$ ; ferner sei  $v$  dem vom Schwerpunkte auf  $u$  gefällten Lothe  $a$  parallel; so hat man  $\int v \, dm = am$ ,  $\int w \, dm = 0$ . Bezeichnet noch, wie in §. 84.,  $\varphi$  die veränderliche Neigung von  $v$  gegen  $z$ , so ist  $y = v \sin \varphi + w \cos \varphi$ ,  $z = v \cos \varphi - w \sin \varphi$ , folglich  $\int y \, dm = am \sin \varphi$ ,  $\int z \, dm = am \cos \varphi$ , und  $\int xy \, dm = \sin \varphi \int uv \, dm - \cos \varphi \int uw \, dm$ ,  $\int xz \, dm = \cos \varphi \int uv \, dm + \sin \varphi \int uw \, dm$ . Es sei nun insbesondere  $u$  eine der dem Punkte  $O$  zugehörigen Hauptaxen, so sind  $\int uv \, dm = 0$ ,  $\int uw \, dm = 0$ , mithin auch  $\int xz \, dm = 0$ ,  $\int xy \, dm$ , während der ganzen Dauer der Bewegung. Hieraus folgt:

$$\rho = -\omega^2 \int y \, dm, \quad \sigma = -\omega^2 \int z \, dm, \quad M = 0, \quad N = 0;$$

der gesammte Druck auf die Axe besteht also nur in einer einzelnen Kraft  $\sqrt{\rho^2 + \sigma^2}$  in  $O$ ; dagegen sind die Paare  $M$  und  $N$  beständig Null. Wenn daher, mit Ausnahme von  $O$ , alle übrigen Punkte der Axe  $x$  frei beweglich gemacht werden, so bleibt diese Axe dennoch unbewegt, weil sie nur in dem unbeweglichen Punkte  $O$  einen Druck erleidet, und der Körper dreht sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit um dieselbe, wie vorher. Geht insbesondere  $u$  durch den Schwerpunkt des Körpers, so wird noch  $\int v \, dm = 0$ , also auch  $\int y \, dm = 0$ ,  $\int z \, dm = 0$ , und folglich  $\rho = 0$ ,  $\sigma = 0$ ; d. h. wenn die zu  $O$  gehörrige Hauptaxe noch durch den Schwerpunkt geht, so erleidet sie, indem der Körper sich ohne Einwirkung beschleunigender Kräfte um sie dreht, gar keinen Druck, und braucht mithin auch in keinem Punkte befestigt zu sein, um immer unbewegt zu bleiben; die Drehung dauert also immerwährend gleichförmig fort.

Der Ursprung des hier in Rede stehenden Druckes auf die Axe liegt in der Schwungkraft. Diese beträgt, für die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , und für ein Element  $dm$  in dem Abstände

$$r = \sqrt{y^2 + z^2} \quad \text{von der Drehungsaxe } x, \quad \frac{r^2 \omega^2 dm}{r} \quad (\text{indem } r\omega$$

oder geordnet:

$$(F-\xi)(G-\xi)(H-\xi) - f^2(F-\xi) - g^2(G-\xi) - h^2(H-\xi) + 2fgh = 0.$$

Diese Gleichung dient zur Bestimmung von  $\xi$ . Da man in der Gleichung 9. auch  $b, \eta$  und  $c, \zeta$  anstatt  $a, \xi$  setzen konnte, und dann durch Wegschaffung von  $b, b', b''$  wieder die nämliche Gleichung 10., nur  $\eta$  statt  $\xi$  enthaltend, und nach Wegschaffung von  $c, c', c''$  wieder die Gleichung 10., nur  $\zeta$  statt  $\xi$  enthaltend, sich ergeben mußte, so folgt, daß die Wurzeln der Gleichung 10. die gesuchten Werthe von  $\xi, \eta, \zeta$  sind. Und da schon bewiesen ist, daß die drei Hauptachsen vorhanden sind, so folgt, daß auch diese drei Wurzeln reell und positiv sein müssen, weil sie die Werthe der Integrale  $\int x^2 dm$ , u. s. f., und mithin wesentlich positiv sind. Um die Neigungen der Hauptachsen  $x, y, z$  gegen  $u, v, w$  zu bestimmen, bemerke man noch, daß aus den Gleichungen 9. folgt:

$$a : a' = fh - g(G - \xi) : hg - f(F - \xi)$$

$$a' : a'' = gf - h(H - \xi) : fh - g(G - \xi),$$

folglich

$$a : a' : a'' = \frac{1}{hg - f(F - \xi)} : \frac{1}{fh - g(G - \xi)} : \frac{1}{gf - h(H - \xi)}.$$

Setzt man also:

$$\lambda^2 = \frac{1}{(hg - f(F - \xi))^2} + \frac{1}{(fh - g(G - \xi))^2} + \frac{1}{(gf - h(H - \xi))^2},$$

so folgt:

$$\lambda a = \frac{1}{hg - f(F - \xi)}, \quad \lambda a' = \frac{1}{fh - g(G - \xi)}, \quad \lambda a'' = \frac{1}{gf - h(H - \xi)}.$$

Vertauscht man in diesen Ausdrücken die Buchstaben  $a, a', a''$  beziehungsweise mit  $b, b', b''$ ,  $\eta$  und mit  $c, c', c''$ ,  $\zeta$  so erhält man die übrigen Cosinus  $b, \dots c''$ ; womit die Hauptachsen und zugleich die ihnen zugehörigen Trägheitsmomente  $A = \frac{1}{2} \lambda a^2$ ,  $B = \frac{1}{2} \lambda a'^2$ ,  $C = \frac{1}{2} \lambda a''^2$  gefunden sind.

92. Wenn die Trägheitsmomente  $A, B, C$  des Körpers  $K$  die durch den Schwerpunkt gehenden Hauptachsen bekannt sind, so ergibt sich dasjenige für irgend eine andere Axe  $H$  mit Hilfe der in §. 83. und 88. enthaltenen Sätze sehr leicht. Denn man lege durch den Schwerpunkt eine der  $H$  parallele Axe  $H'$ , und es sei  $D'$  das ihr zukommende Trägheitsmoment; so erhält man, nach §. 88.

$$D' = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma,$$

wo  $\alpha, \beta, \gamma$  die Neigungen von  $H$  oder  $H'$  gegen die Hauptachsen  $x, y, z$  sind. Bezeichnet man ferner mit  $a$  den senkrechten Abstand der Axen  $H$  und  $H'$  von einander, und das zu  $H$  gehörige Trägheitsmoment mit  $D$ , die Masse des Körpers mit  $m$ , so ist, nach dem Satze in §. 83.,

$$D = D' + a^2 m.$$

Diese beiden Formeln geben den Werth von  $D$  sehr leicht, wenn  $A, B, C$  bekannt sind, auf deren Bestimmung es mithin hauptsächlich ankommt.

Man bezeichne das Volumen eines nach allen Dimensionen unendlich kleinen Elementes des Körpers mit  $dv$ , so muß die Masse dm desselben sich durch ein Product  $\rho dv$  ausdrücken lassen, in welchem der Coefficient  $\rho$  entweder eine beständige Größe oder irgend eine Function der Coordinaten des Elementes ist, je nachdem die Masse in dem Körper gleichmäßig vertheilt ist oder nicht. Dieser Coefficient heißt die Dichtigkeit. Setzt man  $dv = dx dy dz$ , so werden demnach die Trägheitsmomente für die drei Axen  $x, y, z$  beziehungsweise durch folgende Integrale ausgedrückt:

$$\iiint (y^2 + z^2) \rho dx dy dz, \quad \iiint (z^2 + x^2) \rho dx dy dz, \\ \iiint (x^2 + y^2) \rho dx dy dz,$$

welche sich nach den bekannten Regeln finden lassen, wenn die Dichtigkeit  $\rho$  als Functionen  $x, y, z$  gegeben ist. In den folgenden Beispielen wird es genügen, nur gleichartige Körper zu betrachten.

w schon die gesuchten Hauptachsen; dieser Fall kann also ausgeschlossen werden.

Ferner gelten zwischen den Coordinaten  $u, v, w$  und  $x, y, z$  desselben Punktes die Gleichungen 1. in §. 89., nämlich

$$u = ax + by + cz, \quad v = a'x + b'y + c'z, \quad w = a''x + b''y + c''z, \quad 2.$$

und zwischen  $a, b \dots c''$  wieder die Gleichungen 1. a und 1. b in §. 33. Ferner folgt aus den Werthen von  $A, A', A'', B, \dots C''$  (Seite 91. unten)

$$Aa + A'a' + A''a'' = Bb + B'b' + B''b'' = Cc + C'c' + C''c'',$$

oder weil  $A = a, A' = a' \dots$  (§. 92. Formel 4.),

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = b^2 + b'^2 + b''^2 = c^2 + c'^2 + c''^2.$$

Nach 1. a. §. 33. ist aber die Summe dieser drei gleichen Ausdrücke gleich 3; folglich muß jeder von ihnen der Einheit gleich sein. Dies versteht sich auch von selbst, weil z. B.  $a, a', a''$  die Cosinus der Winkel sind, welche  $x$  mit den rechtwinkligen Axen  $u, v, w$  bildet; es kam hier nur darauf an, zu zeigen, wie auch diese Relation in den Formeln des §. 33. enthalten ist. Also hat man noch:

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \quad b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \quad c^2 + c'^2 + c''^2 = 1. \quad 3.$$

und auch

$$bc + b'c' + b''c'' = 0, \quad ca + c'a' + c''a'' = 0, \quad ab + a'b' + a''b'' = 0. \quad 4.$$

Die letzte dieser Gleichungen 4. folgt, indem man die Werthe von  $A, A', A''$  (§. 91.) beziehungsweise mit  $b, b', b''$  multiplicirt und die Producte addirt; auf ähnliche Weise die übrigen. Multiplicirt man die Gleichungen 1. der Reihe nach mit  $a, a', a''$ , und addirt die Producte, und eben so nachher mit  $b, b', b''$ , wieder addirend, u. s. f., so kommt:

$$x = au + a'v + a''w, \quad y = bu + b'v + b''w, \quad z = cu + c'v + c''w, \quad 5.$$

welche Gleichungen man, wie Jeder sieht, auch auf geometrischem Wege durch Projection leicht erhält. Nun sei für die gesuchten Hauptachsen  $x, y, z$ :

$$\left. \begin{aligned} \int x^2 dm &= \xi, & \int y^2 dm &= \eta, & \int z^2 dm &= \zeta \\ \int yz dm &= 0, & \int zx dm &= 0, & \int xy dm &= 0. \end{aligned} \right\} 6.$$

Quadriert man die Werthe von  $u, v, w$  in 2., multiplicirt mit  $dm$ , und integrirt, so folgt mit Rücksicht auf 1. und 6.

$$\left. \begin{aligned} F &= a^2 \xi + b^2 \eta + c^2 \zeta \\ G &= a'^2 \xi + b'^2 \eta + c'^2 \zeta \\ H &= a''^2 \xi + b''^2 \eta + c''^2 \zeta \end{aligned} \right\} 7.$$

Multiplicirt man ferner die Gleichungen 2. zu zweien mit einander, sodann die Producte mit  $dm$ , und integrirt wieder, so folgt ebenfalls aus 1. und 6.

$$\left. \begin{aligned} f &= a'a'' \xi + b'b'' \eta + c'c'' \zeta \\ g &= a''a \xi + b''b \eta + c''c \zeta \\ h &= aa' \xi + bb' \eta + cc' \zeta \end{aligned} \right\} 8.$$

Multiplicirt man die erste der Gleichungen 7. mit  $a$ , die zweite und dritte von 8. mit  $a''$  und  $a'$ , und addirt die Producte, so kommt:

$$aF + a''g + a'h = a\xi, \text{ oder } a(F - \xi) + a'h + a''g = 0.$$

Auf ähnliche Weise ergeben sich überhaupt die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} a(F - \xi) + a'h + a''g &= 0 \\ ah + a'(G - \xi) + a''f &= 0 \\ ag + a'f + a''(H - \xi) &= 0 \end{aligned} \right\} 9.$$

Vertauscht man in denselben  $a, a', a'', \xi$  mit  $b, b', b'', \eta$  und mit  $c, c', c'', \zeta$ , so erhält man noch 6 andere Gleichungen, die ebenfalls richtig sein müssen, deren Hinschreibung aber unnöthig ist. Aus den beiden ersten der Gleichungen 9. folgt:

$$a:a':a'' = fh - g(G - \xi) : hg - f(F - \xi) : (F - \xi)(G - \xi) - h^2,$$

und mithin aus der dritten:

$$(fh - g(G - \xi))g + (hg - f(F - \xi))f + ((F - \xi)(G - \xi) - h^2)(H - \xi) = 0,$$



$$= \frac{3\pi}{16}, \text{ und mithin } \iint y^2 dy dz = \frac{2}{3} b^2 \cdot 2c \cdot \frac{3\pi}{16} = \frac{1}{2} b^2 c \pi$$

also  $\eta = \frac{1}{2} ab^2 c \pi = \frac{1}{4} b^2 V$ , und eben so  $\zeta = \frac{1}{4} c^2 V$ .  
 erhält man:  $A = \frac{1}{4} (b^2 + c^2) m$ ,  $B = (\frac{1}{4} c^2 + \frac{1}{2} a^2) m$ ,  
 $(\frac{1}{4} b^2 + \frac{1}{2} a^2) m$ , wo  $m = \rho V$ .

Der Körper sei ein Ellipsoid,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  die  
 Gleichung seiner Oberfläche; so muß man, um  $\xi$  zu finden,  $x$   
 $y, z$  beziehungsweise zwischen den Grenzen  $\pm a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$   
 $\pm b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$ ,  $\pm c$  integrieren. Hieraus ergibt sich

$$\xi = \frac{2}{3} a^3 \iint \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)^m dy dz,$$

wo wieder zu etwas größerer Allgemeinheit der Exponent  
 anstatt  $\frac{3}{2}$  gesetzt ist. Zur weiteren Integration werde

$$b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \cdot \sin \varphi; \quad dy = b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \cdot \cos \varphi d\varphi \text{ gesetzt}$$

kommt, wenn man noch  $2m$  anstatt  $2m+1$  schreibt:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{8}{3} \cdot a^3 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi^{2m} \cdot d\varphi \int_0^c \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)^m dz \\ &= \frac{2m! \pi \cdot a^3 b c}{3 \cdot m! m! 2^{2m-2}} \int_0^1 (1-u^2)^m du, \end{aligned}$$

wo noch  $z = cu$  gesetzt ist. Um das zuletzt stehende Integral  
 für jeden positiven ganzen Werth von  $m$  zu finden, beachte  
 man, daß

$$\begin{aligned} d((1-u^2)^m u) &= (1-u^2)^m du - 2m(1-u^2)^{m-1} u^2 du \\ &= (1-u^2)^m du + 2m(1-u^2)^m du - 2m(1-u^2)^{m-1} du \end{aligned}$$

$$\text{also: } d((1-u^2)^m u) = (2m+1)(1-u^2)^m du - 2m(1-u^2)^{m-1} du$$

Integriert man auf beiden Seiten von  $u=0$  bis  $u=u$ , so folgt

$$(1-u^2)^m u = 2m+1 \int_0^u (1-u^2)^m du - 2m \int_0^u (1-u^2)^{m-1} du;$$

$$A = \frac{1}{3}(b^2 + c^2)m, \quad B = \frac{1}{3}(c^2 + a^2)m, \quad C = \frac{1}{3}(a^2 + b^2)m.$$

Für einen Würfel werden die Seiten  $2a, 2b, 2c$  einander gleich; mithin auch  $A = B = C = \frac{2}{3}a^2m$ ; daher sind alle durch den Schwerpunkt gehenden Any Hauptachsen (§. 89.). Ist  $a > b > c$ , so ist  $z$  die Any des größten Trägheitsmomentes ( $C$ ) und  $x$  die des kleinsten ( $A$ ).

Der Querschnitt sei elliptisch;  $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  die Gleichung seines Umringes; so ist die Fläche  $\iint dy dz = bc\pi$ , wie bekannt, folglich  $\xi = \frac{1}{3}a^3bc\pi = \frac{1}{3}a^2V$ , wo  $V = 2abc\pi$  das Volumen des Cylinders ist. Ferner ist  $\iint y^2 dy dz = \frac{2}{3}b^3 \int_{-c}^{+c} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} dz$ , nachdem von  $y = -b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$  bis  $y = +b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$  integriert worden. Zur weiteren Integration setze man  $z = c \sin \varphi$ ; auch mag, um der Rechnung etwas mehr Allgemeinheit zu geben,  $n$  anstatt des Exponenten  $\frac{3}{2}$  geschrieben werden; so kommt

$$\int_{-c}^{+c} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)^n dz = 2c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi^{2n+1} d\varphi.$$

In gegenwärtigem Falle ist  $2n+1$  eine positive ganze und gerade Zahl, nämlich 4; schreibt man nun in dem Ausdrucke von  $2^{2m-1} \cos x^{2m}$  (§. 43. I.)  $2m$  anstatt  $m$ , so kommt:

$$2^{2m-1} \cos x^{2m} = \cos 2mx + 2m \cos (2m-2)x + \dots + \frac{1}{2} \frac{2m!}{m! m!}$$

also durch Integration von  $x=0$  bis  $x=\frac{\pi}{2}$ ,  $2^{2m-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^{2m} dx$

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{2m!}{m! m!}, \quad \text{und mithin} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi^{2m} d\varphi = \frac{\pi}{2^{2m+1}} \cdot \frac{2m!}{m! m!};$$

folglich wenn  $2m = 2n+1 = 4$  ist,  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi^4 d\varphi = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}$

80.) eben so erfolgt, als ob die ganze Masse in ihm wäre und alle Kräfte unmittelbar auf ihn wirkten.

Man denke sich drei rechtwinklige, im Raume unter: Augen, bezeichne die Coordinaten von O, nach denselben, =  $\xi, \eta, \zeta$ , und die eines andern Punctes P des Körpers mit  $x', y', z'$ ; so sind  $x' - \xi, y' - \eta, z' - \zeta$  die relativen Coordinaten = gegen O, welche der Kürze wegen mit  $x, y, z$  bezeichnet sollen. Ferner lege man durch O drei gegen einander rechte, in dem Körper feste und mit ihm im Raume bewegliche Augen  $u, v, w$ ; es seien  $a, b, c, \dots$  die mit der Zeit veränderlichen Neigungen derselben gegen die unbeweglichen Augen; ist in jedem Augenblicke zwischen den relativen Coordinaten  $x, y, z$  gegen O in Bezug auf die beweglichen Augen ( $u, v, w$ ) und die unbeweglichen andererseits folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} u &= a x + b y + c z & x &= a u + a' v + a'' w \\ v &= a' x + b' y + c' z & y &= b u + b' v + b'' w \\ w &= a'' x + b'' y + c'' z & z &= c u + c' v + c'' w \end{aligned} \right\} 1$$

$$\left. \begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1 & a'^2 + a'^2 + a''^2 &= 1 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1 & b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1 & c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1 \end{aligned} \right\} 2$$

$$\left. \begin{aligned} a' a'' + b' b'' + c' c'' &= 0 & b c + b' c' + b'' c'' &= 0 \\ a'' a + b'' b + c'' c &= 0 & c a + c' a' + c'' a'' &= 0 \\ a a + b b + c c &= 0 & a b + a' b' + a'' b'' &= 0 \end{aligned} \right\} 3$$

Diese Gleichungen sind hier zur Uebersicht aus §. 33. mit vollständig zusammengestellt. Ferner erinnere man sich noch §. 33., daß die 9 Cosinus  $a, b, \dots c''$  sich als Functionen der Veränderlicher  $\varphi, \psi, \Theta$  darstellen lassen, welche den Bedingungen 2. und 3. Genüge leisten; daher die Lage der Augen  $u, v, w$  durch die Winkel  $\varphi, \psi, \Theta$  bedingt wird, welche Functionen der Zeit bestimmt werden müssen. Auch hat man noch

$$x' = \xi + x, \quad y' = \eta + y, \quad z' = \zeta + z; \quad 4.$$

Die Aufgabe erfordert mithin, außer der Bestimmung  $\varphi, \psi, \Theta$ ,

folglich, da der Ausdruck links für  $u=1$  Null wird:

$$\int_0^1 (1-u^2)^m du = \frac{2m}{2m+1} \int_0^1 (1-u^2)^{m-1} du,$$

mithin auch

$$\int_0^1 (1-u^2)^{m-1} du = \frac{2m-2}{2m-1} \int_0^1 (1-u^2)^{m-2} du, \quad \text{u. s. f.};$$

also 
$$\int_0^1 (1-u^2)^m du = \frac{2m \cdot 2m-2 \cdot 2m-4 \cdots 2}{2m+1 \cdot 2m-1 \cdot 2m-3 \cdots 3}.$$

Für den vorliegenden besonderen Fall ist  $2m=2n+1=4$ ,

daher  $\int_0^1 (1-u^2)^2 du = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3}$  und, nach dem obigen Ausdrucke von  $\xi$ ,

$$\xi = \frac{4! \pi}{3 \cdot 16} \cdot \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} \cdot a^3 bc = \frac{4}{15} a^3 bc \pi = \frac{1}{5} a^2 V,$$

wo  $V = \frac{4}{3} abc \pi$ . Eben so ist  $\eta = \frac{1}{5} b^2 V$ ,  $\zeta = \frac{1}{5} c^2 V$ , und mithin,  $\rho V = m$  gesetzt:

$$A = \frac{1}{5} (b^2 + c^2) m, \quad B = \frac{1}{5} (c^2 + a^2) m, \quad C = \frac{1}{5} (a^2 + b^2) m.$$

Für eine gleichartige Kugel vom Halbmesser  $a$  erhält man hieraus das Trägheitsmoment in Bezug auf einen Durchmesser gleich  $\frac{2}{5} a^2 m$ , wo  $m$  die Masse der Kugel.

### Bewegung fester Körper.

93. Zur Kenntniß der Bewegung eines festen Körpers wird erfordert, daß man erstens die Bewegung eines ihm angehörigen Punctes (derselbe mag  $O$  heißen), und zweitens die relativen Bewegungen der übrigen Puncte in Beziehung auf  $O$ , oder die Drehung des Körpers um  $O$ , anzugeben wisse. Wenn ein Punct des Körpers unbeweglich ist, so fällt, indem man diesen für  $O$  nimmt, der erste Theil der Aufgabe hinweg; wenn aber kein Punct unbeweglich ist, so ist es vortheilhaft, für  $O$  den Schwerpunkt des Körpers zu nehmen, dessen Bewegung (nach §.

$$\left. \begin{aligned} a \, da + b \, db + c \, dc &= 0 \\ a' \, da' + b' \, db' + c' \, dc' &= 0 \\ a'' \, da'' + b'' \, db'' + c'' \, dc'' &= 0 \end{aligned} \right\} 7.$$

so kommt, indem der gemeinsame Nenner  $dt$  als Factor in andere Seite genommen wird:

$$Udt = (a \, da' + b \, db' + c \, dc')v + (a \, da'' + b \, db'' + c \, dc'')w$$

$$Vdt = (a' \, da + b' \, db + c' \, dc)u + (a' \, da'' + b' \, db'' + c' \, dc'')w$$

$$Wdt = (a'' \, da + b'' \, db + c'' \, dc)u + (a'' \, da' + b'' \, db' + c'' \, dc')v$$

Nach 3. aber ist  $a \, da' + b \, db' + c \, dc' + a' \, da + b' \, db + c' \, dc =$   
u. s. f.; man setze daher:

$$\left. \begin{aligned} a \, da' + b \, db' + c \, dc' &= -(a' \, da + b' \, db + c' \, dc) = r \, dt \\ a'' \, da + b'' \, db' + c'' \, dc &= -(a \, da'' + b \, db'' + c \, dc'') = q \, dt \\ a' \, da'' + b' \, db'' + c' \, dc'' &= -(a'' \, da' + b'' \, db'' + c'' \, dc') = p \, dt \end{aligned} \right\}$$

wodurch erhalten wird:

$$U = rv - qw, \quad V = pw - ru, \quad W = qu - pv. \quad 9.$$

Zieht man in dem Körper von  $O$  aus eine gerade Linie, so sind die Gleichungen:

$$\frac{u}{p} = \frac{v}{q} = \frac{w}{r}, \quad 10.$$

so ist nach 9. für alle Punkte derselben  $U=0$ ,  $V=0$ ,  $W=0$ , d. h. die relative Geschwindigkeit aller dieser Punkte gegen  $O$  für den Augenblick  $t$ , ist Null, und mithin ist diese Gerade die augenblickliche Drehungsaxe des Körpers. Aus den Gleichungen 9. geht auch hervor, daß die Geschwindigkeiten  $U$ ,  $V$ ,  $W$  für alle Punkte einer Geraden, die mit der durch Gleichung 10. bestimmten parallel ist, gleich groß sind; denn die Gleichungen einer solchen Geraden sind  $rv - qw = f$ ,  $pw - ru = g$ ,  $qu - pv = h$ , wo  $f$ ,  $g$ ,  $h$  unabhängig von den laufenden Coordinaten  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , aber durch die Bedingung  $fp + gq + hr = 0$  mit einander verbunden sind. Für die Punkte dieser Geraden

durch welche  $x, y, z$  für jeden Punkt des Körpers als Functionen der Zeit bekannt werden, auch noch die von  $\xi, \eta, \zeta$ , wofern  $O$  nicht unbeweglich ist; denn in diesem Falle sind  $\xi, \eta, \zeta$  constant.

Man denke sich die Geschwindigkeit des Punktes  $P$ , zur Zeit  $t$ , nach den Axen  $u, v, w$ , und eben so die von  $O$  nach denselben Axen zerlegt, bezeichne die Componenten der ersten mit  $U', V', W'$ , die der zweiten mit  $U'', V'', W''$  und setze:

$$U = U' - U'', \quad V = V' - V'', \quad W = W' - W''$$

so sind  $U, V, W$  die relativen Geschwindigkeiten von  $P$  gegen  $O$ , nach den Axen  $u, v, w$ . Nach den Richtungen der unbeweglichen Axen aber sind diese relativen Geschwindigkeiten  $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ , und da diese mit den Axen  $u, v, w$  Winkel bilden, deren Cosinus  $a, b, c; a' \dots c''$  sind; so erhält man

$$\left. \begin{aligned} U &= a \frac{dx}{dt} + b \frac{dy}{dt} + c \frac{dz}{dt} \\ V &= a' \frac{dx}{dt} + b' \frac{dy}{dt} + c' \frac{dz}{dt} \\ W &= a'' \frac{dx}{dt} + b'' \frac{dy}{dt} + c'' \frac{dz}{dt} \end{aligned} \right\} 5.$$

Aus 1. folgt aber, indem  $u, v, w$  von  $t$  unabhängig sind:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u \frac{da}{dt} + v \frac{da'}{dt} + w \frac{da''}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= u \frac{db}{dt} + v \frac{db'}{dt} + w \frac{db''}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= u \frac{dc}{dt} + v \frac{dc'}{dt} + w \frac{dc''}{dt} \end{aligned} \right\} 6.$$

Setzt man in 5. vorstehende Werthe von  $\frac{dx}{dt}, \dots$ , noch bemerkend, daß

dem Punkte P (dessen Coordinaten  $u, v, w$  sind) auf die zur  $u$ -Achse gefällte Loth; denn dieses bildet mit den Axen  $v, w$  einen rechtwinkligen Dreieck, dessen Cosinus  $\frac{v}{\sqrt{v^2+w^2}}, \frac{w}{\sqrt{v^2+w^2}}$  sind, woraus seine Behauptete folgt. Da nun das Loth von P auf die  $u$ -Achse die Länge nach, gleich  $\sqrt{v^2+w^2}$  ist, so entspricht die Erddrehung  $p\sqrt{v^2+w^2}$  einer Drehung um  $u$ , mit einer Winkelgeschwindigkeit, deren Größe dem positiven Werthe von  $p$  (oder  $p'$ ) gleich ist. Auch in Beziehung auf den Sinn dieser Drehung um  $u$  findet keine Zweideutigkeit Statt: Denn man betrachtet denjenigen Punkt des Körpers, für welchen  $u=0, v=w=+1$  ist; so sind  $0, p, 0$ , die Componenten der Erddrehung, welche er vermöge der Drehung um  $u$  besitzt, nach den Axen  $u, v, w$ , d. h. dieser Punkt geht (augenblicklich um) vermöge der Drehung um  $u$  in dem Sinne der positiven oder negativen  $v$ , je nachdem  $p$  positiv oder negativ ist. Hier ist aber der Sinn der Drehung völlig bestimmt, da die Axen der positiven Axen  $u, v, w$  in dem Körper von Anfang an festgesetzt sein mußten. Denkt man sich in einem Punkte mit positiver Axe  $u$  ein nach der Ebene  $vw$  hinblickendes Auge, wird für dasselbe, wenn  $p$  positiv ist, die Drehung der  $u$ -Achse in der Ebene  $vw$  in einem gewissen Sinne, z. B. von der  $v$ -Achse zur Rechten, erfolgen; dieser Sinn ist dann der positive. Wenn nun im Folgenden von der Drehung um irgend eine der Axen die Rede ist, so denke man sich diese von O aus immer nach einer Seite fortgehend, die dadurch bestimmt wird, daß die Drehung für ein in der Axe befindliches Auge, welches auf der auf ihr senkrecht durch O gelegten Ebene hinblickt, im positiven Sinne erfolgen soll. Schneidet man noch, wenn mehrere Drehungen zugleich in Betracht kommen, auf der so bestimmten Axe jeder derselben, von O aus, ein ihrer Winkelgeschwindigkeit proportionales Stück ab; so sieht man, daß durch diese Abschnitte der Axen jede Drehung nach allen Beziehungen vollständig dargestellt wird, wie ein Kräftepaar durch seine

wird mithin  $U=f$ ,  $V=g$ ,  $W=h$ ; diese Werthe sind also für alle diese Punkte einerlei, wie auch der Begriff der Drehungsaxe erfordert.

Man lege durch  $O$  eine auf der Drehungsaxe senkrechte Ebene, deren Gleichung mithin ist  $pu+qv+rw=0$ , nehme in derselben einen Punkt in der Einheit der Entfernung von  $O$ , so ist die relative Geschwindigkeit desselben gegen  $O$ :

$$\sqrt{U^2+V^2+W^2}=\sqrt{p^2+q^2+r^2}.$$

Denn es ist nach 9. überhaupt

$$\begin{aligned} U^2+V^2+W^2 &= (rv-qw)^2+(pw-ru)^2+(qu-pv)^2 \\ &= (p^2+q^2+r^2)(u^2+v^2+w^2)-(pu+qv+rw)^2, \end{aligned}$$

welcher Werth für  $pu+qv+rw=0$  und  $u^2+v^2+w^2=1$  in  $p^2+q^2+r^2$  übergeht, und mithin die obige Formel liefert. Diese Geschwindigkeit ist die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit der Drehung, welche hinfort mit  $\omega$  bezeichnet werden soll. Demnach ist

$$\omega=\sqrt{p^2+q^2+r^2}. \quad 11.$$

94. Die Formeln 9. geben jede der Geschwindigkeiten  $U$ ,  $V$ ,  $W$  als zusammengesetzt aus zwei Componenten, z. B.  $U$  aus  $rv$  und  $-qw$ , u. s. w. Diese Componenten der Geschwindigkeit  $\sqrt{U^2+V^2+W^2}$  lassen sich aber noch auf eine andere bemerkenswerthe Weise zu zweien mit einander verbinden. Nämlich man setze  $pw$  mit  $-pv$  zusammen, so erhält man, da die erste dieser Componenten mit  $v$ , die zweite mit  $w$  parallel ist, und beide mithin senkrecht gegen einander sind, eine resultirende Geschwindigkeit, deren Größe gleich  $p'\sqrt{v^2+w^2}$  ist, wo  $p'$  den positiven Werth von  $p$  bedeutet. Die Richtung derselben bildet mit den positiven Axen der  $u$ ,  $v$ ,  $w$  Winkel, deren Cosinus

$$0, \frac{\pm w}{\sqrt{v^2+w^2}}, \frac{\mp v}{\sqrt{v^2+w^2}} \quad \text{sind, wobei die oberen oder unteren}$$

Zeichen gelten, je nachdem  $p$  positiv oder negativ ist; sie ist daher senkrecht nicht allein gegen  $u$ , sondern auch gegen das von



die Diagonale OH (Fig. 42.); so besteht die Bewegung des Körpers in einer Drehung um diese Axe, deren Winkelgeschwindigkeit der Länge von OH proportional ist, und die wieder durch OH dargestellt wird.

Denn man betrachte einen Punkt H dieser Diagonale, seien  $Hl=r$ ,  $Hm=p$  seine senkrechten Abstände von den Axen OK, OK'; so ist bekanntlich  $r \cdot \alpha = p \cdot \beta$ . Zugleich aber  $r\alpha$  die Geschwindigkeit aus, welche H durch die Drehung um OK, so wie  $p\beta$  die, welche H durch die Drehung um OK' erhält; beide sind also einander gleich, ihre Richtungen sind recht auf der Ebene KOK', und einander entgegengesetzt. Die Drehungen um die Axen OK, OK', von K und K' betrachtet, in demselben Sinne erfolgen; folglich bleibt der Punkt H, und mithin überhaupt die Gerade OH in Ruhe, und der Körper muß sich um diese Axe drehen. Um ferner die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung zu finden, errichte man in O die Loth OA auf der Ebene KOK', von der Länge  $=1$ ; es sind AP, AP' die Geschwindigkeiten  $\alpha$  und  $\beta$  dar, welche A durch die Drehungen um OK, OK' beziehungsweise erhält:  $\angle PAP' = \angle KOK'$ , weil AP, AP' gegen OK, OK' beziehungsweise senkrecht sind, und die resultirende Geschwindigkeit ist die Diagonale AR, welche senkrecht auf HO steht; man verhält sich

$$AP : AP' : AR = OK : OK' : OH;$$

also wird die resultirende Drehung um die Axe OH auch die Größe und nicht minder dem Sinne nach durch die Diagonale OH dargestellt; w. z. b. w.

Diese Zusammensetzung der Drehungen vermittelt die Axen muß für beliebig viele Drehungen richtig sein, da sie in zwei gilt; wenn man also auf den Axen u, v, w von O die Winkelgeschwindigkeiten p, q, r mit Rücksicht auf die Zeit aufträgt, und aus diesen Abschnitten das Parallelepipedum rekonstruirt, so stellt die von O ausgehende Diagonale denselben

(§. 15.). In dem vorliegenden Falle fällt also die Axe der Drehung um  $u$  in den positiven oder negativen Theil von  $u$ , je nachdem  $p$  positiv oder negativ ist.

Auf gleiche Weise geben die Componenten  $qu$  und  $-qw$  die Geschwindigkeit  $q\sqrt{u^2+w^2}$ , welche einer Drehung um  $v$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $q$  entspricht, und deren Axe wieder in den positiven oder negativen Theil von  $v$  fällt, je nachdem  $q$  positiv oder negativ ist. Denn es sei z. B.  $q$  positiv, und man betrachte den Punct, dessen Coordinaten  $u=1$ ,  $v=0$ ,  $w=0$  sind, so sind  $0, 0, q$  die Componenten seiner Geschwindigkeit nach  $u, v, w$ , vermöge dieser Drehung um  $v$ ; d. h. der Punct geht (augenblicklich) in der Richtung der positiven  $w$ ; der Sinn dieser Drehung ist aber wieder der einmal als positiv angenommene, wie die Anschauung lehrt. Endlich geben  $rv$  und  $-ru$ , zusammengesetzt, die Geschwindigkeit  $r\sqrt{u^2+v^2}$ , welche einer Drehung um  $w$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $r$  entspricht; und die Axe fällt wieder in den positiven oder negativen Theil von  $w$ , je nachdem  $r$  positiv oder negativ ist.

Folglich kann die Winkelgeschwindigkeit des Körpers  $\omega = \sqrt{p^2+q^2+r^2}$  betrachtet werden als zusammengesetzt aus drei anderen, nämlich  $p, q, r$ , mit welchen der Körper sich gleichzeitig um die Axen  $u, v, w$  dreht, und man bemerkt schon aus dem Ausdrücke für  $\omega$ , in Verbindung mit den Gleichungen (10.) für die augenblickliche Drehungsaxe, daß diese Zusammensetzung sich ganz nach den nämlichen Regeln richtet wie die der Kräftepaare, oder, wenn die Drehungen alle durch ihre Axen auf die angegebene Weise dargestellt werden, nach denselben Regeln, wie die Zusammensetzung der Kräfte.

Wird nämlich ein Körper, auf irgend eine Weise, gleichzeitig zur Drehung um zwei einander in  $O$  schneidende Axen veranlaßt, so nehme man auf diesen Axen zwei den Winkelgeschwindigkeiten  $\alpha, \beta$  proportionale Stücke  $OK = \alpha$ ,  $OK' = \beta$ , jedes von  $P$  aus auf der gehörigen Seite, wie vorhin angegeben ist, vollende aus ihnen das Parallelogramm und ziehe

haupte folgt:

$$\begin{aligned} da &= (a''q - a'r)dt, & da' &= (ar - a''p)dt, & da'' &= (a'p - aq)dt \\ db &= (b''q - b'r)dt, & db' &= (br - b''p)dt, & db'' &= (b'p - bq)dt \\ dc &= (c''q - c'r)dt, & dc' &= (cr - c''p)dt, & dc'' &= (c'p - cq)dt \end{aligned}$$

Diese Werthe in die Gleichungen 6. (§. 93.) gesetzt, geht.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (a''q - a'r)u + (ar - a''p)v + (a'p - aq)w \\ \frac{dy}{dt} &= (b''q - b'r)u + (br - b''p)v + (b'p - bq)w \\ \frac{dz}{dt} &= (c''q - c'r)u + (cr - c''p)v + (c'p - cq)w \end{aligned} \right\} 12.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen bilde man aus 1. (§. 93.) den Ausdruck  $\frac{y dx - x dy}{dt}$ , so wird zunächst das in  $u^2$  multiplicirte Glied dieses Werthes:

$$[(ba'' - ab'')q - (ba' - a'b)r]u^2$$

oder, weil  $ba'' - ab'' = c'$ ,  $ba' - a'b = -c''$  ist (§. 33.)  $(c'q + c''r)u^2$ . Eben so werden die in  $v^2$  und  $w^2$  multiplicirten Glieder beziehungsweise:  $(c''r + cp)v^2$  und  $(cp + c'q)w^2$ , also man erhält:

$$\frac{y dx - x dy}{dt} = (c'q + c''r)u^2 + (c''r + cp)v^2 + (cp + c'q)w^2 +$$

In dieser Formel sind die in  $uv$ ,  $vw$ ,  $wu$  multiplicirten Glieder weggelassen, weil ihre Entwicklung entbehrlich ist. Nimmt man nämlich für  $u$ ,  $v$ ,  $w$  die drei durch  $O$  gehenden Hauptachsen des Körpers, so wird  $\sum uvm = 0$ ,  $\sum vwm = 0$ ,  $\sum wum = 0$  (weil die Masse eines Elementes); multiplicirt man daher die vorstehende Gleichung mit  $m$ , und integrirt in Bezug auf die gesammte Masse des Körpers, so fallen die Glieder, welche vorstehend die Integrale zu Factoren haben, weg, und man erhält:

Richtung der augenblicklichen Drehungsaxe und die Größe, so wie den Sinn der Drehung um diese dar.

Die Winkelgeschwindigkeit derselben ist  $\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ , und nennt man  $(u)$ ,  $(v)$ ,  $(w)$  die Winkel, welche der sie darstellende Theil der Drehungsaxe mit den positiven Theilen von  $u$ ,  $v$ ,  $w$  bildet, so hat man:

$$\cos(u) = \frac{p}{\omega}, \quad \cos(v) = \frac{q}{\omega}, \quad \cos(w) = \frac{r}{\omega}, \quad 12.$$

in welchen Formeln  $\omega$  positiv,  $p$ ,  $q$ ,  $r$  aber mit ihren Zeichen genommen werden müssen. Verlangt man noch die Neigungen dieser Drehungsaxe gegen die unveränderlichen Richtungen  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , so erhält man, dieselben mit  $(x)$ ,  $(y)$ ,  $(z)$  bezeichnend:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= a \cos(u) + a' \cos(v) + a'' \cos(w) \\ \cos(y) &= b \cos(u) + b' \cos(v) + b'' \cos(w) \\ \cos(z) &= c \cos(u) + c' \cos(v) + c'' \cos(w) \end{aligned}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \cos(x) &= \frac{ap + a'q + a''r}{\omega} \\ \cos(y) &= \frac{bp + b'q + b''r}{\omega} \\ \cos(z) &= \frac{cp + c'q + c''r}{\omega} \end{aligned} \right\} 13.$$

95. Man hat nach §. 93.

$$\begin{aligned} a \, da + b \, db + c \, dc &= 0 \\ a' \, da + b' \, db + c' \, dc &= -r \, dt \\ a'' \, da + b'' \, db + c'' \, dc &= q \, dt. \end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit  $a$ ,  $a'$ ,  $a''$  und addirt die Producte, so kommt  $da = (a''q - a'r)dt$ . Multipliziert man auf gleiche Weise mit  $b$ ,  $b'$ ,  $b''$ , und addirt, so kommt  $db = (b''q - b'r)dt$ , und durch Multiplication mit  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$ ,  $dc = (c''q - c'r)dt$ .

Ähnliche Ausdrücke erhält man für  $da'$ ,  $db'$  ..., und über:

Ebene  $xy$  wirkenden Paars sind; also folgt sofort:

$$\Sigma \left( \frac{y dx - x dy}{dt} \right) m = Acp + Bc'q + Cc''r,$$

wie vorhin, und eben so folgen die übrigen Gleichungen 16.

96. Es ist noch übrig, den Zusammenhang zwischen Größen  $p, q, r$  und den Winkeln  $\varphi, \psi, \Theta$ , von welchen Cosinus  $a, \dots c''$  Functionen sind, genauer zu entwickeln. §. 33. ist:

$$a = \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \cos \Theta,$$

$$a' = -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \Theta,$$

$$a'' = -\sin \psi \sin \Theta,$$

$$b = -\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \Theta,$$

$$b' = \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \Theta,$$

$$b'' = -\cos \psi \sin \Theta.$$

$$c = \sin \varphi \sin \Theta, \quad c' = \cos \varphi \sin \Theta, \quad c'' = \cos \Theta.$$

Hieraus folgt durch Differentiation:

$$da = a' d\varphi + b d\psi - c \sin \psi d\Theta$$

$$db = b' d\varphi - a d\psi - c \cos \psi d\Theta$$

$$dc = c' d\varphi + c'' \sin \varphi d\Theta$$

$$da' = -a d\varphi + b' d\psi - c' \sin \psi d\Theta$$

$$db' = -b d\varphi - a' d\psi - c' \cos \psi d\Theta$$

$$dc' = -c d\varphi + c'' \cos \varphi d\Theta$$

$$da'' = b'' d\psi - c'' \sin \psi d\Theta$$

$$db'' = -a'' d\psi - c'' \cos \psi d\Theta$$

$$dc'' = -\sin \Theta d\Theta.$$

Die Werthe von  $da', db', dc'$  erhält man aus denen von  $da, db, dc$  sofort, wenn man in jenen  $\varphi + \frac{1}{2}\pi$  anstatt  $\varphi$  setzt. Denn dadurch verwandeln sich  $a, b, c, a', b', c'$  beziehungsweise in  $a', b', c', -a, -b, -c$ , woraus das Behauptete folgt. Multiplicirt man die drei ersten dieser Gleichungen der Art

folglich, da der Ausdruck links für  $u=1$  Null wird:

$$\int_0^1 (1-u^2)^m du = \frac{2m}{2m+1} \int_0^1 (1-u^2)^{m-1} du,$$

mithin auch

$$\int_0^1 (1-u^2)^{m-1} du = \frac{2m-2}{2m-1} \int_0^1 (1-u^2)^{m-2} du, \quad \text{u. s. f.};$$

also 
$$\int_0^1 (1-u^2)^m du = \frac{2m \cdot 2m-2 \cdot 2m-4 \dots 2}{2m+1 \cdot 2m-1 \cdot 2m-3 \dots 3}.$$

Für den vorliegenden besonderen Fall ist  $2m=2n+1=4$ ,  
daher  $\int_0^1 (1-u^2)^2 du = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3}$  und, nach dem obigen Aus-  
drucke von  $\xi$ ,

$$\xi = \frac{4! \pi}{3 \cdot 16} \cdot \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} \cdot a^3 bc = \frac{4}{15} a^3 bc \pi = \frac{1}{5} a^3 V,$$

wo  $V = \frac{4}{3} abc \pi$ . Eben so ist  $\eta = \frac{1}{5} b^3 V$ ,  $\zeta = \frac{1}{5} c^3 V$ , und  
mithin,  $\rho V = m$  gesetzt:

$$A = \frac{1}{5} (b^2 + c^2) m, \quad B = \frac{1}{5} (c^2 + a^2) m, \quad C = \frac{1}{5} (a^2 + b^2) m.$$

Für eine gleichartige Kugel vom Halbmesser  $a$  erhält man hier-  
aus das Trägheitsmoment in Bezug auf einen Durchmesser gleich  
 $\frac{2}{5} a^2 m$ , wo  $m$  die Masse der Kugel.

### Bewegung fester Körper.

93. Zur Kenntniß der Bewegung eines festen Körpers wird  
erfordert, daß man erstens die Bewegung eines ihm angehörigen  
Punctes (derselbe mag  $O$  heißen), und zweitens die relativen Be-  
wegungen der übrigen Puncte in Beziehung auf  $O$ , oder die  
Drehung des Körpers um  $O$ , anzugeben wisse. Wenn ein  
Punct des Körpers unbeweglich ist, so fällt, indem man diesen  
für  $O$  nimmt, der erste Theil der Aufgabe hinweg; wenn aber  
kein Punct unbeweglich ist, so ist es vortheilhaft, für  $O$  den  
Schwerpunkt des Körper zu nehmen, dessen Bewegung (nach §.

Reihe nach folgende Fälle in Betracht gezogen werden: erstens die freie Bewegung, zweitens die Drehung um einen Punkt, drittens die Bewegung auf einer festen Ebene.

### Freie Bewegung fester Körper.

97. In §. 80. sind sechs Gleichungen entwickelt worden (nämlich S. 248. Z. 7. und S. 249. Z. 16—18.), welche die Bewegung jedes freien Systemes gelten, bei einem festen Punkte zugleich zur Bestimmung derselben hinreichen. Sie drücken nichts Anderes aus, als daß die Resultante und das zusammengesetzte Paar der verlorenen Kräfte, in jedem Augenblicke Null ist, oder um sie auf eine ihrer Form noch genauer angemessene Weise auszusprechen, daß die Resultante aller Beschleunigungsmomente derjenigen aller beschleunigenden Kräfte, und das zugehörige Moment von jenen dem von diesen in jedem Augenblicke der Bewegung gänzlich gleich ist. Für die gegenwärtige Anwendung ist es angemessen, sich alle diese Beschleunigungsmomente und die beschleunigenden Kräfte am Schwerpunkte des Körpers in ihren Richtungen und in den entgegengesetzten angebracht vorzustellen, und mithin die genannten Paare sogleich in Bezug auf diesen Punkt zu bilden.

Es seien, wie in §. 93.,  $\xi, \eta, \zeta$  die Coordinaten des Schwerpunktes (O),  $x', y', z'$  die eines Elementes  $m$  des Körpers, mithin  $x = x' - \xi, y = y' - \eta, z = z' - \zeta$  die relativen Coordinaten von  $m$  gegen O, sämmtlich parallel dreien rechtwinkligen Axen feste Augen, und  $X, Y, Z$  die Componenten der auf  $m$  wirkenden beschleunigenden Kraft; so hat man  $\sum m \frac{d^2 x'}{dt^2} = \sum X$  u. s. f., oder weil  $\sum m x' = \xi \sum m$ ,

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} \sum m = \sum X, \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} \sum m = \sum Y, \quad \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \sum m = \sum Z, \quad 1.$$

wie in §. 80. Ferner sind  $\sum m \left( \frac{y d^2 x' - x d^2 y'}{dt^2} \right)$

durch welche  $x, y, z$  für jeden Punkt des Körpers als Functionen der Zeit bekannt werden, auch noch die von  $\xi, \eta, \zeta$ , wofern  $O$  nicht unbeweglich ist; denn in diesem Falle sind  $\xi, \eta, \zeta$  constant.

Man denke sich die Geschwindigkeit des Punctes  $P$ , zur Zeit  $t$ , nach den Axen  $u, v, w$ , und eben so die von  $O$  nach denselben Axen zerlegt, bezeichne die Componenten der ersten mit  $U', V', W'$ , die der zweiten mit  $U'', V'', W''$  und setze:

$$U = U' - U'', \quad V = V' - V'', \quad W = W' - W''$$

so sind  $U, V, W$  die relativen Geschwindigkeiten von  $P$  gegen  $O$ , nach den Axen  $u, v, w$ . Nach den Richtungen der unbeweglichen Axen aber sind diese relativen Geschwindigkeiten  $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ , und da diese mit den Axen  $u, v, w$  Winkel bilden, deren Cosinus  $a, b, c; a' \dots c''$  sind; so erhält man

$$\left. \begin{aligned} U &= a \frac{dx}{dt} + b \frac{dy}{dt} + c \frac{dz}{dt} \\ V &= a' \frac{dx}{dt} + b' \frac{dy}{dt} + c' \frac{dz}{dt} \\ W &= a'' \frac{dx}{dt} + b'' \frac{dy}{dt} + c'' \frac{dz}{dt} \end{aligned} \right\} 5.$$

Aus 1. folgt aber, indem  $u, v, w$  von  $t$  unabhängig sind:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u \frac{da}{dt} + v \frac{da'}{dt} + w \frac{da''}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= u \frac{db}{dt} + v \frac{db'}{dt} + w \frac{db''}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= u \frac{dc}{dt} + v \frac{dc'}{dt} + w \frac{dc''}{dt} \end{aligned} \right\} 6.$$

Setzt man in 5. vorstehende Werthe von  $\frac{dx}{dt}, \dots$ , noch bemerkend, daß



$a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ,  $aa' + bb' + cc' = 0$ ,  $aa'' + bb'' + cc'' = 0$   
so kommt:

$$A dp + (B - C)qr dt = (La + Mb + Nc)dt.$$

Multipliziert man auf gleiche Weise mit  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ , und mit  $a''$ ,  $b''$ ,  $c''$ , und addirt jedesmal die Producte, so erhält man zwei ähnliche Gleichungen, die sich jedoch auch ohne neue Annahme schon aus der vorhergehenden durch gehörige Vertauschung der Buchstaben ergeben müssen. Also folgt aus 3.

$$\left. \begin{aligned} A dp + (B - C)qr dt &= (La + Mb + Nc)dt \\ B dq + (C - A)rp dt &= (La' + Mb' + Nc')dt \\ C dr + (A - B)pq dt &= (La'' + Mb'' + Nc'')dt \end{aligned} \right\} 4$$

In diese Gleichungen (oder auch in die vorhergehenden) kann man für  $p$ ,  $q$ ,  $r$  ihre Werthe aus §. 96. (Formeln 1. und 2.) und zugleich für die Cosinus  $a$ ,  $b$ , ...  $c''$ , die ihnen gleiche Functionen von  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\Theta$  setzen. Da die Kräfte  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  und Momente  $Xy - Yx$ , u. s. f. Functionen von  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  sind, und da sich  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (nach 93. 1.) als Functionen von  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\Theta$  ausdrücken lassen (denn  $u$ ,  $v$ ,  $w$  sind für jeden Theil des Körpers unveränderlich, oder von der Zeit unabhängig, und kommen daher bloß als Constanten in Betracht); so sind  $\Sigma X$ ,  $\Sigma Y$ ,  $\Sigma Z$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  Functionen von  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\Theta$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , und etwa auch noch die Zeit  $t$  enthalten können. Aus dieser Ansicht geht hervor, daß die sechs Gleichungen 1. und 4. gerade erforderlich und hinreichend sind, um die sechs Unbekannten  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\Theta$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  als Functionen der Zeit zu bestimmen, was der Zweck der Aufgabe besteht. Diese sechs Differentialgleichungen sind sämtlich zweiter Ordnung; ihre Integration führt hin 12 Constanten herbei, welche z. B. bestimmt werden können, wenn die Werthe der sechs Größen  $\varphi$ , ...  $\zeta$  und die ihrer Ableitungen nach  $t$ , für einen gegebenen Augenblick bekannt sind, d. h. wenn man die Stellung des Körpers und seine Geschwindigkeit, wohl in Hinsicht der Bewegung des Schwerpunktes als

$$\left. \begin{aligned} \int x^2 dm &= \xi, & \int y^2 dm &= \eta, & \int z^2 dm &= \zeta \\ \int yz dm &= 0, & \int zx dm &= 0, & \int xy dm &= 0. \end{aligned} \right\} 6.$$

Quadriert man die Werthe von  $u, v, w$  in 2., multiplicirt mit  $dm$ , und integrirt, so folgt mit Rücksicht auf 1. und 6.

$$\left. \begin{aligned} F &= a^2 \xi + b^2 \eta + c^2 \zeta \\ G &= a'^2 \xi + b'^2 \eta + c'^2 \zeta \\ H &= a''^2 \xi + b''^2 \eta + c''^2 \zeta \end{aligned} \right\} 7.$$

Multiplicirt man ferner die Gleichungen 2. zu zweien mit einander, sodann die Producte mit  $dm$ , und integrirt wieder, so folgt ebenfalls aus 1. und 6.

$$\left. \begin{aligned} f &= a'a'' \xi + b'b'' \eta + c'c'' \zeta \\ g &= a''a \xi + b''b \eta + c''c \zeta \\ h &= aa' \xi + bb' \eta + cc' \zeta \end{aligned} \right\} 8.$$

Multiplicirt man die erste der Gleichungen 7. mit  $a$ , die zweite und dritte von 8. mit  $a''$  und  $a'$ , und addirt die Producte, so kommt:

$$aF + a''g + a'h = a\xi, \text{ oder } a(F - \xi) + a'h + a''g = 0.$$

Auf ähnliche Weise ergeben sich überhaupt die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} a(F - \xi) + a'h + a''g &= 0 \\ ah + a'(G - \xi) + a''f &= 0 \\ ag + a'f + a''(H - \xi) &= 0 \end{aligned} \right\} 9.$$

Vertauscht man in denselben  $a, a', a'', \xi$  mit  $b, b', b'', \eta$  und mit  $c, c', c'', \zeta$ , so erhält man noch 6 andere Gleichungen, die ebenfalls richtig sein müssen, deren Hinschreibung aber unnöthig ist. Aus den beiden ersten der Gleichungen 9. folgt:

$$a:a':a'' = fh - g(G - \xi) : hg - f(F - \xi) : (F - \xi)G - \xi - h^2,$$

und mithin aus der dritten:

$$(fh - g(G - \xi))g + (hg - f(F - \xi))f + ((F - \xi)(G - \xi) - h^2)(H - \xi) = 0,$$

Druckes oder des Widerstandes  $-II$  von folgenden Gleichungen ab, die sogleich ergeben, wenn man bedenkt, daß dieser Zustand den verlorenen Kräften Gleichgewicht halten muß:

$$\Sigma X - \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} - II \cos \lambda = 0, \quad \Sigma Y - \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} - II \cos \mu = 0,$$

$$\Sigma Z - \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} - II \cos \nu = 0.$$

Diese Formeln treten hier an die Stelle der Gleichungen 1. des vorigen §. Zur Bestimmung der Drehung des Körpers dienen die Gleichungen 2. des vorigen §., von welchen 3. weitere Transformationen sind. Es soll nun zunächst die einfachste der hierher gehörigen Fälle entwickelt werden, der Statt findet, wenn keine beschleunigenden Kräfte vorhanden sind. Alsdann ist erstens das zusammengesetzte Paar der Bewegungsmomente, gebildet in Bezug auf den festen Punkt  $O$  (s. hinfür das Paar  $Q$  heißen), nach Ebene und Größe, und zweitens die lebendige Kraft des Körpers, für alle Zeiten unveränderlich. Der erste dieser Sätze folgt, weil einerseits die beschleunigenden Kräfte Null sind, zugleich aber auch das Moment des Widerstandes  $II$  in Beziehung auf den Punkt  $O$  Null ist, da die Richtung von  $II$  durch  $O$  geht; daher ist das zusammengesetzte Paar der Beschleunigungsmomente, gebildet in Bezug auf  $O$ , beständig Null, und mithin das der Bewegungsmomente constant. Daß ferner die lebendige Kraft unveränderlich ist, ist aus dem allgemeinen Satze der lebendigen Kräfte (§. 81.)

Setzt man, für den vorliegenden Fall, in den Gleichungen 4. des vorigen §.  $L=0$ ,  $M=0$ ,  $N=0$ , so kommt:

$$\left. \begin{aligned} A dp + (B-C)qr dt &= 0 \\ B dq + (C-A)rp dt &= 0 \\ C dr + (A-B)pq dt &= 0 \end{aligned} \right\} 1.$$

Ferner lassen sich die Gleichungen 3., in welchen  $L=0$ , fort integrieren; sie geben

92. Wenn die Trägheitsmomente  $A, B, C$  des Körpers für die durch den Schwerpunkt gehenden Hauptaxen bekannt sind, so ergibt sich dasjenige für irgend eine andere Axe  $H$  mit Hülfe der in §. 83. und 88. enthaltenen Sätze sehr leicht. Denn man lege durch den Schwerpunkt eine der  $H$  parallele Axe  $H'$ , und es sei  $D'$  das ihr zukommende Trägheitsmoment; so erhält man, nach §. 88.

$$D' = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma,$$

wo  $\alpha, \beta, \gamma$  die Neigungen von  $H$  oder  $H'$  gegen die Hauptaxen  $x, y, z$  sind. Bezeichnet man ferner mit  $a$  den senkrechten Abstand der Axen  $H$  und  $H'$  von einander, und das zu  $H$  gehörige Trägheitsmoment mit  $D$ , die Masse des Körpers mit  $m$ , so ist, nach dem Satze in §. 83.,

$$D = D' + a^2 m.$$

Diese beiden Formeln geben den Werth von  $D$  sehr leicht, wenn  $A, B, C$  bekannt sind, auf deren Bestimmung es mithin hauptsächlich ankommt.

Man bezeichne das Volumen eines nach allen Dimensionen unendlich kleinen Elementes des Körpers mit  $dv$ , so muß die Masse dm desselben sich durch ein Product  $\rho dv$  ausdrücken lassen, in welchem der Coefficient  $\rho$  entweder eine beständige Größe oder irgend eine Function der Coordinaten des Elementes ist, je nachdem die Masse in dem Körper gleichmäßig vertheilt ist oder nicht. Dieser Coefficient heißt die Dichtigkeit. Setzt man  $dv = dx dy dz$ , so werden demnach die Trägheitsmomente für die drei Axen  $x, y, z$  beziehungsweise durch folgende Integrale ausgedrückt:

$$\iiint (y^2 + z^2) \rho dx dy dz, \quad \iiint (z^2 + x^2) \rho dx dy dz, \\ \iiint (x^2 + y^2) \rho dx dy dz,$$

welche sich nach den bekannten Regeln finden lassen, wenn die Dichtigkeit  $\rho$  als Functionen  $x, y, z$  gegeben ist. In den folgenden Beispielen wird es genügen, nur gleichartige Körper zu betrachten.

2.  $l=0$ ,  $r=0$ , und  $l=k$ , wo  $k$  die Intensität des  $l$ . Q oder die Größe seiner Axe vorstellt, und positiv  $u$  durch werden die Gleichungen 1. folgende:

$$Aap + Ba'q + Ca''r = 0$$

$$Abp + Bb'q + Cb''r = 0$$

$$Acp + Bc'q + Cc''r = k.$$

Diese Gleichungen multiplicire man der Reihe nach mit  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , dann mit  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ , endlich mit  $a''$ ,  $b''$ ,  $c''$ , und jedesmal die Producte, so kommt

$$Ap = ck, Bq = c'k, Cr = c''k. \quad 5.$$

Offenbar sind  $ck$ ,  $c'k$ ,  $c''k$  nichts Anderes als die Constanten des Paares  $Q$ , nach den auf  $u$ ,  $v$ ,  $w$  beziehungsweise gerichteten Ebenen; daß diese sich aber auch durch  $Ap$ ,  $Bq$ ,  $Cr$  ausdrücken lassen, ist schon in §. 95. (17.) bemerkt worden. Wenn man sich das Paar  $Q$  gegeben, und zugleich die Richtung der Hauptachsen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  gegen die Axe desselben in irgend einem Augenblicke bekannt; so erhält man aus vorstehenden Gleichungen die Werthe von  $p$ ,  $q$ ,  $r$  für diesen Augenblick, wodurch die Constante  $h$  in 4. bestimmt wird. Die ferneren Veränderungen der Werthe von  $p$ ,  $q$ ,  $r$  richten sich nun nach den Gleichungen 1.

Indem der Körper sich dreht, erleidet die augenblickliche Drehungsaxe (sie heiße  $u'$ ), oder diejenige Gerade in dem Körper, deren Geschwindigkeit zur Zeit  $t$  Null ist, durch die Wirkung der Schwingkräfte einen gewissen Druck, der sich als eine einzelne Kraft an dem festen Punkte  $O$  und ein Paar vorstellen läßt. Dieses Paar kann nie Null sein, wenn nicht die Drehungsaxe gerade eine Hauptaxe ist; folglich erhält, mit Ausnahme dieses besonderen Falles, die Gerade, welche zur Zeit die Drehungsaxe ist, in dem folgenden Zeitelemente eine unendlich kleine Geschwindigkeit, und hört damit auf Drehungsaxe zu sein, während nunmehr eine andere in dem Körper herrscht.

$$A = \frac{1}{3}(b^2 + c^2)m, \quad B = \frac{1}{3}(c^2 + a^2)m, \quad C = \frac{1}{3}(a^2 + b^2)m.$$

Für einen Würfel werden die Seiten  $2a, 2b, 2c$  einander gleich; mithin auch  $A = B = C = \frac{2}{3}a^2m$ ; daher sind alle durch den Schwerpunkt gehenden Azen Hauptaxen (§. 89.). Ist  $a > b > c$ , so ist  $z$  die Aze des größten Trägheitsmomentes ( $C$ ) und  $x$  die des kleinsten ( $A$ ).

Der Querschnitt sei elliptisch;  $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  die Gleichung seines Umringes; so ist die Fläche  $\iint dy dz = bc\pi$ , wie bekannt, folglich  $\xi = \frac{1}{3}a^3bc\pi = \frac{1}{3}a^2V$ , wo  $V = 2abc\pi$  das Volumen des Cylinders ist. Ferner ist  $\iint y^2 dy dz = \frac{2}{3}b^3 \int_{-c}^{+c} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} dz$ , nachdem von  $y = -b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$  bis  $y = +b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$  integriert worden. Zur weiteren Integration setze man  $z = c \sin \varphi$ ; auch mag, um der Rechnung etwas mehr Allgemeinheit zu geben,  $n$  anstatt des Exponenten  $\frac{3}{2}$  geschrieben werden; so kommt

$$\int_{-c}^{+c} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)^n dz = 2c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi^{2n+1} d\varphi.$$

In gegenwärtigem Falle ist  $2n+1$  eine positive ganze und gerade Zahl, nämlich 4; schreibt man nun in dem Ausdrucke von  $2^{m-1} \cos x^m$  (§. 43. I.)  $2m$  anstatt  $m$ , so kommt:

$$2^{2m-1} \cos x^{2m} = \cos 2mx + 2m \cos (2m-2)x + \dots + \frac{1}{2} \frac{2m!}{m! m!}$$

also durch Integration von  $x=0$  bis  $x=\frac{\pi}{2}$ ,  $2^{2m-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^{2m} dx$

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{2m!}{m! m!}, \quad \text{und mithin} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi^{2m} d\varphi = \frac{\pi}{2^{2m+1}} \cdot \frac{2m!}{m! m!};$$

folglich wenn  $2m = 2n+1 = 4$  ist,  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi^4 d\varphi = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}$

res  $S$  bleibt daher immer in der Ebene  $xy$  (d. i. in der Ebene des Paares  $Q$ ), und die Ebene von  $S$  ist immer die Ebene  $xy$ .

Aus 6. erhält man, mit Hülfe der Gleichungen 5.  $k\omega \cos i = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$ , also nach 4.

$$k\omega \cos i = h^2, \quad 8.$$

d. h. zerlegt man die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , deren Axe  $u$  (auf die in §. 94. angegebene Weise) nach den Axen  $x, y$ , so ist die der Axe  $z$  entsprechende Componente unveränderlich; dieselbe ist nämlich  $\omega \cos i$ , mithin nach 8. gleich  $\frac{h^2}{k}$ . Also bleibt

die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher der Körper sich um die Axe des Paares  $Q$  dreht, fortwährend sich gleich.

99. Es dürfte nicht überflüssig sein, zu zeigen, wie diese Sätze auch auf sehr einfache Weise aus anderen Betrachtungen ergeben. Es sei  $z$ , wie bisher, die Axe des unveränderlichen Paares  $Q$ ,  $u'$  die augenblickliche Drehungsaxe,  $i$  die Abweichung von  $u'$  gegen  $z$ ; ferner sei  $v'$  senkrecht auf  $u'$  in der Ebene  $xy$ ; so kann man das Paar  $Q$ , dessen Moment  $k$  genannt werden ist, in zwei andere zerlegen, deren Axen beziehungsweise  $u' = v'$ , und deren Momente mithin  $k \cos i$  und  $k \sin i$  sind.

Nimmt man noch  $w'$  senkrecht auf  $u'$  und  $v'$ , und ist  $\rho = \sqrt{v'^2 + w'^2}$ , so ist offenbar  $\rho \omega m$  das Bewegungsmoment des körperlichen Elementes  $m$ . Man zerlege dasselbe nach den Axen  $u', v', w'$  in die Componenten  $U, V, W$ , so hat man:  $U = 0, V = w' \omega m, W = -v' \omega m$ , weil  $\frac{w'}{\rho}, -\frac{v'}{\rho}$  die Cosinus des Winkels sind, welche die Richtung der auf  $\rho$  senkrechten Kraft  $\rho \omega m$  mit den Axen  $v', w'$  bildet; folglich erhält man, wenn von der anderen Seite das Paar  $Q$  in die Componenten  $k \cos i, k \sin i, 0$  zerlegt ist, deren Axen beziehungsweise  $u', v', w'$  sind:

$$\begin{aligned} \Sigma(Vw' - Wv') &= \omega \Sigma m(w'^2 + v'^2) = k \cos i \\ \Sigma(Wu' - Uw') &= -\omega \Sigma u'v'm = k \sin i \\ \Sigma(Uv' - Vu') &= -\omega \Sigma u'w'm = 0. \end{aligned}$$

ist aber  $\Sigma(v'^2 + w'^2)m$  das Trägheitsmoment des Körpers, für die Drehungsaxe  $u'$ , mithin  $\frac{1}{2}\omega^2 \Sigma(v'^2 + w'^2)m$  nichts anderes als seine lebendige Kraft, welche constant und mit  $\frac{1}{2}h^2$  bezeichnet worden ist; die erste dieser Gleichungen giebt daher sofort  $\omega k \cos i = h^2$ , wie Formel 8. des vorigen §.

Ferner sind, nach §. 90. die Componenten des Paares der Schwungkräfte, in den Ebenen  $u'v'$  und  $u'w'$ , beziehungsweise  $\omega^2 \Sigma u'v'm$  und  $\omega^2 \Sigma u'w'm$ ; die zweite derselben ist, nach den letzten obigen Gleichungen, Null, und die erste gleich  $\omega k \sin i$ ; das Paar der Schwungkräfte fällt also in die Ebene der  $z, u'$ , d. h. in die Ebene der Drehungsaxe und der Axe von  $Q$ , und sein Moment ist  $\omega k \sin i$ ; w. z. b. w.

Hier noch einige weitere Bemerkungen. Die Lage der augenblicklichen Drehungsaxe in dem Körper hängt bekanntlich von folgenden Gleichungen ab:  $\frac{u}{p} = \frac{v}{q} = \frac{w}{r}$ . Eliminirt man aus diesen, in Verbindung mit denen unter 3. und 4. im vorigen §., die Größen  $p, q, r$ ; so erhält man die Regelfläche, welche die Drehungsaxe in dem Körper beschreibt. Ihre Gleichung erzieht sich wie folgt:

$$A(k^2 - Ah^2)u^2 + B(k^2 - Bh^2)v^2 + C(k^2 - Ch^2)w^2 = 0.$$

Dieser Regel ist mithin zweiten Grades. Aus den Gleichungen 3. und 4. in §. 98. erhält man noch:

$$k^2 - Ah^2 = -Bq^2(A - B) - Cr^2(A - C),$$

$$k^2 - Ch^2 = Cp^2(A - C) + Bq^2(B - C).$$

Da nun  $A > B > C$ , so folgt hieraus, daß  $k^2 - Ah^2$  negativ,  $k^2 - Ch^2$  aber positiv ist. Auch kann keiner dieser Ausdrücke Null sein, wenn nicht  $A = B = C$ ; dieser besondere Fall, in welchem jede Drehungsaxe eine Hauptaxe ist und unbeweglich bleibt, kann hier ganz ausgeschlossen werden. Die Axe des obigen Regels ist entweder  $u$  oder  $w$ , d. h. entweder die Axe des größten oder die des kleinsten Trägheitsmomentes, je nachdem  $k^2 - Bh^2$  positiv oder negativ ist.



80.) eben so erfolgt, als ob die ganze Masse in ihm vereinigt wäre und alle Kräfte unmittelbar auf ihn wirkten.

Man denke sich drei rechtwinkliche, im Raume unbewegliche Axen, bezeichne die Coordinaten von O, nach denselben, mit  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , und die eines andern Punctes P des Körpers mit  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ; so sind  $x' - \xi$ ,  $y' - \eta$ ,  $z' - \zeta$  die relativen Coordinaten von P gegen O, welche der Kürze wegen mit  $x$ ,  $y$ ,  $z$  bezeichnet werden sollen. Ferner lege man durch O drei gegen einander senkrechte, in dem Körper feste und mit ihm im Raume bewegliche Axen  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ; es seien  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ... die mit der Zeit veränderlichen Neigungen derselben gegen die unbeweglichen Axen; so finden in jedem Augenblicke zwischen den relativen Coordinaten von P gegen O in Bezug auf die beweglichen Axen ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) einerseits und die unbeweglichen andererseits folgende Gleichungen Statt:

$$\begin{array}{ll}
 u = a x + b y + c z & x = a u + a' v + a'' w \\
 v = a' x + b' y + c' z & y = b u + b' v + b'' w \\
 w = a'' x + b'' y + c'' z & z = c u + c' v + c'' w
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} u = a x + b y + c z \\ v = a' x + b' y + c' z \\ w = a'' x + b'' y + c'' z \end{array}} \right\} 1.$$

$$\begin{array}{ll}
 a^2 + b^2 + c^2 = 1 & a'^2 + a''^2 + a'''^2 = 1 \\
 a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 & b'^2 + b''^2 + b'''^2 = 1 \\
 a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1 & c'^2 + c''^2 + c'''^2 = 1
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1 \end{array}} \right\} 2.$$

$$\begin{array}{ll}
 a' a'' + b' b'' + c' c'' = 0 & b c + b' c' + b'' c'' = 0 \\
 a'' a + b'' b + c'' c = 0 & c a + c' a' + c'' a'' = 0 \\
 a a + b b + c c = 0 & a b + a' b' + a'' b'' = 0
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} a' a'' + b' b'' + c' c'' = 0 \\ a'' a + b'' b + c'' c = 0 \\ a a + b b + c c = 0 \end{array}} \right\} 3.$$

Diese Gleichungen sind hier zur Uebersicht aus §. 33. und 91. vollständig zusammengestellt. Ferner erinnere man sich noch aus §. 33., daß die 9 Cosinus  $a$ ,  $b$ , ...  $c''$  sich als Functionen dreier Veränderlicher  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\Theta$  darstellen lassen, welche den Bedingungengleichungen 2. und 3. Genüge leisten; daher die Lage der Axen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  durch die Winkel  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\Theta$  bedingt wird, welche als Functionen der Zeit bestimmt werden müssen. Auch hat man noch

$$x' = \xi + x, \quad y' = \eta + y, \quad z' = \zeta + z; \quad 4.$$

Die Aufgabe erfordert mithin, außer der Bestimmung  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\Theta$ ,

durch welche  $x, y, z$  für jeden Punkt des Körpers als Functionen der Zeit bekannt werden, auch noch die von  $\xi, \eta, \zeta$ , wofern  $O$  nicht unbeweglich ist; denn in diesem Falle sind  $\xi, \eta, \zeta$  constant.

Man denke sich die Geschwindigkeit des Punktes  $P$ , zur Zeit  $t$ , nach den Axen  $u, v, w$ , und eben so die von  $O$  nach denselben Axen zerlegt, bezeichne die Componenten der ersten mit  $U', V', W'$ , die der zweiten mit  $U'', V'', W''$  und setze:

$$U = U' - U'', \quad V = V' - V'', \quad W = W' - W''$$

so sind  $U, V, W$  die relativen Geschwindigkeiten von  $P$  gegen  $O$ , nach den Axen  $u, v, w$ . Nach den Richtungen der unbeweglichen Axen aber sind diese relativen Geschwindigkeiten  $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ , und da diese mit den Axen  $u, v, w$  Winkel bilden, deren Cosinus  $a, b, c; a' \dots c''$  sind; so erhält man

$$\left. \begin{aligned} U &= a \frac{dx}{dt} + b \frac{dy}{dt} + c \frac{dz}{dt} \\ V &= a' \frac{dx}{dt} + b' \frac{dy}{dt} + c' \frac{dz}{dt} \\ W &= a'' \frac{dx}{dt} + b'' \frac{dy}{dt} + c'' \frac{dz}{dt} \end{aligned} \right\} 5.$$

Aus 1. folgt aber, indem  $u, v, w$  von  $t$  unabhängig sind:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u \frac{da}{dt} + v \frac{da'}{dt} + w \frac{da''}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= u \frac{db}{dt} + v \frac{db'}{dt} + w \frac{db''}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= u \frac{dc}{dt} + v \frac{dc'}{dt} + w \frac{dc''}{dt} \end{aligned} \right\} 6.$$

Setzt man in 5. vorstehende Werthe von  $\frac{dx}{dt}, \dots$ , noch bemerkend, daß

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = k^2$$

$$A p^2 + B q^2 + C r^2 = h^2$$

$$p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2.$$

Diese Gleichungen multiplicire man der Reihe nach mit  $-(B+C)$ ,  $BC$ , und addire die Producte, so kommt

$$\left. \begin{aligned} (A-B)(A-C)p^2 &= k^2 - (B+C)h^2 + BC\omega^2 \\ (B-C)(B-A)q^2 &= k^2 - (C+A)h^2 + CA\omega^2 \\ (C-A)(C-B)r^2 &= k^2 - (A+B)h^2 + AB\omega^2 \end{aligned} \right\} 2$$

von welchen die beiden letzten sich aus der ersten durch Vertauschung der Buchstaben ergeben. Zur Vereinfachung setze man:

$$(B+C)h^2 - k^2 = BC\lambda^2, \quad (C+A)h^2 - k^2 = CA\mu^2,$$

$$(A+B)h^2 - k^2 = AB\nu^2,$$

so sind  $\lambda, \mu, \nu$  alle reell, weil die Größen links sämtlich positiv sind. Denn nach §. 99. sind  $Ah^2 - k^2$  und  $(B+C)h^2 - k^2$  positiv. Hiernach gehen die Gleichungen 2. in folgende über:

$$\left. \begin{aligned} (A-B)(A-C)p^2 &= BC(\omega^2 - \lambda^2) \\ (B-C)(A-B)q^2 &= CA(\mu^2 - \omega^2) \\ (B-C)(A-C)r^2 &= AB(\omega^2 - \nu^2) \end{aligned} \right\} 3$$

Da in diesen alle Glieder links positiv sind, so müssen auch die Differenzen  $\omega^2 - \lambda^2, \mu^2 - \omega^2, \omega^2 - \nu^2$  immer positiv sein. Es war oben  $Ah^2 > k^2$ ; folglich, wenn man auf beiden Seiten mit  $B-C$  multiplicirt, und  $CBh^2$  hinzu addirt,

$$Ah^2(B-C) + CBh^2 > (B-C)k^2 + CBh^2$$

$$\text{oder} \quad (C+A)Bh^2 - Bk^2 > (A+B)Ch^2 - Ck^2,$$

folglich  $ABC\mu^2 > ABC\nu^2$ , also  $\mu^2 > \nu^2$ . Ferner ist  $k^2 > 0$ , also  $(A-B)k^2 + ABh^2 > (A-B)Ch^2 + ABh^2$ ; oder  $(A+C)Bh^2 - Bk^2 > (B+C)Ah^2 - Ak^2$ , d. i.  $ABC\mu^2 > ABC\lambda^2$ , oder  $\mu^2 > \lambda^2$ . Womit ist  $\mu^2 > \nu^2$  und  $\mu^2 > \lambda^2$ , und es

wird mithin  $U=f$ ,  $V=g$ ,  $W=h$ ; diese Werthe sind also für alle diese Punkte einerlei, wie auch der Begriff der Drehungsaxe erfordert.

Man lege durch  $O$  eine auf der Drehungsaxe senkrechte Ebene, deren Gleichung mithin ist  $pu+qv+rw=0$ , nehme in derselben einen Punkt in der Einheit der Entfernung von  $O$ , so ist die relative Geschwindigkeit desselben gegen  $O$ :

$$\sqrt{U^2+V^2+W^2}=\sqrt{p^2+q^2+r^2}.$$

Denn es ist nach 9. überhaupt

$$\begin{aligned} U^2+V^2+W^2 &= (rv-qw)^2+(pw-ru)^2+(qu-pv)^2 \\ &= (p^2+q^2+r^2)(u^2+v^2+w^2)-(pu+qv+rw)^2, \end{aligned}$$

welcher Werth für  $pu+qv+rw=0$  und  $u^2+v^2+w^2=1$  in  $p^2+q^2+r^2$  übergeht, und mithin die obige Formel liefert. Diese Geschwindigkeit ist die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit der Drehung, welche hinfort mit  $\omega$  bezeichnet werden soll. Demnach ist

$$\omega=\sqrt{p^2+q^2+r^2}. \quad 11.$$

94. Die Formeln 9. geben jede der Geschwindigkeiten  $U$ ,  $V$ ,  $W$  als zusammengesetzt aus zwei Componenten, z. B.  $U$  aus  $rv$  und  $-qw$ , u. s. w. Diese Componenten der Geschwindigkeit  $\sqrt{U^2+V^2+W^2}$  lassen sich aber noch auf eine andere bemerkenswerthe Weise zu zweien mit einander verbinden. Nämlich man setze  $pw$  mit  $-pv$  zusammen, so erhält man, da die erste dieser Componenten mit  $v$ , die zweite mit  $w$  parallel ist, und beide mithin senkrecht gegen einander sind, eine resultirende Geschwindigkeit, deren Größe gleich  $p'\sqrt{v^2+w^2}$  ist, wo  $p'$  den positiven Werth von  $p$  bedeutet. Die Richtung derselben bildet mit den positiven Axen der  $u$ ,  $v$ ,  $w$  Winkel, deren Cosinus  $0, \frac{\pm w}{\sqrt{v^2+w^2}}, \frac{\mp v}{\sqrt{v^2+w^2}}$  sind, wobei die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem  $p$  positiv oder negativ ist; sie ist daher senkrecht nicht allein gegen  $u$ , sondern auch gegen das von

fehrt von dem Werthe  $\nu$  bis zu  $\mu$  gelangt, heiße  $T$ , so ist

$$T = \int_{\nu}^{\mu} \frac{\omega d\omega}{\sqrt{(\omega^2 - \lambda^2)(\omega^2 - \nu^2)(\mu^2 - \omega^2)}}.$$

Nun sei  $t'$  die Zeit, in welcher  $\omega$ , nach den obigen Annahmen von  $\omega'$  an wachsend, zuerst den Werth  $\mu$  erreicht, immer mit  $t=0$  an gerechnet; so ist, wenn man zur Abkürzung

$$U = + \sqrt{(\omega^2 - \lambda^2)(\omega^2 - \nu^2)(\mu^2 - \omega^2)},$$

$$t' = \int_{\omega'}^{\mu} \frac{\omega d\omega}{U}$$

wodurch  $t'$  bekannt wird. Ferner wird  $\omega = \nu$  für die Zeiten  $t' + T, t' + 3T, \dots, t' + (2n+1)T$ , dagegen wird  $\omega = \mu$  für die Zeiten  $t', t' + 2T, \dots, t' + 2nT$ . Ist nun irgend eine Zeit  $t$  gegeben, zu welcher das entsprechende  $\omega$  verlangt wird, so theilt man zunächst die Differenz  $t - t'$ , dividirt sie durch  $T$ , der Quotient sei  $m$ , der Rest  $t''$ . Es sei z. B.  $m$  gerade, so hat man für die Zeit  $t - t''$  oder  $Tm + t'$ ,  $\omega = \mu$ , und mithin

$$t'' = \int_{\mu}^{\omega} \frac{\omega d\omega}{U}$$

eine transcendente Gleichung, in der  $t''$  bekannt und aus welcher  $\omega$  zu finden ist. Daß dieselbe immer einen und nur einen reellen positiven Werth von  $\omega$ , zwischen  $\mu$  und  $\nu$ , geben kann, ist einleuchtend; demnach ist der zur Zeit  $t$  gehörige Werth von  $\omega$  völlig bestimmt, wie erforderlich.

Hieraus geht deutlich hervor, wie zu jeder Zeit  $t$  das entsprechende  $\omega$  gefunden werden kann. Diese Aufgabe gestattet immer nur eine Auflösung; aber die umgekehrte, nämlich zu einem gegebenen  $\omega$  die Zeit  $t$  zu finden, gestattet deren unendlich viele, weil dieselben Werthe von  $\omega$  periodisch wiederkehren.

Besondere Beachtung verdient noch der Fall, wenn  $\nu = \lambda$ . Alsdann ist

$$dt = \frac{\pm \omega d\omega}{(\omega^2 - \nu^2) \sqrt{\mu^2 - \omega^2}},$$

in welche Gleichung für  $\cos \lambda$ ,  $\cos \mu$ ,  $\cos \nu$  ihre Werthe aus 3. a. zu setzen sind. Sie giebt eine Relation zwischen  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\Theta$ ; ferner kann man aus 6.  $v$  und  $w$  mittelst der vorhergehenden (7.) eliminiren, und auch noch nach 3., mit Rücksicht auf 2.,  $u$  als Function von  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\Theta$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  ausdrücken. Setzt man diesen Werth von  $u$  noch in 6. ein, so bleiben nur noch die Gleichungen 1. 6. und 8, nebst denen unter 18. in §. 96: übrig; also im Ganzen 10, zwischen den Unbekannten  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\Theta$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $R$  und der Zeit  $t$ , wie erforderlich.

Es versteht sich von selbst, daß diese und noch andere Fälle, deren hier nicht erwähnt ist, nach einander bei der Bewegung desselben Körpers eintreten können, je nachdem seine Oberfläche gestaltet ist. Die vorstehende Aufzählung kann dem Leser eine Uebersicht der Aufgabe gewähren; im Folgenden aber soll nur noch der erste der hier erwähnten Fälle näher in Betracht gezogen werden.

103. Um die Rechnung etwas zu vereinfachen, nehme man die feste Ebene zu derjenigen der  $x'$  und  $y'$ ; dadurch wird  $h=0$ ,  $h'=0$ ,  $h''=1$ ; und mithin gehen die Gleichungen 1. des vorigen § in folgende über:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} \Sigma m = \Sigma X, \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} \Sigma m = \Sigma Y, \quad \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \Sigma m = \Sigma Z + R. \quad 1.$$

Ferner wird noch in 3., weil die feste Ebene die der  $x'y'$  ist, auch  $k=0$ , und  $z'=z+\zeta=0$ , folglich, wenn man für  $z$  seinen Werth aus 2. setzt:

$$\zeta + cu + c'v + c''w = 0. \quad 2.$$

Aus 3. a. ergibt sich weiter  $\cos \lambda = c$ ,  $\cos \mu = c'$ ,  $\cos \nu = c''$ ; folglich werden 4. und 5.

$$\left. \begin{aligned} H &= f(u, v, w) = 0 \\ \pm Uc &= \frac{dH}{du}, \quad \pm Uo' = \frac{dH}{dv}, \quad \pm Uc'' = \frac{dH}{dw} \end{aligned} \right\} \quad 3.$$

so ergeben sich  $p^2, q^2, r^2$  aus 3. Was noch die Zeichen betrifft, so findet, wenn die Werthe von  $p, q, r$ , für  $t=0$  nach Größe und Zeichen bekannt sind, keine Zweideutigkeit Statt. Denn es ist klar, daß keine der Größen  $p, q, r$  ihr Zeichen ändern kann, ohne zugleich durch Null zu gehen; ferner aber ändert sie es jedesmal, wenn sie durch Null geht. Wenn also z. B. wieder  $\nu > \lambda$  ist, so befindet sich  $\omega$  immer zwischen  $\mu$  und  $\nu$ , und die Drehungsaxe beschreibt einen Kreis um  $\mu$ . Alsdann wird  $p$  nie Null, und wechselt folglich auch sein Zeichen nicht; dagegen wechselt  $q$  das seinige, so oft  $\omega = \mu$ , und  $r$ , so oft  $\omega = \lambda$  wird. Daß diese Regel die richtige ist, ergibt sich schon aus der Anschauung; um sie aber auch durch Rechnung nachzuweisen, darf man nur die Gleichung 1. in diesem §. betrachten, welche lehrt, daß  $\frac{d\omega}{dt}$  und das Product  $pqr$  entgegen-

gesetzte Zeichen haben, folglich auch immer zugleich ihre Zeichen wechseln. (In dieser Gleichung ist nämlich der Factor  $C-A$  auf der rechten Seite negativ.) Wenn nun, wie vorhin,  $\nu > \lambda$  ist, so findet der Zeichenwechsel Statt, sobald  $\omega = \mu$ ,  $q = 0$ , und sobald  $\omega = \nu$ ,  $r = 0$  wird. Da  $p$  in diesem Falle niemals sein Zeichen wechselt, und für  $\omega = \mu$ ,  $r$  nicht Null wird, also das seinige wechseln kann; so muß mithin  $q$ , indem es durch Null geht, sein Zeichen wechseln; w. z. b. w. Daß sich hieraus die Zeichen von  $p, q, r$  für jede gegebene Zeit  $t$  beurtheilen lassen, ist einleuchtend. Die Bedeutung dieser Zeichen ist aber in §. 94. hinreichend erläutert worden.

Nach §. 98. 5. ist

$$Ap = k \sin \varphi \sin \Theta, \quad Bq = k \cos \varphi \sin \Theta, \quad Cr = k \cos \Theta. \quad 5.$$

Ferner ist, nach §. 96. 18.

$$\begin{aligned} p \, dt &= \sin \varphi \sin \Theta \, d\psi - \cos \varphi \, d\Theta \\ q \, dt &= \cos \varphi \sin \Theta \, d\psi + \sin \varphi \, d\Theta. \end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichungen, die erste mit  $\sin \varphi$ , die zweite mit  $\cos \varphi$ , und addirt die Producte, so kommt

$$(p \sin \varphi + q \cos \varphi) dt = \sin \Theta d\psi,$$

oder wenn noch mit  $\sin \Theta$  auf beiden Seiten multiplicirt wird, mit Rücksicht auf 5:

$$k(Ap^2 + Bq^2) dt = (k^2 - C^2 r^2) d\psi,$$

oder auch, nach §. 98. 4.

$$d\psi = \frac{k(h^2 - Cr^2)}{k^2 - C^2 r^2} \cdot dt.$$

Da  $h^2 - Cr^2$  und  $k^2 - C^2 r^2$  immer positiv sind, so lehrt diese Formel, daß  $\psi$  mit der Zeit beständig wächst; d. h. mit andern Worten, daß der Durchschnitt der beweglichen Ebene  $uv$  mit der unbeweglichen  $xy$  sich in dieser immer in demselben Sinne dreht.

Man hat aber, nach Formel 3. dieses §.  $r^2 = \frac{AB(\omega^2 - \nu^2)}{(A-C)(B-C)}$ ; folglich

$$\frac{h^2 - Cr^2}{k^2 - C^2 r^2} = \frac{(A-C)(B-C)h^2 - ABC(\omega^2 - \nu^2)}{(A-C)(B-C)k^2 - ABC^2(\omega^2 - \nu^2)}.$$

Zur Abkürzung werde gesetzt:

$$(A-C)(B-C)h^2 + ABC\nu^2 = (AB + C^2)h^2 - Ck^2 = ABCG$$

$$(A-C)(B-C)k^2 + ABC^2\nu^2 = ABC^2H,$$

so wird 
$$\frac{h^2 - Cr^2}{k^2 - C^2 r^2} = \frac{G - \omega^2}{C(H - \omega^2)},$$

und mithin

$$d\psi = \frac{k}{C} \cdot \frac{G - \omega^2}{H - \omega^2} \cdot dt,$$

$$d\psi = \frac{k}{C} \cdot \frac{G - \omega^2}{H - \omega^2} \cdot \frac{\pm \omega d\omega}{\sqrt{(\omega^2 - \lambda^2)(\omega^2 - \nu^2)(\mu^2 - \omega^2)}} \quad 6.$$

In dieser Gleichung gilt das positive oder negative Zeichen, je nachdem  $\omega$  abnimmt oder wächst; es findet also derselbe Wechsel der Zeichen Statt, wie in der Gleichung 4., wobei keine Unbestimmtheit übrig bleibt. Aus den Gleichungen 5. ergeben sich noch  $\varphi$  und  $\Theta$ , da  $p, q, r$  bekannt sind. Und zwar muß man



$\Theta$  immer zwischen 0 und  $\pi$ ,  $\varphi$  aber zwischen 0 und  $2\pi$  men. Da hierdurch die Winkel  $\psi$ ,  $\varphi$ ,  $\Theta$  ohne Zweifel bestimmt sind, so ergeben sich auch die Werthe der 9  $a, \dots c'$  und mit ihnen die Stellung des Körpers, für beliebigen Augenblick. Im Ganzen ist demnach die Auflösung der Aufgabe enthalten in den Gleichungen 2. und 4. des §. 98. in denen 4. und 6. des gegenwärtigen §. Alle diese Gleichungen sind von einander unabhängig, und enthalten sechs Constanten nämlich  $h, l, l', l''$ , nebst den zu 4. und 6. gehörigen,  $\mu$  erforderlich. Indem man aber die Ebene  $xy$  der des Körpers parallel annahm, wurde  $l=0, l'=0$ ; mithin blieben nur vier Constanten übrig, nämlich  $h$  und  $l''$  (oder  $k$ ), nebst den zu 4. und 6. Nach dieser Vereinfachung treten die Gleichungen 5. dieses §. an die Stelle von 2. in §. 98. Alle übrigen folgen aus den genannten.

Aus 6. folgt noch, daß  $\omega$  eine periodische Function von  $t$  ist, wie von  $t$ . Man setze, immer nur den Fall annehmend, daß  $\nu > \lambda$  ist,

$$\Psi = \frac{k}{C} \int \frac{(G - \omega^2) \omega d\omega}{(H - \omega^2) \sqrt{(\omega^2 - \lambda^2)(\omega^2 - \nu^2)(\mu^2 - \omega^2)}};$$

so nimmt in der Zeit  $T$ , in welcher der Werth von  $\omega$  von  $\nu$  bis  $\mu$  abnimmt, oder auch von  $\nu$  bis  $\mu$  wächst, zugleich der Winkel  $\psi$  immer um dieselbe Größe  $\Psi$  zu. Da  $\nu > \lambda$ , so betrachte die Drehungsaxe einen Kreis um  $\lambda$ , den sie in der Zeit  $T$  durchläuft, nach deren Ablauf sie in dem Körper wieder dieselbe Lage hat, wie am Anfange derselben. In diesem Augenblicke sind daher auch die Werthe von  $p, q, r$ , und mithin  $\Theta$  und  $\varphi$  wieder die nämlichen, wie am Anfange; aber  $\psi$  um  $4\Psi$  zugenommen; daher ist inzwischem der Körper nicht der in die nämliche Stellung gelangt; wenn nicht genau  $4\Psi$  gleich  $2\pi$  oder überhaupt einem Vielfachen von  $2\pi$  ist ( $\pi$  ist der Umkreis des Kreises) für den Durchmesser  $= 1$ ,  $\pi$  ist gewöhnlich). Ueberhaupt ist die Bewegung des Körpers

len Umständen periodisch; wenn  $\Psi$  mit  $\pi$  commensurabel ist; im Allgemeinen also ist sie es nicht.

101. Als zweites Beispiel mögen noch die Gleichungen für die Bewegung eines schweren Körpers entwickelt werden, der sich um einen unbeweglichen Punkt  $O$  drehen kann. Nimmt man die  $Y$ - $z$  vertical und positiv nach unten, so ist in den Gleichungen 2. des §. 97., welche hier unmittelbar Anwendung finden,  $X=0$ ,  $Y=0$ ,  $Z=g$ , folglich  $L=-g\Sigma my$ ,  $M=g\Sigma mx$ ,  $N=0$ ; oder, weil noch §. 93. 1.  $x=au+a'v+a''w$ , u. s. f.

$$L=-g\Sigma(bu+b'v+b''w)m, M=g\Sigma(au+a'v+a''w)m, N=0.$$

Man bezeichne die Coordinaten des Schwerpunktes nach den durch  $O$  gelegten Hauptachsen  $(u, v, w)$  mit  $u', v', w'$ , so wird

$$\Sigma um=u'\Sigma m, \Sigma vm=v'\Sigma m, \Sigma wm=w'\Sigma m,$$

und hiernach

$$L=-g(bu'+b'v'+b''w')\Sigma m, M=g(au'+a'v'+a''w')\Sigma m, N=0;$$

ferner erhält man, mit Rücksicht auf §. 33. 4.

$$La+Mb+Nc=g(c'w'-c''v')\Sigma m,$$

$$La'+Mb'+Nc'=g(c''u'-cw')\Sigma m,$$

$$La''+Mb''+Nc''=g(cv'-c'u')\Sigma m.$$

Die Gleichungen 4. in §. 97. werden mithin:

$$\left. \begin{aligned} Adp+(B-C)qr dt &= g(c'w'-c''v')\Sigma m \cdot dt \\ Bdq+(C-A)rp dt &= g(c''u'-cw')\Sigma m \cdot dt \\ Cdr+(A-B)pq dt &= g(cv'-c'u')\Sigma m \cdot dt \end{aligned} \right\} 1.$$

wo zugleich  $c=\sin\varphi \sin\Theta$ ,  $c'=\cos\varphi \sin\Theta$ ,  $c''=\cos\Theta$ . Verbindet man mit diesen die Gleichungen 18. in §. 96., so hat man sechs Gleichungen zwischen den Unbekannten  $p, q, r, \varphi, \psi, \Theta$  und  $t$ , wie erforderlich.

Anstatt der vorstehenden kann man auch die Gleichungen 3. in §. 97. anwenden. Diese geben:

$$\left. \begin{aligned} d(Aap + Ba'q + Ca''r) &= -g(bu' + b'v' + b''w') \Sigma m \cdot dt \\ d(Abp + Bb'q + Cb''r) &= g(au' + a'v' + a''w') \Sigma m \cdot dt. \end{aligned} \right\}$$

Die dritte läßt sich sofort integrieren, weil  $N=0$ ; sie giebt:

$$Acp + Bc'q + Cc''r = k, \quad 3.$$

wo  $k$  eine Constante, und ist mithin eines der Integrale, zur Lösung der vorliegenden Aufgabe erforderlich sind. Die zweite läßt sich auch leicht aus 1. herleiten, wenn man die Glieder der Reihe nach mit  $c, c', c''$  multiplicirt, und die Producte addirt. Auch die Bedeutung dieses Integrals ist aus dem §. 95. klar; bildet man nämlich in Bezug auf den festen Punkt  $O$  ein zusammengesetztes Paar der Bewegungsmomente, und zerlegt es nach den Ebenen  $xz, yz$  und  $xy$ , so ist die letzte, d. h. die horizontale Componente, der Gleichung 3. zufolge, constant mit  $k$ . Dies folgt auch offenbar daraus, daß die horizontale Componente des zusammengesetzten Paares der beschleunigenden Kräfte gebildet in Beziehung auf  $O$ , Null ist. Multiplicirt man die Gleichungen 1. nach der Reihe mit  $p, q, r$  und addirt die Producte, so folgt noch ein zweites Integral. Man findet:

$$\begin{aligned} & Ap dp + Bq dq + Cr dr \\ &= g[(c''q - c'r)u' + (cr - c''p)v' + (c'p - cq)w'] dt, \end{aligned}$$

oder weil, nach §. 95. 14.  $dc = (c''q - c'r)dt$ , u. s. f.

$$Ap dp + Bq dq + Cr dr = g(u'dc + v'dc' + w'dc'')$$

mithin durch Integration:

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = g(cu' + c'v' + c''w') + \text{Const.} \quad 4$$

Diese Gleichung drückt, wie man sieht, die lebendige Kraft des Körpers aus. Man bemerke, daß  $cu' + c'v' + c''w' = z$ , d. h. gleich der verticalen Ordinate des Schwerpunktes ist; daß die lebendige Kraft des Körpers von der Tiefe des Schwerpunktes unter  $O$  abhängt, ist schon in den allgemeinen Bemerkungen §. 81. gezeigt worden.

Ausführlicher soll hier auf diese Untersuchung nicht eingegangen werden. Dieselbe vereinfacht sich in einigen besondern Fällen, welche die Integration leicht gestatten, gehört aber, im Allgemeinen betrachtet, zu den schwierigsten.

### Bewegung eines Körpers auf einer festen Ebene.

102. Ein frei beweglicher Körper sei auf eine feste Ebene gelegt, und der Wirkung beliebiger Kräfte unterworfen, die jedoch ihn von dieser nicht zu entfernen streben, so daß er in jedem Augenblicke seiner Bewegung die Ebene berührt. Offenbar kann man diesen Körper als gänzlich frei betrachten, und mithin die Gleichungen des §. 97. hier anwenden, wenn man nur den Widerstand, den die Ebene darbietet, gehörig in Rechnung bringt.

Es müssen jedoch einige Fälle von einander unterschieden werden. Man nehme zuerst an, daß der Körper die Ebene nur in einem Punkte berühre (dieser Punkt des Körpers mag hinfort B heißen); und daß seine Oberfläche stetig gekrümmt sei. Der Berührungspunkt B wird in diesem Falle im Allgemeinen in dem Körper beständig wechseln, oder der Körper auf der Ebene rollen. Er könnte in B auch eine Spitze haben; dieser Fall würde ein anderer sein, von welchem nachher gehandelt werden soll.

Es seien  $h, h', h''$  die Cosinus der Neigungen eines auf der festen Ebene, nach der Seite des Körpers hin, errichteten Lothes gegen drei unbewegliche Axen  $x', y', z'$ ; so ist

$$hx' + h'y' + h''z' = k$$

die Gleichung der Ebene, und zugleich  $h^2 + h'^2 + h''^2 = 1$ . ( $h, h', h''$  und  $k$  sind also gegebene Constanten.) Bezeichnet man ferner den Widerstand der Ebene in B mit  $R$ , so sind  $Rh, Rh', Rh''$  seine Componenten nach  $x', y', z'$ , weil  $R$  auf der Ebene normal ist. Mithin ergeben sich, wenn noch, wie früher,  $\xi, \eta, \zeta$  die Coordinaten des Schwerpunktes O des Körpers bedeu-

ten, folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} \Sigma m &= \Sigma X + Rh, & \frac{d^2\eta}{dt^2} \Sigma m &= \Sigma Y + Rh', \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} \Sigma m &= \Sigma Z + Rh''. \end{aligned} \right\} 1.$$

Durch O lege man die drei Hauptachsen  $u, v, w$ , und es  $u, v, w$  die relativen Coordinaten von B gegen O, nach gleichnamigen Axen; es seien noch  $x, y, z$  die relativen Coordinaten von B gegen O, nach den unbeweglichen Axen  $x', y', z'$ , so hat man, wie früher:

$$x = au + a'v + a''w, \quad y = bu + b'v + b''w, \quad z = cu + c'v + c''w.$$

Es sind aber  $x + \xi, y + \eta, z + \zeta$  die Coordinaten von B nach den unbeweglichen Axen, welche, weil B in die feste Ebene der obigen Gleichung derselben genuehthun müssen; man hat:

$$h(x + \xi) + h'(y + \eta) + h''(z + \zeta) = k. \quad 3.$$

Nennt man ferner  $\lambda, \mu, \nu$  die Neigungen von R gegen  $u, v, w$ , so sind  $R \cos \lambda, R \cos \mu, R \cos \nu$  die Componenten von R nach  $u, v, w$ ; die nach  $x, y, z$  aber sind, nach dem Satz 1,  $Rh, Rh', Rh''$ ; zerlegt man nun diese nach den Richtungen  $u, v, w$ , so kommt:  $R \cos \lambda = Rha + Rh'b + Rh''c$ , oder

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda &= ha + h'b + h''c, \\ \cos \mu &= ha' + h'b' + h''c', \\ \cos \nu &= ha'' + h'b'' + h''c''. \end{aligned} \right\} 3. a.$$

Von der anderen Seite muß R auf der Oberfläche des Körpers normal sein; daher hat man, wenn

$$H = f(u, v, w) = 0 \quad 4.$$

die Gleichung dieser Fläche ist, und

$$U = \pm \sqrt{\left(\frac{dH}{du}\right)^2 + \left(\frac{dH}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dH}{dw}\right)^2}$$

zur Abkürzung gesetzt wird,

$$U \cos \lambda = \frac{dH}{du}, \quad U \cos \mu = \frac{dH}{dv}, \quad U \cos \nu = \frac{dH}{dw}. \quad 5.$$

Man entwickle noch die Ausdrücke für die Componenten des Paares, welches die Kraft  $R$  an  $B$  mit einer ihr gleichen und entgegengesetzten bildet, die man sich am Schwerpunkte  $O$  angebracht vorstellt. Diese Componenten sind, nach den auf  $u, v, w$  beziehungsweise senkrechten Ebenen

$$R(w \cos \mu - v \cos \nu), \quad R(u \cos \nu - w \cos \lambda), \quad R(v \cos \lambda - u \cos \mu).$$

Setzt man zur Abkürzung  $La + Mb + Nc = L'$ ,  $La' + Mb' + Nc' = M'$ ,  $La'' + Mb'' + Nc'' = N'$ , so geben die Gleichungen 4. in §. 97., mit Hinzufügung der der vorstehenden Componenten des Paares ( $R, -R$ ):

$$\left. \begin{aligned} Adp + (B - C)qrdt &= L'dt + R(w \cos \mu - v \cos \nu)dt \\ Bdq + (C - A)rpdt &= M'dt + R(u \cos \nu - w \cos \lambda)dt \\ Cdr + (A - B)pqdt &= N'dt + R(v \cos \lambda - u \cos \mu)dt \end{aligned} \right\} 6.$$

Man denke sich die Cosinus von  $\lambda, \mu, \nu$  vermittelt ihrer Werthe aus 3. a. aus allen übrigen Gleichungen eliminiert, so bleiben überhaupt noch 16 Unbekannte übrig, nämlich  $\varphi, \psi, \Theta, p, q, r, u, v, w, x, y, z, \xi, \eta, \zeta$  und  $R$ , die sämtlich als Functionen der Zeit bestimmt werden müssen. Hierzu hat man die Gleichungen 1. bis 6. (von welchen jedoch die unter 3. a. auszuschließen sind, nachdem man nämlich für  $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$ , überall ihre Werthe aus 3. a. gesetzt hat); ihre Anzahl ist 14; weil aber von denen unter 5. jede eine Folge der beiden anderen ist, so gelten sie nur für 13. Nimmt man noch die Gleichungen 18. in §. 96. hinzu, so sind zwischen allen Unbekannten 16 von einander unabhängige Gleichungen gegeben, aus denen sich jene als Functionen von  $t$  bestimmen lassen. Diese Gleichungen lassen sich, mit einigen Abänderungen, auch dann anwenden, wenn zweitens der Körper in  $B$  eine Spitze hat. Alsdann bleiben, so lange nämlich der Körper sich auf die Spitze  $B$  stützt, die Coordinaten  $u, v, w$  von  $B$  unveränderlich;

zugleich aber fällt die Bedingung hinweg, daß der Widerstand  $R$  auf der Fläche des Körpers normal ist; folglich fallen überhaupt von den vorigen Unbekannten drei, nämlich  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , mit ihnen aber auch zugleich die drei Gleichungen 4. und 5. hinweg; während alle übrigen, d. h. 13 Unbekannte und eben so viele Gleichungen zwischen ihnen und  $t$ , bleiben wie vorhin.

Ein dritter Fall tritt ein, wenn die Oberfläche des Körpers abwickelbar ist, und die Ebene nicht in einem Punkte sondern in einer geraden Linie berührt, die aber in der Fläche wechselt. Alsdann findet in jedem Punkte der Berührungsebene ein gewisser Widerstand Statt, der auf der Ebene wie auf der Fläche des Körpers normal ist, und da zugleich alle diese Widerstände in demselben Sinne wirken, so ist klar, daß sie immer in eine einzige Kraft zusammensetzen lassen. Bezeichnet man diese Kraft mit  $R$ , und nennt ihren Angriffspunkt in der Körper wieder  $B$ , seine Coordinaten  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ; so muß  $R$  wieder auf der Fläche normal sein, wie im ersten Falle, und mithin gelten ganz dieselben Gleichungen (1. bis 6.) wie vorhin. Dieser Fall ist also von dem ersten nicht wesentlich unterschieden.

Viertens werde noch angenommen, daß der Körper ist während einer gewissen Zeit, auf eine geradlinige Kante ist, deren Gleichungen, nach den Hauptachsen  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , folgende sind:

$$v = nu + l, \quad w = n'u + l' \quad 7.$$

wo  $n$ ,  $l$ ,  $n'$ ,  $l'$  gegebene Constanten sind. Diese Gleichungen treten, wenn man unter  $u$ ,  $v$ ,  $w$  die Coordinaten des Punktes  $B$  versteht, der in jener Kante liegt, an die Stelle derer mit 4. und 5. ( $B$  ist der Angriffspunkt der Resultante  $R$  aller Widerstände, wie vorhin.) Ferner ist noch auszudrücken, daß die Kante auf der Richtung von  $R$  senkrecht steht. Dieselbe hat mit den Achsen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  Winkel, deren Cosinus der Reihe nach sich verhalten wie  $1 : n : n'$ , und da  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  die Neigungen von  $R$  gegen jene Achsen sind, so hat man

$$\cos \lambda + n \cos \mu + n' \cos \nu = 0, \quad 8.$$

welche Gleichung für  $\cos \lambda$ ,  $\cos \mu$ ,  $\cos \nu$  ihre Werthe aus a. zu setzen sind. Sie giebt eine Relation zwischen  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\Theta$ ; mer kann man aus 6.  $v$  und  $w$  mittelst der vorhergehenden (7.) eliminiren, und auch noch nach 3., mit Rücksicht auf 2., als Function von  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\Theta$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  ausdrücken. Setzt man diesen Werth von  $u$  noch in 6. ein, so bleiben nur noch die Gleichungen 1. 6. und 8, nebst denen unter 18. in §. 96: übrig; so im Ganzen 10, zwischen den Unbekannten  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\Theta$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $R$  und der Zeit  $t$ , wie erforderlich.

Es versteht sich von selbst, daß diese und noch andere Fälle, deren hier nicht erwähnt ist, nach einander bei der Bewegung desselben Körpers eintreten können, je nachdem seine Oberfläche gestaltet ist. Die vorstehende Aufzählung kann dem Leser eine Uebersicht der Aufgabe gewähren; im Folgenden aber soll nur noch der erste der hier erwähnten Fälle näher in Betracht gezogen werden.

103. Um die Rechnung etwas zu vereinfachen, nehme man die feste Ebene zu derjenigen der  $x'$  und  $y'$ ; dadurch wird  $h=0$ ,  $h'=0$ ,  $h''=1$ ; und mithin gehen die Gleichungen 1. des vorigen § in folgende über:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} \Sigma m = \Sigma X, \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} \Sigma m = \Sigma Y, \quad \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \Sigma m = \Sigma Z + R. \quad 1.$$

Ferner wird noch in 3., weil die feste Ebene die der  $x'y'$  ist, auch  $k=0$ , und  $z'=z+\zeta=0$ , folglich, wenn man für  $z$  seinen Werth aus 2. setzt:

$$\zeta + cu + c'v + c''w = 0. \quad 2.$$

Aus 3. a. ergibt sich weiter  $\cos \lambda = c$ ,  $\cos \mu = c'$ ,  $\cos \nu = c''$ ; folglich werden 4. und 5.

$$\left. \begin{aligned} H &= f(u, v, w) = 0 \\ \pm Uc &= \frac{dH}{du}, \quad \pm Uo' = \frac{dH}{dv}, \quad \pm Uc'' = \frac{dH}{dw} \end{aligned} \right\} \quad 3.$$



Hierdurch wird der vorstehende Ausdruck für  $\zeta$ :

$$\pm U \cdot \zeta + \frac{dH}{du} \cdot u + \frac{dH}{dv} \cdot v + \frac{dH}{dw} \cdot w = 0, \quad 4.$$

wo das Zeichen von  $U$  immer so zu wählen ist, daß der  $\pm$  von  $\zeta$  positiv bleibt.

Endlich geben die Gleichungen 6., durch Einsetzung von  $c'$ ,  $c''$  für die Cosinus von  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ :

$$A dp + (B - C) q r dt = L' dt + R(c' w - c'' v) dt$$

$$B dq + (C - A) r p dt = M' dt + R(c'' u - c w) dt$$

$$C dr + (A - B) p q dt = N' dt + R(c v - c' u) dt.$$

Diese Gleichungen drücken die Componenten des in Bezug auf den Schwerpunkt gebildeten Paares der Beschleunigungsmomente, nach den auf den Hauptachsen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  bezogenen senkrechten Ebenen aus. Man kann aber dieses Paar auch in den auf  $x$ ,  $y$ ,  $z$  senkrechten Ebenen zerlegen; alsdann erhält man folgende Gleichungen, welche den vorstehenden gleich sind und anstatt ihrer gebraucht werden können:

$$\left. \begin{aligned} d(Aap + Ba'q + Ca''r) &= L dt - R_y dt \\ d(Abp + Bb'q + Cb''r) &= M dt + R_x dt \\ d(Acp + Bc'q + Cc''r) &= N dt \end{aligned} \right\} 5.$$

Nämlich  $-R_y$ ,  $R_x$ ,  $0$  sind die Werthe der Ausdrücke  $Yz - Zx - Xz$ ,  $Xy - Yx$  für  $X=0$ ,  $Y=0$ ,  $Z=R$ , d. h. die Exponenten des Momentes von  $R$  in Bezug auf den Schwerpunkt, indem  $x$ ,  $y$ ,  $z$  die relativen Coordinaten des Angriffspunktes von  $R$  gegen jenen bedeuten. Diese Gleichungen folgen aus 3. in §. 97. ohne Weiteres, indem hier nur  $R$  zu den übrigen beschleunigenden Kräften hinzukommt.

Die auf den Körper wirkenden beschleunigenden Kräfte sind die Schwere und eine dem Drucke proportionale Reibung am Berührungspunkte, deren Wirkungsweise jedoch noch einer Erläuterung bedarf. Der Punkt  $B$  des Körpers, in welchem derselbe zur Zeit  $t$  die Ebene berührt, besitzt in diesem Augenblicke

eine gewisse Geschwindigkeit, deren Ausdruck zunächst gesucht wird. Die Coordinaten von B sind, nach den unbeweglichen Azen,  $x + \xi$ ,  $y + \eta$  und  $z + \zeta$ ; die letzte von diesen ist Null. Setzt man für  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ihre bekannten Werthe (2. in §. 102.), so erhält man folgende Ausdrücke dieser Coordinaten:

$$\xi + au + a'v + a''w, \quad \eta + bu + b'v + b''w, \quad \zeta + cu + c'v + c''w.$$

Um die Geschwindigkeit des Punctes B anzugeben, muß man von diesen Ausdrücken die Ableitungen nach  $t$  nehmen, dabei aber  $u$ ,  $v$ ,  $w$  als unveränderlich betrachten. Die Componenten der Geschwindigkeit von B nach den Azen  $x$  und  $y$  (sie mögen noch zur Abkürzung für die Folge mit  $\xi'$ ,  $\eta'$  bezeichnet werden), sind mithin:

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= \frac{d\xi}{dt} + u \frac{da}{dt} + v \frac{da'}{dt} + w \frac{da''}{dt} \\ \eta' &= \frac{d\eta}{dt} + u \frac{db}{dt} + v \frac{db'}{dt} + w \frac{db''}{dt} \end{aligned} \right\} 6.$$

Die dritte, auf der festen Ebene normale Componente dieser Geschwindigkeit ist:  $\zeta' = \frac{d\zeta}{dt} + u \frac{dc}{dt} + v \frac{dc'}{dt} + w \frac{dc''}{dt}$ . Nimmt man aber die Ableitung der Gleichung 2. nach allen Veränderlichen, zu denen auch  $u$ ,  $v$ ,  $w$  gehören, so kommt:

$$\frac{d\zeta}{dt} + u \frac{dc}{dt} + v \frac{dc'}{dt} + w \frac{dc''}{dt} + \frac{c du + c' dv + c'' dw}{dt} = 0.$$

Nach 3. ist aber

$$c du + c' dv + c'' dw = \frac{1}{U} \left[ \frac{dH}{du} du + \frac{dH}{dv} dv + \frac{dH}{dw} dw \right] = 0;$$

folglich erhält man:

$$\frac{d\zeta}{dt} + u \frac{dc}{dt} + v \frac{dc'}{dt} + w \frac{dc''}{dt} = 0, \quad 7.$$

d. h. die auf der festen Ebene senkrechte Geschwindigkeit des Berührungspunctes ist Null, oder die Bewegung desselben ist dieser Ebene parallel; wie auch aus der Anschauung einleuchtet. Der

Berührungspunct gleitet demnach auf der Ebene in der Zeit  $dt$  mit der Geschwindigkeit, deren Componenten unter 6. angegeben sind. Diesem Gleiten widerstrebt die Reibung, indem sie der Geschwindigkeit des Berührungspunctes gerade entgegen wirkt. Es sind nun zwei Fälle möglich; entweder nämlich ist die Reibung stark genug, um die Geschwindigkeit des Berührungspunctes gleich Null zu machen, oder nicht. In dem ersten dieser Fälle, in welchem der Körper rollt, ohne zu gleiten, tritt die Reibung nur mit der Intensität auf, die in jedem Augenblicke nöthig ist, um die Geschwindigkeit des Berührungspunctes zu vertilgen; in dem zweiten Falle tritt sie dagegen mit ihrer vollen Intensität auf, welche, nach der Voraussetzung, dem Drucke proportional ist. Ob der eine oder der andere dieser Fälle Statt findet, muß durch die Rechnung selbst entschieden werden, wie das nachfolgende Beispiel zeigen soll.

Es seien demnach  $f$  und  $f'$  die Componenten der Reibung nach den Richtungen von  $x$  und  $y$ ; ferner denke man sich die Axe  $x$  in der festen Ebene horizontal, und es sei  $i$  die Neigung dieser Ebene ( $xy$ ) gegen den Horizont; so sind, wenn noch  $M = \Sigma m$  die Masse des Körpers bezeichnet, die Componenten des Gewichtes des Körpers, welches man sich in dem Schwerpunkte  $O$  vereinigt vorzustellen hat, nach den Axen  $x, y, z$  beziehungsweise:  $0, Mg \sin i, -Mg \cos i$ , wenn man sich die positive Axe der  $y$  in der festen Ebene abwärts, und die  $z$  von ihr aus aufwärts gerichtet, auch den Winkel  $i$  als spitz vorstellt. Folglich erhält man:

$$\Sigma X = f, \quad \Sigma Y = Mg \sin i + f', \quad \Sigma Z = -Mg \cos i, \quad 8.$$

welche Werthe in 1. zu setzen sind. Ferner erhält man noch, da in jedem Augenblicke das Paar, welches die Schwerekräfte in Bezug auf den Schwerpunct bilden, Null ist, und da die Componenten der Reibung sind:  $X = f, Y = f', Z = 0$ , die relativen Coordinaten ihres Angriffspunctes gegen den Schwerpunct aber  $x, y, z$ :

$L = Yz - Zy = zf$ ,  $M = Zx - Xz = -zf$ ,  $N = Xy - Yx = yf - xf$  9.  
welche Werthe in 5. zu setzen sind.

So lange nun die Reibung der Geschwindigkeit des Berührungspunctes nicht vertilgen kann, ist ihre Intensität dem Drucke, also auch dem Widerstande  $R$  proportional; demnach:

$$\sqrt{f^2 + f'^2} = \mu R, \quad 10.$$

von  $\mu$  eine Constante. Ihre Richtung aber ist der Geschwindigkeit jenes Punctes entgegengesetzt; hieraus folgt offenbar, daß die Componenten der Reibung sich zu einander verhalten müssen, wie die der Geschwindigkeit von  $B$ , nach  $x$  und  $y$ ; also

$$\frac{f}{f'} = \frac{\xi}{\eta'} \quad 11.$$

wo für  $\xi$  und  $\eta'$  ihre Werthe aus 6. gesetzt werden müssen. Vorstehende Gleichung drückt jedoch nur aus, daß die Reibung der Geschwindigkeit des Berührungspunctes parallel ist, nicht aber, daß sie ihr gerade entgegen wirkt; dieser Umstand, obgleich sehr wesentlich, kommt erst später im Verlaufe der Rechnung in Betracht.

Wenn aber die Reibung hinreicht, um die Geschwindigkeit des Berührungspunctes zu vertilgen, so hören die Gleichungen 10. 11. zu gelten auf; alsdann aber hat man zwei andere, nämlich

$$\xi = 0, \quad \eta' = 0. \quad 12.$$

(Vgl. Formel 6.). Zugleich aber müssen die Werthe von  $f$  und  $f'$ , welche sich alsdann ergeben, folgender Bedingung genügen:

$\sqrt{f^2 + f'^2} < \mu R$ , da die Intensität der Reibung nie größer sein kann als  $\mu R$ . Wird diese Bedingung nicht befriedigt, so ist auch die Geschwindigkeit von  $B$  nicht Null; mithin gelten dann die Gleichungen unter 10. 11.

104. Um das Vorhergehende an einem Beispiele zu erläutern, welches die Integration ohne Schwierigkeiten gestattet, soll die Bewegung einer gleichartigen Kugel auf einer schiefen Ebene,

$$(p) = ap + a'q + a''r$$

$$(q) = bp + b'q + b''r$$

$$(r) = cp + c'q + c''r,$$

und bemerke, daß  $(p)$ ,  $(q)$ ,  $(r)$  die Componenten der Winkelgeschwindigkeit der Kugel nach den Axen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  beziehungsweise ausdrücken, die aber von nun an, mit Weglassung der Klammern, bloß durch  $p$ ,  $q$ ,  $r$  bezeichnet werden sollen, also mit den  $x$  gen  $p$ ,  $q$ ,  $r$  nicht verwechselt werden müssen. Hierdurch wandeln sich die Gleichungen 4. des vorigen §. in folgende:

$$\frac{2}{3}h \frac{dp}{dt} = -f, \quad \frac{2}{3}h \frac{dq}{dt} = f, \quad \frac{2}{3}h \frac{dr}{dt} = 0. \quad 1.$$

Zugleich wird  $\xi' = \frac{d\xi}{dt} + hq$ ,  $\eta' = \frac{d\eta}{dt} - hp$ . Setzt man

zur Abkürzung  $\frac{d\xi}{dt} = u$ ,  $\frac{d\eta}{dt} = v$ , so gehen die Bedingungen 5. und 6. des vorigen §. in folgende über:

$$\sqrt{f^2 + f'^2} = \mu g \cos i. \quad 2. a.$$

$$(v - hp)f = (u + hq)f' \quad 3. a.$$

$$\sqrt{f^2 + f'^2} < \mu g \cos i \quad 2. b.$$

$$u + hq = 0, \quad v - hp = 0 \quad 3. b.$$

von denen nach Umständen die ersten oder zweiten gelten, wie aus dem Vorigen bekannt ist. Endlich hat man noch, nach dem im vorigen §.

$$\frac{du}{dt} = f, \quad \frac{dv}{dt} = g \sin i + f'. \quad 4.$$

Hiermit sind in jedem Falle zur Bestimmung der gegenwärtigen Unbekannten  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $f$ ,  $f'$ , sieben Gleichungen vorhanden, wie erforderlich. Eine von jenen, nämlich  $r$ , fällt noch hinweg, weil nach 1.  $\frac{dr}{dt} = 0$ , also  $r$  constant ist. Es bleibt die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die

in welchen noch ein gemeinsamer Factor  $h$  auf beiden Seiten weggelassen ist. Ferner hat man, so lange die Geschwindigkeit von  $B$  nicht Null ist:

$$\sqrt{f^2 + f'^2} = \mu g \cos i, \quad 5. a.$$

weit  $R = g \cos i$ ; zugleich ist, nach 11.  $\eta'f - \xi'f' = 0$ . Man setze noch in den Formeln 6. des vorigen §. für  $\frac{da}{dt}$ ,  $\frac{da'}{dt}$ , u. s. f. ihre Werthe aus §. 95, 14., so kommt

$$\xi' = \frac{d\xi}{dt} + (a''q - a'r)u + (ar - a''p)v + (a'p - aq)w,$$

oder mit Rücksicht auf 2. und auf die schon oft gebrauchten Relationen 4. in §. 33:

$$\xi' = \frac{d\xi}{dt} + h(bp + b'q + b''r).$$

Eben so ist  $\eta' = \frac{d\eta}{dt} + (b''q - b'r)u + (br - b''p)v + (b'p - bq)w$

oder wegen 2.  $\eta' = \frac{d\eta}{dt} - h(ap + a'q + a''r),$

und mithin:

$$\left[ \frac{d\eta}{dt} - h(ap + a'q + a''r) \right] f = \left[ \frac{d\xi}{dt} + h(bp + b'q + b''r) \right] f'. \quad 6. a.$$

Wenn aber die Geschwindigkeit von  $B$  Null ist, so gelten die beiden letzten Gleichungen nicht mehr; dagegen ist alsdann

$$\sqrt{f^2 + f'^2} < \mu g \cos i, \quad 5. b.$$

und

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= \frac{d\xi}{dt} + h(bp + b'q + b''r) = 0. \\ \eta' &= \frac{d\eta}{dt} - h(ap + a'q + a''r) = 0. \end{aligned} \right\} \quad 6. b.$$

105. Man setze

Ferner gelten jetzt die Gleichungen 2. a. 3. a., welche nach Einsetzung der Werthe von  $f$  und  $f'$  aus 4. geben:

$$du^2 + (dv - g dt \cdot \sin i)^2 = \mu^2 g^2 \cos^2 i \cdot dt^2$$

$$\frac{du}{u + hq} = \frac{dv - g dt \cdot \sin i}{v - hp}$$

oder da nach 6.  $du = dU$ ,  $dv - g dt \cdot \sin i = dV$  ist, so man noch  $\mu g \cos i \cdot t = \Theta$  und  $\frac{2}{7} g \sin i \cdot t = k \Theta$  setzt, so  $k = \frac{2}{7} \frac{g \sin i}{\mu}$  ist:

$$\left. \begin{aligned} dU^2 + dV^2 &= d\Theta^2 \\ \frac{dU}{U} &= \frac{dV}{V + k\Theta} \end{aligned} \right\} 7.$$

Um diese Gleichungen zu integrieren, setze man:

$$dU = \sin \varphi \cdot d\Theta, \quad dV = \cos \varphi \cdot d\Theta,$$

wodurch der ersten Genüge geleistet wird; alsdann die zweite

$$V + k\Theta = U \cotg \varphi,$$

und diese, differentiiert:

$$dV + k d\Theta = \cotg \varphi \cdot dU - \frac{U d\varphi}{\sin^2 \varphi}.$$

Es ist aber  $dV = \cotg \varphi \cdot dU$ ; mithin folgt  $k d\Theta = -\frac{U d\varphi}{\sin^2 \varphi}$ .

ferner ist  $\sin \varphi \cdot d\Theta = dU$ ; also erhält man  $k dU = -\frac{U d\varphi}{\sin^2 \varphi}$ .

oder  $\frac{k dU}{U} = -\frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi}$ . Nun ist bekanntlich  $\int \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} = -\log \tg \frac{1}{2} \varphi$  (s. I. S. 190.); daher folgt durch Integration

$k \log U + \log \tg \frac{1}{2} \varphi = \text{Const.}$ , oder, nach Wegschaffen der Logarithmen:

$$U^k = c \cdot \cotg \frac{1}{2} \varphi,$$

wo  $c$  eine Constante. Hieraus folgt weiter

der festen Ebene senkrechten Durchmesser fortwährend unveränderlich.

Um noch die Bedeutung der Zeichen von  $p$  und  $q$  anschaulich zu machen, erinnere man sich, daß die Axe  $x$  horizontal ist, die Richtung der positiven  $y$  aber auf der schiefen Ebene abwärts geht. Wenn daher z. B. die Kugel gerade abwärts rollt, ohne zu gleiten, so ist  $v$  positiv, und  $v - hp = 0$ , also auch  $p$  positiv. Hierdurch wird anschaulich, in welchem Sinne die Drehung um den horizontalen Durchmesser erfolgt, wenn  $p$  positiv ist. Denkt man sich ferner  $u$ , d. i. die horizontale Geschwindigkeit des Mittelpunctes positiv, so muß, wenn zugleich der Berührungspunct in horizontaler Richtung nicht gleiten soll,  $u + hq = 0$ , also  $q$  negativ sein; hierdurch wird wieder die Bedeutung des Zeichens von  $q$  anschaulich, die übrigens aus dem Vorigen auch, nach den allgemeinen Regeln in §. 94., von selbst folgt.

Es seien  $u_0, v_0, p_0, q_0$ , die Werthe von  $u, v, p, q$  für  $t=0$ , welche beliebig gegeben sein können; so sind  $u_0 + hq_0$  und  $v_0 - hp_0$  die Anfangsgeschwindigkeiten des Berührungspunctes, nach den Axen  $x$  und  $y$ . Im Allgemeinen ist keine von beiden Null; hier soll jedoch nur vorausgesetzt werden, daß  $u_0 + hq_0$  nicht Null sei. Man wähle noch, wie frei steht, die Richtung der positiven  $x$  so, daß  $u_0 + hq_0$  positiv sei. Eliminiert man  $f$  und  $f'$  aus 1. und 4., so kommt:

$$\frac{du}{dt} = \frac{2}{3}h \frac{dq}{dt}, \quad \frac{dv}{dt} + \frac{2}{3}h \frac{dp}{dt} = g \sin i,$$

folglich durch Integration, da für  $t=0$ ,  $u=u_0$ , u. s. w.,

$$u - u_0 = \frac{2}{3}h(q - q_0), \quad v - v_0 + \frac{2}{3}h(p - p_0) = g \sin i \cdot t. \quad 5.$$

Hieraus folgt:

$$u + hq = \frac{7}{2}u - \frac{5}{2}u_0 + hq_0, \quad v - hp = \frac{7}{2}v - \frac{5}{2}g \sin i \cdot t - \frac{5}{2}v_0 - hp_0,$$

oder wenn man setzt:  $u + hq = \frac{7}{2}U$ ,  $v - hp = \frac{7}{2}V + g \sin i \cdot t$ ,

$$u - \frac{5}{7}u_0 + \frac{2}{7}hq_0 = U, \quad v - g \sin i \cdot t - \frac{5}{7}v_0 - \frac{2}{7}hp_0 = V. \quad 6.$$



Ferner gelten jetzt die Gleichungen 2. a. 3. a., welche nach Einsetzung der Werthe von  $f$  und  $f'$  aus 4. geben:

$$du^2 + (dv - g dt \cdot \sin i)^2 = \mu^2 g^2 \cos i^2 \cdot dt^2$$

$$\frac{du}{u + hq} = \frac{dv - g dt \cdot \sin i}{v - hp}$$

oder da nach 6.  $du = dU$ ,  $dv - g dt \cdot \sin i = dV$  ist, wenn man noch  $\mu g \cos i \cdot t = \Theta$  und  $\frac{2}{7} g \sin i \cdot t = k \Theta$  setzt, wo  $k = \frac{2}{7} \frac{g \sin i}{\mu}$  ist:

$$\left. \begin{aligned} dU^2 + dV^2 &= d\Theta^2 \\ \frac{dU}{U} &= \frac{dV}{V + k\Theta} \end{aligned} \right\} 7.$$

Um diese Gleichungen zu integrieren, setze man:

$$dU = \sin \varphi \cdot d\Theta, \quad dV = \cos \varphi \cdot d\Theta,$$

wodurch der ersten Genüge geleistet wird; alsdann giebt die zweite

$$V + k\Theta = U \cotg \varphi,$$

und diese, differentiiert:

$$dV + k d\Theta = \cotg \varphi \cdot dU - \frac{U d\varphi}{\sin^2 \varphi}.$$

Es ist aber  $dV = \cotg \varphi \cdot dU$ ; mithin folgt  $k d\Theta = -\frac{U d\varphi}{\sin^2 \varphi}$ ;

ferner ist  $\sin \varphi \cdot d\Theta = dU$ ; also erhält man  $k dU = -\frac{U d\varphi}{\sin \varphi}$

oder  $\frac{k dU}{U} = -\frac{d\varphi}{\sin \varphi}$ . Nun ist bekanntlich  $\int \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = \log \tg \frac{1}{2} \varphi$  (s. l. S. 190.); daher folgt durch Integration:  $k \log U + \log \tg \frac{1}{2} \varphi = \text{Const.}$ , oder, nach Wegschaffung der Logarithmen:

$$U^k = c \cdot \cotg \frac{1}{2} \varphi,$$

wo  $c$  eine Constante. Hieraus folgt weiter

$$U^{-k} = \frac{1}{c} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi,$$

und mithin:

$$\cotg \frac{1}{2} \varphi + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = \frac{1}{c} U^k + c U^{-k} = \frac{2}{\sin \varphi}$$

$$\cotg \frac{1}{2} \varphi - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = \frac{1}{c} U^k - c U^{-k} = 2 \cotg \varphi.$$

Daher ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} 2d\Theta &= \frac{2dU}{\sin \varphi} = \left( \frac{1}{c} U^k + c U^{-k} \right) dU \\ 2dV &= 2 \cotg \varphi \cdot dU = \left( \frac{1}{c} U^k - c U^{-k} \right) dU \end{aligned} \right\} 8.$$

folglich wenn man integriert:

$$\left. \begin{aligned} 2\Theta &= \frac{U^{1+k}}{c(1+k)} + \frac{c \cdot U^{1-k}}{1-k} + C \\ 2V &= \frac{U^{1+k}}{c(1+k)} - \frac{c \cdot U^{1-k}}{1-k} + C' \end{aligned} \right\} 9.$$

wo  $C$  und  $C'$  Constanten sind, die sich aus den Werthen von  $U$ ,  $V$  für  $t=0$  oder  $\Theta=0$ , sogleich ergeben. Bezeichnet man diese mit  $U_0$ ,  $V_0$ , so ist

$$\frac{U_0^{1+k}}{c(1+k)} + \frac{c U_0^{1-k}}{1-k} + C = 0, \quad 2V_0 = \frac{U_0^{1+k}}{c(1+k)} - \frac{c U_0^{1-k}}{1-k} + C'.$$

Obige Integration gilt, wenn nicht gerade  $k=1$  ist; für  $k=1$  aber erhält man anstatt 9.

$$2\Theta = \frac{U^2}{2c} + c \log U + C, \quad 2V = \frac{U^2}{2c} - c \log U + C'.$$

Es bleibt noch übrig, die Constante  $c$  zu bestimmen, welche von den Constanten in 9., also von  $C$  und  $C'$ , oder von  $U_0$  und  $V_0$  abhängen muß, da die Integration von 7. nur zwei willkürliche Constanten gestattet, die eben  $U_0$  und  $V_0$  sind. Man multiplicire erste der Gleichungen 9. mit  $k$ , und addire das Product zur zweiten, so kommt

$$2(V+k\Theta) = \frac{1}{c} U^{1+k} - c U^{1-k} + C' + Ck \quad 10. a.$$

oder nach 8.

$$2(V+k\Theta) = 2U \cdot \frac{dV}{dU} + C' + Ck.$$

Es ist aber, nach 7.  $V+k\Theta = U \frac{dV}{dU}$ ; folglich ergibt sich  $C' + Ck = 0$  oder, in Folge der vorstehenden Werthe von  $C$  und  $C'$ :

$$2V_0 = \frac{1}{c} U_0^{1+k} - c U_0^{1-k}.$$

Hieraus folgt

$$c^2 + 2V_0 U_0^{k-1} c = U_0^{2k}$$

$$\text{oder } c = -V_0 U_0^{k-1} \pm \sqrt{U_0^{2k} + V_0^2 U_0^{2k-2}}.$$

Für  $t=0$  ist die horizontale Geschwindigkeit des Berührungspunctes ( $u_0 + h\dot{\phi}_0 = \frac{7}{2}U_0$ ) nach der Voraussetzung positiv und nicht Null; folglich muß auch  $U$  von  $t=0$  an, während einer gewissen Zeit wenigstens, positiv sein. Demnach ist, in Folge der ersten der Gleichungen 8.  $\frac{dU}{d\Theta}$  positiv oder negativ, je nachdem

$c$  positiv oder negativ ist. Nach 4. ist  $\frac{du}{dt} = f$ , und da  $f$  der positiven horizontalen Geschwindigkeit von  $B$  entgegenwirkt, so ist  $f$  negativ; folglich ist auch  $\frac{du}{dt}$ , und mithin  $\frac{dU}{d\Theta} =$

$\frac{du}{\mu g \cos i \cdot dt}$  negativ; daher muß  $c$  negativ sein, und mithin in obigem Werthe von  $c$  das negative Zeichen gelten. Also ist

$$c = -V_0 U_0^{k-1} - U_0^{k-1} \sqrt{U_0^2 + V_0^2}. \quad 10. b.$$

Da in dieser Gleichung  $U_0$  positiv ist, so giebt sie immer einen reellen negativen Werth von  $c$ ,  $V_0$  mag positiv, Null oder negativ sein. Aus derselben erhält man noch

$$\frac{1}{c} = \frac{V_0 - \sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{U_0^{1+k}},$$

und mithin

$$\frac{V_0 - \sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{1+k} - \frac{V_0 + \sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{1-k} + C = 0$$

$$\begin{aligned} \text{oder} \quad C &= \left. \begin{aligned} \frac{2kV_0}{1-k^2} + \frac{2\sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{1-k^2} \\ \text{und} \quad C' &= -\frac{2k^2V_0}{1-k^2} - \frac{2k\sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{1-k^2} \end{aligned} \right\} 11. \end{aligned}$$

weil  $C' + Ck = 0$ . Nach Einsetzung der Werthe von  $c$ ,  $C$ ,  $C'$  aus 10. und 11. in 9. sind  $U$  und  $V$ , mithin auch  $u$ ,  $v$ ,  $p$ ,  $q$  (nach 5 und 6.) als Functionen von  $\Theta$  oder von  $t$  bestimmt, wie erforderlich ist.

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem  $k$  kleiner als 1 ist oder nicht. Ist  $k=1$  oder  $k>1$ , so kann, nach den Formeln 9. (und den ihnen folgenden für  $k=1$ )  $U$  nicht Null werden, ohne daß  $\Theta$  und mithin  $t$  unendlich groß wird; folglich wird in diesem Falle die Geschwindigkeit des Berührungspunctes nie Null; und die Formeln 9. gelten während der ganzen Dauer der Bewegung.

Für ein sehr großes  $t$  oder  $\Theta$  muß in denselben offenbar  $U$  sehr klein werden; man erhält also immer genauer, je kleiner  $U$  ist:

$$2\Theta = \frac{c}{(1-k)U^{k-1}}, \quad 2V = -\frac{c}{(1-k)U^{k-1}} = -2\Theta;$$

$$\text{also} \quad V + \Theta = 0, \quad \text{und} \quad U = \left( \frac{c}{2(1-k)\Theta} \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Setzt man für  $V$ ,  $U$ ,  $\Theta$  ihre Werthe, und bezeichnet zur Abkürzung den wesentlich positiven Quotienten  $\frac{c}{2(1-k)}$  mit  $\frac{1}{n}$ , so kommt:

$$v = g(\sin i - \mu \cos i)t = \frac{5}{7}v_0 + \frac{2}{7}hp_0$$

$$u = \frac{5}{7}u_0 + \frac{2}{7}hq_0 = \frac{1}{(n\mu g \cos i \cdot t)^{k-1}},$$

in welchen Gleichungen aber  $t$  sehr groß sein muß. Daher wird immer genauer mit wachsendem  $t$ :

$$v = g(\sin i - \mu \cos i)t, \quad u = \frac{5}{7}u_0 - \frac{2}{7}hq_0.$$

Man bemerke noch, daß  $k > 1$ , also  $\frac{2}{7} \frac{tg i}{\mu} > 1$ , oder  $\sin i > \frac{7}{2}\mu \cos i$ , mithin um so mehr  $\sin i > \mu \cos i$  ist. Der Werth von  $v$  ist also wesentlich positiv, wie offenbar auch erforderlich ist.

Nach dem Vorhergehenden ist, bei der Bewegung einer Kugel auf einer unter dem Winkel  $i$  gegen den Horizont geneigten Ebene, die Reibung nicht im Stande, die Geschwindigkeit des Berührungspunctes zu vertilgen, wenn  $k > 1$  oder  $i > \arctg \frac{7}{2}\mu$  ist; wo  $\mu$  das constante Verhältniß der Intensität der Reibung zu derjenigen des Druckes bezeichnet. Man sieht in der That, daß Druck und Reibung immer mehr abnehmen, also die Kugel auf der Ebene immer leichter gleiten kann, je größer  $i$  wird; wenn nämlich, wie hier, die Reibung bloß dem Drucke proportional vorausgesetzt wird.

Ist aber  $k < 1$  (mit Ausschluß der Gleichheit), so nimmt nach 8., weil  $\frac{dU}{d\Theta}$  negativ ist,  $U$  von seinem anfänglichen positiven Werthe  $U_0$  aus beständig ab, und wird Null, nach 9., für  $2\Theta = C$ , also, weil  $\Theta = \mu g t \cos i$ , in der Zeit

$$t' = \frac{C}{2\mu g \cos i} = \frac{kV_0 + \sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{(1-k^2)\mu g \cos i},$$

die offenbar endlich und positiv ist. Für diesen Augenblick wird zugleich (nach 10. a.)  $2(V + k\Theta) = 0$ , weil  $C' + Ck = 0$ , also wird, weil  $k\Theta = \frac{7}{2}g \sin i \cdot t$ ,  $V + \frac{7}{2}g \sin i \cdot t = 0$ , indem  $U = 0$  wird; d. h. (nach 6.) die Geschwindigkeit des Berührungspunctes nach  $y$  verschwindet zugleich mit der nach  $x$ , für  $t = t'$ ; folglich wird in diesem Augenblicke überhaupt die Geschwindigkeit des Berüh-

rungspunctes Null, und die Kugel beginnt zu rollen, ohne zu gleiten.

Es gelten daher jetzt die Gleichungen a. (2. und 3.) nicht mehr, sondern die unter b. treten an ihre Stelle; während 1. und 4. bleiben, wie vorher. Aus diesen folgt

$$u = \frac{2}{5} h q + \text{Const.}, \quad v + \frac{2}{5} h p = g \sin i \cdot t + \text{Const.},$$

oder, wenn man die Werthe von  $u, v, p, q$  für  $t = t'$  mit  $u', v', p', q'$  bezeichnet:

$$u - u' = \frac{2}{5} h (q - q'), \quad v - v' + \frac{2}{5} h (p - p') = g \sin i (t - t'). \quad 12.$$

Für  $t = t'$  gelten aber die Gleichungen 6., in welchen  $U = 0$ ,  $V = -\frac{2}{7} g \sin i \cdot t'$  ist; aus diesen ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} u' &= \frac{5}{7} u_0 - \frac{2}{7} h q_0, & v' &= \frac{5}{7} g \sin i \cdot t' + \frac{5}{7} v_0 + \frac{2}{7} h p_0 \\ u' + h q' &= 0, & v' - h p' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad 13.$$

wodurch die Constanten  $u', v', p', q'$  in 12. bestimmt sind. Ferner gelten, von  $t = t'$  an, noch die Gleichungen 3. b.

$$u + h q = 0, \quad v - h p = 0. \quad 14.$$

Aus 12. und 14. folgt:

$$u = u', \quad q = q', \quad v = h p = \frac{5}{7} v' + \frac{2}{7} h p' + \frac{2}{7} g \sin i (t - t'), \quad 15.$$

mithin  $\frac{du}{dt} = 0$ ,  $\frac{dq}{dt} = 0$ , also nach 1.  $f = 0$ . Ferner folgt:

$$h \frac{dp}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{5}{7} g \sin i, \quad \text{und hieraus, nach 1.,}$$

$$\frac{2}{5} h \frac{dp}{dt} = -f = \frac{2}{7} g \sin i.$$

Nach der Voraussetzung ist aber  $k < 1$ , oder  $\frac{2}{7} g \sin i < \mu g \cos i$ ; also ergibt sich die Intensität der Reibung, nämlich  $\frac{2}{7} g \sin i$  (indem  $f = 0$ ), kleiner als  $\mu g \cos i$ ; die Bedingung 2. b. wird mithin von der Zeit  $t = t'$  an fortwährend befriedigt, und die Kugel rollt demnach von diesem Augenblicke an unaufhörlich, ohne zu gleiten; wobei die Elemente ihrer Bewegung ( $u, v, p, q$ ) durch die Gleichungen 15. bestimmt werden. Nach

diesen bleiben  $u$  und  $q$  fortwährend constant; also ist die horizontale Geschwindigkeit des Mittelpunctes ( $u$ ) unveränderlich; seine mit  $y$  parallele Geschwindigkeit ( $v$ ) ist dagegen gleichförmig beschleunigt. Hieraus ergibt sich, daß die Bahn des Mittelpunctes von  $t=t'$  an, eine Parabel ist.

Von besonderen Fällen, die bei dieser Aufgabe noch eintreten können, mag hier nur derjenige nahmhast gemacht werden, welcher Statt findet, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten  $u_0, v_0, p_0, q_0$  sämmtlich Null sind. Wird die Kugel auf der schiefen Ebene ohne Anfangsgeschwindigkeit entlassen, so ist klar, daß die Schwere allen Puncten derselben im ersten Augenblicke eine mit  $y$  parallele Geschwindigkeit  $=g \sin i \cdot dt$  ertheilt, mit welcher mithin der Berührungspunct abwärts zu gleiten strebt. Folglich muß die Reibung der Axe  $y$  parallel aufwärts wirken; also ist in diesem Falle  $f=0$ , mithin, nach 1. und 4. im vorigen §.

$$\frac{2}{5}h \frac{dp}{dt} = -f, \quad \frac{2}{5}h \frac{dq}{dt} = 0, \quad \frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dv}{dt} = g \sin i + f.$$

Hieraus folgt  $u=0, q=0$ , weil für  $t=0, u_0=0, q_0=0$ ; die horizontalen Geschwindigkeiten des Schwerpunctes und des Berührungspunctes bleiben also immer Null, wie sich auch von selbst versteht. Ferner gelten, wenn  $k < 1$ , die Gleichungen 3. h.;

man hat also  $v - hp = 0$ , und zugleich  $\frac{dv}{dt} + \frac{2}{5}h \frac{dp}{dt} = g \sin i$ , folglich  $v + \frac{2}{5}hp = g \sin i \cdot t$ , also  $v = hp = \frac{5}{7}g \sin i \cdot t$ .

Hieraus folgt  $\frac{2}{5}h \frac{dp}{dt} = \frac{2}{7}g \sin i = -f$ ; es ist aber, weil

$$k = \frac{2}{7} \frac{g \sin i}{\mu} < 1 \text{ nach der Voraussetzung, auch } -f = \frac{2}{7}g \sin i <$$

$\mu g \cos i$ ; und da zugleich  $f=0$ , so wird die Bedingung 2. h. erfüllt, wie erforderlich. Die Geschwindigkeit des Berührungspunctes bleibt also beständig Null, oder die Kugel rollt abwärts, ohne zu gleiten, wenn  $k < 1$ . Dies gilt auch noch, wenn  $k=1$ .

Ist aber  $k > 1$ , so würde, wenn man die vorstehenden For-

meinen auch dann noch anwenden wollte, die Reibung sich wieder  $= -f' = \frac{7}{2}g \sin i > \mu g \cos i$  ergeben; also die Bedingungen 2. b. nicht mehr erfüllt werden. Mithin gelten die Gleichungen 2. a., 3. a.; aus denen, weil  $f=0$ ,  $u=0$ ,  $q=0$ , sich bloß ergibt  $f' = -\mu g \cos i$ , wo das negative Zeichen so lange gelten muß, als der Berührungspunct abwärts gleitet, oder seine Geschwindigkeit positiv ist. Demnach hat man:

$$\frac{7}{2}h \frac{dp}{dt} = \mu g \cos i, \quad \frac{dv}{dt} = g(\sin i - \mu \cos i);$$

mithin

$$\frac{7}{2}h p = \mu g \cos i \cdot t, \quad v = g(\sin i - \mu \cos i)t.$$

Die Geschwindigkeit des Berührungspunctes ergibt sich hieraus

$$v - hp = g(\sin i - \frac{7}{2}\mu \cos i)t,$$

also immer positiv, weil  $k > 1$ , d. i.  $\sin i > \frac{7}{2}\mu \cos i$  ist. Folglich gelten die vorstehenden Gleichungen immerfort.

106. Für eine horizontale Ebene wird  $i=0$ ,  $k=0$ ,  $\Theta=\mu g t$ . Um zunächst die Bewegung auf dieser zu bestimmen, so lange die Geschwindigkeit des Berührungspunctes nicht Null ist, kann man die Gleichungen 9. des vorigen §. anwenden. Man denke sich noch die positive Richtung der  $x$  der Anfangsgeschwindigkeit des Berührungspunctes (d. i.  $u_0 + hq_0 = \frac{7}{2}U_0$ ) parallel; so wird  $V_0=0$  und  $U_0$  positiv; mithin nach 10. b.  $c=-1$ , und nach 11.  $C=2U_0$ ,  $C'=0$ . Demnach ergibt sich aus 9. sofort:  $\mu g t = U_0 - U$ , und  $V=0$ , oder

$$U = U_0 - \mu g t, \quad V = 0. \quad 1.$$

Folglich bleibt die Richtung der Geschwindigkeit des Berührungspunctes, mithin auch die der Reibung, unveränderlich und mithin nach der Annahme parallel mit  $x$ . Für die Reibung findet man aus vorstehenden Gleichungen  $\frac{dU}{dt} = \frac{du}{dt} = f = -\mu g$ ,  $f'=0$ .

Man hat, nach 6. im vorigen §.



$$U = u - \frac{5}{7}u_0 + \frac{2}{7}hq_0, \quad V = v - v_0 \quad (\text{weil } v_0 - hp_0 = 0)$$

also erhält man, für die Geschwindigkeit des Mittelpunctes:

$$u - \frac{5}{7}u_0 + \frac{2}{7}hq_0 = \frac{2}{7}(u_0 + hq_0) - \mu g t$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{oder} \quad u = u_0 - \mu g t, \quad v = v_0, \\ \text{und} \quad hq = \frac{7}{2}U - u = hq_0 - \frac{5}{2}\mu g t, \quad hp = v_0. \end{array} \right\} 2.$$

Hieraus folgt, daß die Bahn des Mittelpunctes, wenn nicht  $v_0 = 0$  ist und so lange die Kugel gleitet, eine Parabel ist. Bezeichnet man die Coordinaten seiner senkrechten Projection auf die horizontale Ebene mit  $x, y$ , so ist  $u = \frac{dx}{dt}$ ,  $v = \frac{dy}{dt}$ , und

$$\frac{dx}{dt} = u_0 - \mu g t, \quad \frac{dy}{dt} = v_0,$$

folglich, indem für  $t = 0$ ,  $x$  und  $y$  Null sind,

$$x = u_0 t - \frac{1}{2}\mu g t^2, \quad y = v_0 t \quad 3.$$

oder, nach Elimination von  $t$ :

$$\mu g y^2 - 2u_0 v_0 y + 2v_0^2 x = 0,$$

$$\text{oder endlich} \quad (\mu g y - u_0 v_0)^2 = v_0^2 (u_0^2 - 2\mu g x).$$

Es sei (Fig. 43.) A der Anfang, AB die Axe der  $x$ , also auch die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit des Berührungspunctes, AE die Axe der  $y$ , ADG die Parabel, so hat man, für den Scheitel D derselben, nach vorstehender Gleichung:

$$ED = x' = \frac{u_0^2}{2\mu g}, \quad AE = y' = \frac{u_0 v_0}{\mu g}. \quad 4.$$

Der Weg, den die senkrechte Projection des Mittelpunctes, also der Berührungspunct, auf der Ebene von A aus durchläuft, ist daher anfänglich ein gewisser Bogen dieser Parabel, bis die Kugel zu gleiten aufhört, oder die Geschwindigkeit des jedesmaligen Berührungspunctes, in dem Augenblicke der Berührung, immer gerade durch Null geht. Dies erfolgt von dem Augenblicke an, in welchem (in 1.)  $U = 0$  wird; alsdann wird

$$t = t' = \frac{U_0}{\mu g} = \frac{2}{7} \left( \frac{u_0 + hq_0}{\mu g} \right).$$

Setzt man zugleich für diese Zeit  $t'$ ,  $u = u'$ , so folgt aus 2.  $u' = u_0 - \frac{2}{7}(u_0 + hq_0) = \frac{5}{7}u_0 - \frac{2}{7}hq_0$ . Es gelten aber nunmehr die Gleichungen 15. des vorigen §.; sie geben hier:

$$u = -hq = u', \quad v = hp = v_0, \quad 5.$$

d. h. von  $t = t'$  an ist die Geschwindigkeit des Berührungspunctes beständig Null, und die des Mittelpunctes nach Richtung und Größe unveränderlich; die Folge der Berührungspuncte beschreibt also von nun an auf der Ebene eine gerade Linie mit der Geschwindigkeit  $\sqrt{u'^2 + v_0^2}$ . Zugleich ist von  $t = t'$  an die Reibung gänzlich Null; denn da  $\frac{du}{dt} = 0$ ,  $\frac{dv}{dt} = 0$ , so folgt  $f = 0$ ,  $f' = 0$ . Die Richtung dieser Geraden ist die der Tangente jener Parabel, wie aus der Rechnung leicht folgt, aber auch ohne sie unmittelbar daraus, daß für  $t = t'$  alle Kräfte verschwinden.

In dem besondern Falle, wenn  $v_0 = 0$ , hat man  $u = u_0 - \mu gt$ ,  $v = 0$ ; die Bewegung geschieht dann in der Geraden AB selbst. Die Kugel gleitet bis zu der Zeit  $t'$ , die eben so bestimmt, wie vorhin; von diesem Augenblicke an aber rollt sie ohne zu gleiten, und die Geschwindigkeit ihres Mittelpunctes ist alsdann unveränderlich gleich  $u' = \frac{5}{7}u_0 - \frac{2}{7}hq_0$ . Es kann sich nun ereignen, daß die Geschwindigkeit des Mittelpunctes Null und hierauf negativ wird, ehe sie den unveränderlichen Werth  $u'$  erhält; dazu gehört, daß  $u_0 - \mu gt = 0$  werde für eine Zeit  $t$  zwischen 0 und  $t'$ ; für diesen Fall muß  $u_0$  positiv und  $\frac{u_0}{\mu g} < t'$  oder  $u_0 < \frac{2}{7}(u_0 + hq_0)$  sein. Alsdann ist offenbar auch  $u' = u_0 - \frac{2}{7}(u_0 + hq_0)$  negativ; und die Bewegung ist in ihrem Endzustande rückläufig. Ähnliches kann auch Statt finden, wenn  $v_0$  nicht Null ist, mit- hin der Mittelpunkt anfänglich einen parabolischen Bogen beschreibt.

Nämlich die Anfangsgeschwindigkeit dieses Punctes ist allgemein:  $\sqrt{u_0^2 + v_0^2}$ , ihre Richtung die der Tangente (AA') in A; die Endgeschwindigkeit dagegen, mit welcher die Kugel

von  $t=t'$  an fortrollt, ist  $\sqrt{u'^2 + v_0^2}$  oder  $\sqrt{(\frac{5}{7}u_0 - \frac{2}{7}hq_0)^2 + v_0^2}$ . Diese ist nun in Vergleich mit der ersten rechtläufig oder rückläufig nachdem der Mittelpunkt in den Scheitel D der Parabel gelangt, oder nicht. Die zur Erreichung des Scheitels erforderliche Zeit  $t''$

gibt sich aus der zweiten der Gleichungen 3. gleich  $\frac{y'}{v_0} = \frac{u}{\mu}$

nach 4.; die Kugel bewegt sich also überhaupt nur dann nach dem Scheitel der Parabel hin, wenn  $u_0$  positiv ist. Soll nun, vorausgesetzt daß  $u_0$  positiv ist, in ihrem Endzustande rechtläufig sein, so muß dieser zeitig genug eintreten, daß sie den Scheitel der Parabel nicht erreiche; mithin muß  $t' < t''$  oder

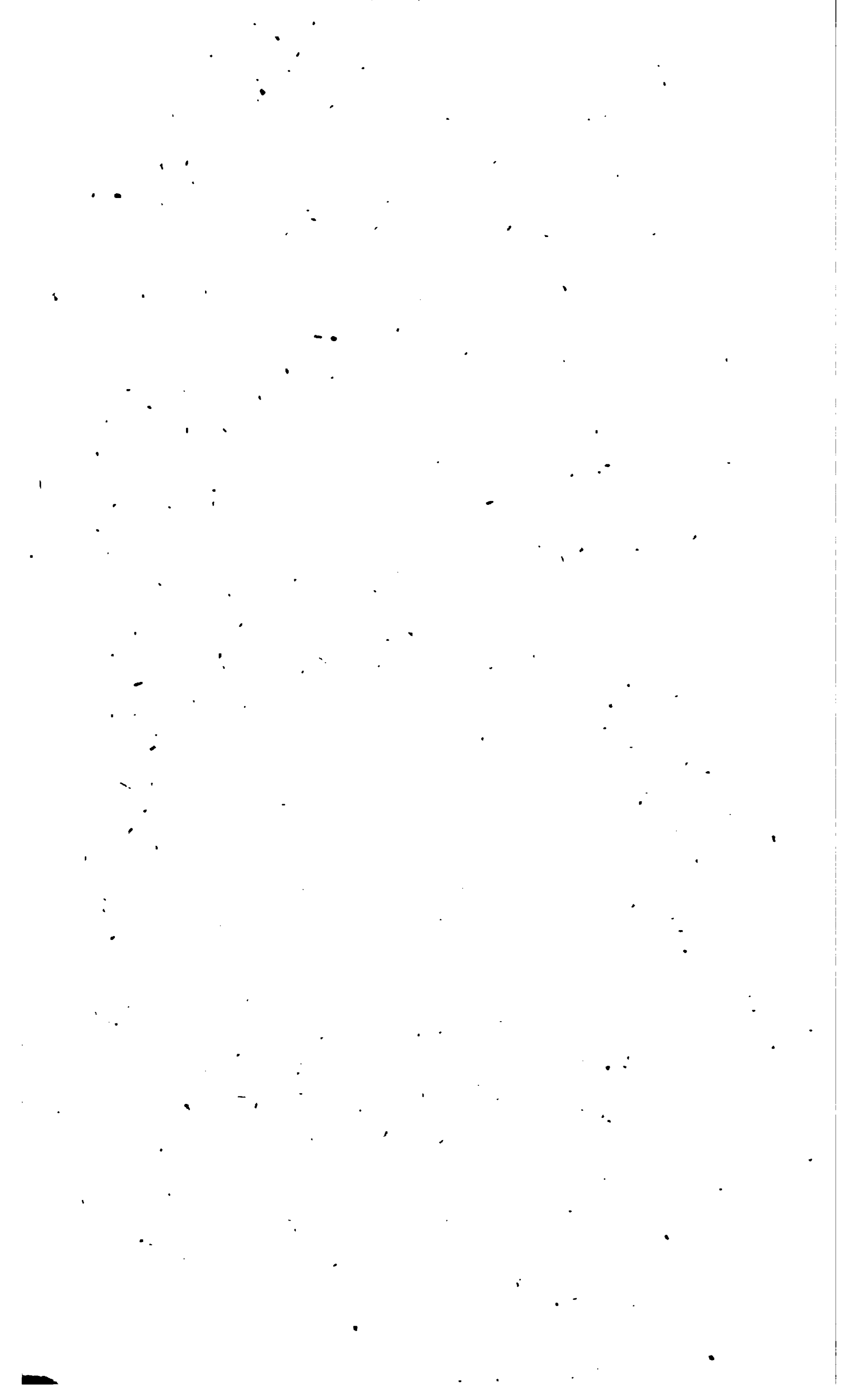
$$\frac{2}{7}(u_0 + hq_0) < u_0, \text{ d. i. } \frac{2}{5}hq_0 < u_0$$

sein. Da zugleich  $u_0 + hq_0 > 0$ , so folgt, daß in diesem Falle  $hq_0$  zwischen den Grenzen  $-u_0$  und  $+\frac{5}{2}u_0$  liegen muß, wobei zugleich  $u_0$  positiv ist.

Alsdann beginnt der Endzustand in irgend einem Punkte F zwischen A und D, von wo aus die Kugel nach der Richtung der Tangente FF' gleichförmig fortrollt. Ist aber  $t' > t''$ , so erreicht und überschreitet der Mittelpunkt den Scheitel D, der Endzustand beginnt erst nachher, z. B. in G, von wo die Kugel nach der Tangente GG' fortrollt; die Bewegung ist also, im Endzustande, rückläufig. Hierzu ist erforderlich, daß  $u_0$  positiv und  $< \frac{2}{5}hq_0$ , oder  $hq_0 > \frac{5}{2}u_0$  sei.

Daß dieser Endzustand in der Erfahrung nicht, wie vorstehende Rechnung giebt, unaufhörlich fortdauert, kann nicht befremden, da schon der Widerstand der Luft hinreicht, das genaue Verhältniß zwischen der Geschwindigkeit des Mittelpunktes und derjenigen der Drehung zu stören und zu bewirken, daß die Geschwindigkeit des Berührungspunktes wieder aufhört Null zu sein, oder dieser wieder gleitet. Da alsdann auch die Reibung wieder eintritt, so ist klar, daß auf diese Weise die Kugel bald gänzlich zur Ruhe kommen muß.









Bei dem Verleger dieses Buches sind auch folgende Bücher erschienen:

Baumgarten, J. E. F., Kopfrechenbuch zum Gebrauch des Lehrers bei den Uebungen der ersten Anfänger. Vierte stark vermehrte und sorgfältigst verbesserte Aufl. 8. 15 Sgr.

— Kopfrechenbuch zum Gebrauch des Lehrers bei dem Unterrichte geübterer Schüler. 8. 20 Sgr.

Dirksen, E. H., über die Methode, den Werth eines bestimmten Integrals näherungsweise zu bestimmen. Gelesen in der Academie der Wissenschaften, am 3. Febr. 1831. gr. 4. geh. 20 Sgr.

— Ueber die Anwendung der Analysis auf die Rectification der Curven, die Quadratur der Flächen und die Cubatur der Körper. Eine in der R. Academie der Wissenschaften gelesene Abhandl. gr. 4. geh. 20 Sgr.

Hagen, G., Grundzüge der Wahrscheinlichkeits-Rechnung. Mit einer Figuren-Tafel. gr. 8. 1 Thlr.

Handbuch für die Anwendung der reinen Mathematik. Eine systematische Sammlung der Formeln, Ausdrücke und Hilfszahlen aus der ebenen u. körperlichen Geometrie, ebenen, sphärischen und analytischen Trigonometrie, Arithmetik, Algebra, niederen und höheren Analysis der Curven. 1r Bd. (von v. Radowiz). Auch unter dem Titel „die Formeln der Geometrie u. Trigonometrie. 4. 3 Thlr.

Hartung, A., Rechenbuch zum Gebrauch für Schulen. 2te umgearbeitete Aufl. 8. 20 Sgr.

Rupfer, A. L., Preisschrift über die genaue Messung der Winkel an Kristallen (Gekrönt von der physikal. Klasse der R. Academie der Wissenschaften im Juli 1823.). gr. 4. geh. 1 Thlr.

Logarithmen von vier Dezimal-Stellen. 8. geh. 7½ Sgr.

Pape, Dr. W., Rechenbuch für die unteren Klassen der Gymnasien. 8. 15 Sgr.

— die Auflösungen der in diesem Rechenbuche vorkommenden Beispiele nebst einigen Bemerkungen über den Rechenunterricht. 8. 10 Sgr.

Pöselger, Dr. F. L., Anleitungen zu Rechnungen der Geodäsie. 4. 20 Sgr.



**Schmidt, R. A. L.**, erster Anschauungskursus der Raumlehre für Schulen; die Wurzel- und Stammräume: Kugel, Zylinder, Kegels, Prismen und Pyramiden, nebst Schnitten enthaltend; nach den Grundsätzen der neuern Elementar-Methodik, für Bürger- und Landschulen bearbeitet. 1r Theil, 1e Abtheil. (auch unter dem Titel: Raumlehre für Schulen; nach den Grundsätzen der neuern Elementar-Methodik in drei Cursen bearbeitet. 1r Theil. Wurzel- und Stammräume und ihre Schnitte). gr. 8. 15 Sgr.

**Steiner, J.**, die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichtsanstalten und zur practischen Benutzung. Mit 2 Kupfern. gr. 8. 17½ Sgr.

---

# Lebensversicherung

(ausführl. N.B.)

N. 266, im zweiten Teile, Z. 16. v. u. und folgendes  
sich so prüfen:

... und weil die ungenutzten Beiträge der Zeit während  
der Zeit der Versicherung gewahrt werden müssen, die Zinsen  
der laufenden Prämie im Jahr  $- f \pi$  gewahrt werden, und  
die Zinsen aller früheren Jahre für die Beiträge, die zu  
den  $\Sigma \pi = \pi$  der gesamten Prämie ist, indem der Gewinn  $f \pi$  gewahrt  
für alle die Jahre der Versicherung bleibt:  $- f \pi$  gewahrt. Folglich  
gibt die Gleichung der laufenden Prämie:

$$\mu \frac{dw}{dt} = g(\kappa m - r m') \frac{dw}{dt} - f \pi \frac{dw}{dt} \quad 1.$$

mit  $\mu = M \kappa^2 + m \kappa^2 + m' \kappa^2$ , mit  $\kappa$ , mit  $\pi$  gleich  $\mu$ , mit  
unter, für  $\pi$  gleich  $\pi$ ,  $\pi = w + T + T'$  oder

$$\pi = g(M + m + m') - (\kappa m - r m') \frac{dw}{dt} \quad 2.$$

mit  $\kappa$  für  $\kappa$  abhängig  $\kappa m - r m' = \kappa$ ,  $M + m + m' = g$ , und  
folglich  $f$  gleich  $f \pi$ , so werden nun folgende Gleichungen:

$$\mu \frac{dw}{dt} = (g \kappa - f \pi) \frac{dw}{dt}, \quad \pi = g g - \kappa \frac{dw}{dt}.$$

die Elimination von  $\pi$  gibt:

$$\mu \frac{dw}{dt} = g \kappa - f(g g - \kappa \frac{dw}{dt})$$

$$\text{also } (\mu - f \kappa) \frac{dw}{dt} = g(\kappa - f g)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{g(\kappa - f g)}{\mu - f \kappa}$$

(es ist wichtig, dass die Prämie für die Versicherung gewahrt wird in der Versicherung  
bewahrt werden.)

N. 348. Z. 2. v. u. sollte richtig oder richtig l. rückläufig oder rückläufig  
längst.



JAN 10 1885